FIZYKA

TEORETYCZNA FIZYKA

Саакян Г. Г.
Арцахский государственный университет

О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЯХ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДВУМЕРНОЙ СИСТЕМЫ ДИРАКА

Рассматривается следующая краевая задача для двумерной системы Дирака

$$\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{d}{dx}+\begin{pmatrix} p(x) & 0 & r(x) & -q(x) \\ 0 & p(x) & q(x) & r(x) \\ r(x) & q(x) & -p(x) & 0 \\ -q(x) & r(x) & 0 & -p(x) \end{pmatrix}\right\}\bar{y}=\lambda\bar{y},\ x\in(0,\pi),\ \bar{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

$$y_1(0)\cos\alpha_1+y_4(0)\sin\alpha_1=0, \tag{2a}$$

$$y_2(0)\cos\alpha_2+y_3(0)\sin\alpha_2=0, \tag{2b}$$

$$y_1(\pi)\cos\beta_1+y_4(\pi)\sin\beta_1=0, \tag{2c}$$

$$y_2(\pi)\cos\beta_2+y_3(\pi)\sin\beta_2=0, \tag{2d}$$

где $\alpha_i,\ \beta_i\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\ i=1,2,$ $p(t),q(t)$ и $r(t)$ -действительные функции, определенные и непрерывные на интервале $[0,\pi]$, λ - параметр. Спектральные свойства для одномерного оператора Дирака достаточно подробно исследованы ([1]-[3]). Цель данной работы –исследование некоторых спектральных свойств для одного двумерного оператора Дирака, порождаемого задачей (1), (2a)-(2d). Заметим прежде всего, что в раскрытом виде систему (1) можно записать в виде

$$\begin{cases} -y_4'+p(t)y_1+r(t)y_3-q(t)y_4=\lambda y_1, \\ -y_3'+p(t)y_2+q(t)y_3+r(t)y_4=\lambda y_2, \\ y_2'+r(t)y_1+q(t)y_2-p(t)y_3=\lambda y_3, \\ y_1'-q(t)y_1+r(t)y_2-p(t)y_4=\lambda y_4. \end{cases} \tag{3}$$

Известно ([3]), что матрицы Паули четвертого порядка имеют следующий вид

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&0&0&-i\\0&0&-i&0\\0&i&0&0\\i&0&0&0\end{pmatrix},\ \sigma_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix},\ \sigma_3=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix},\ \sigma_4=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},$$

$$\sigma_5=\begin{pmatrix}0&0&-i&0\\0&0&0&i\\i&0&0&0\\0&-i&0&0\end{pmatrix}$$

и обладают следующими свойствами:

1. $\sigma_k^*=\sigma_k,\ k=1,2,3,4,5$ (самосопряженность),
2. $\sigma_k\sigma_j=-\sigma_j\sigma_k,\ k\neq j$ (антикоммутативность)
3. $\sigma_k^2=E,\ k=1,2,3,4,5$ (E-единичная матрица четвертого порядка).

С помощью матриц Паули дифференциальное выражение, порождающее рассматриваемый оператор Дирака, можно представить в виде

$$\ell_1=\sigma_1\frac{1}{i}\frac{d}{dt}+\sigma_2\cdot p(t)+\sigma_3\cdot q(t)+\sigma_4\cdot r(x)=S\frac{d}{dt}+\Omega(t),$$

где $S=\frac{1}{i}\sigma_1,$, $\Omega(t)=\sigma_2\cdot p(t)+\sigma_3\cdot q(t)+\sigma_4\cdot r(t)$ называют потенциалом. Нетрудно проверить непосредственным вычислением, что имеет место соотношение

$$S\Omega(t)=-\Omega(t)S.$$

Операторы Дирака, удовлетворяющие этому условию, называют каноническими ([4], стр. 30). Мы будем рассматривать случай, когда $q(t)\equiv 0$. В этом случае систему (3) можно записать в виде

$$\begin{cases}y_4'=(p(t)-\lambda)\,y_1+r(t)y_3,\\ y_3'=(p(t)-\lambda)\,y_2+r(t)y_4,\\ y_2'=-r(t)y_1+(p(t)+\lambda)\,y_3,\\ y_1'=-r(t)y_2+(p(t)+\lambda)\,y_4.\end{cases}\tag{4}$$

Лемма 1. Собственные вектор-функции $\bar{y}(t,\lambda_1)$ и $\bar{z}(t,\lambda_2)$ задачи (4), (2a)-(2d), соответствующие различным собственным значениям $\lambda_1\neq\lambda_2$, ортогональны, т.е.

$$\int_0^\pi \bar{y}^T\bar{z}dt\equiv\int_0^\pi\sum_{i=1}^4 y_i(t,\lambda_1)z_i(t,\lambda_2)dt=0,$$

где

$$\bar{y}^T=(y_1,y_2,y_3,y_4).$$

Доказательство. Предположим, что $\bar{y}(t,\lambda_1)$ u $\bar{z}(t,\lambda_2)$ являются решениями задачи (4),(2a)-(2d). Тогда имеют место тождества

$$\begin{cases} y_4'(t) \equiv (p(t)-\lambda_1)\,y_1(t)+r(t)\,y_3(t), \\ y_3'(t) \equiv (p(t)-\lambda_1)\,y_2(t)+r(t)\,y_4(t), \\ y_2'(t) \equiv -r(t)\,y_1(t)+(p(t)+\lambda_1)\,y_3(t), \\ y_1'(t) \equiv -r(t)\,y_2(t)+(p(t)+\lambda_1)\,y_4(t), \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} z_4'(t) \equiv (p(t)-\lambda_2)\,z_1(t)+r(t)\,z_3(t), \\ z_3'(t) \equiv (p(t)-\lambda_2)\,z_2(t)+r(t)\,z_4(t), \\ z_2'(t) \equiv -r(t)\,z_1(t)+(p(t)+\lambda_2)\,z_3(t), \\ z_1'(t) \equiv -r(t)\,z_2(t)+(p(t)+\lambda_2)\,z_4(t). \end{cases}$$

Умножив первые тождества этих систем соответственно на $-z_1$ и y_1, вторые- на z_2 и $-y_2$, третие –на z_3 и $-y_3$,а последние –на z_4 и $-y_4$, и затем, суммируя, получим

$$\frac{d}{dt}\{y_1z_4-y_4z_1+y_2z_3-y_3z_2\}\equiv(\lambda_1-\lambda_2)\sum_{i=1}^{4}y_i(t,\lambda_1)z_i(t,\lambda_2)\,.$$

Далее, интегрируя последнее тождество в пределах от 0 до π, найдем

$$(\lambda_1-\lambda_2)\int_0^\pi\sum_{i=1}^{4}y_i(t,\lambda_1)z_i(t,\lambda_2)dt=\left[y_1z_4-y_4z_1+y_2z_3-y_3z_2\right]\Big|_0^\pi. \tag{5}$$

Правая часть этого равенства, в силу граничных условий (2), как нетрудно проверить, будет равна нулю, и поскольку $\lambda_1\neq\lambda_2$, то получим то, что и требовалось доказать.

Лемма 2. Собственные значения краевой задачи (4), (2a)-(2d) действительны.

Доказательство. Предположим противное, а именно: $\lambda_1=u+iv$ является комплексным собственным значением задачи (4), (2a)-(2d). В силу действительности функций $p(t)$ и $r(t)$, а также чисел α_i и β_i, число $\lambda_2=\bar{\lambda}_1=u-iv$ также будет собственным значением задачи (4), (2a)-(2d) с соответствующей собственной функцией. Тогда, с учетом леммы 1, мы найдем, что

$$\int_0^\pi\bar{y}^T(t,\lambda_1)\bar{y}(t,\lambda_1)dt\equiv\int_0^\pi\sum_{i=1}^{4}y_i(t,\lambda_1)\bar{y}_i(t,\lambda_1)dt=\int_0^\pi\sum_{i=1}^{4}\left|y_i(t,\lambda_1)\right|^2dt=0,$$

откуда будет следовать, что $y_i(t,\lambda_1)\equiv0,\ i=1,2,3,4,$ а, значит $\bar{y}(t,\lambda_1)\equiv0,$ что противоречит нашему предположению. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь систему (4) в предположении, что потенциал Ω равен тождественному нулю (что равносильно выполнению условия: $p(t)=r(t)\equiv0$). В этом случае система (4) примет вид

$$\begin{cases} y_4'=-\lambda y_1, \\ y_3'=-\lambda y_2, \\ y_2'=\lambda y_3, \\ y_1'=\lambda y_4. \end{cases} \tag{6}$$

Далее, предположим, что на решения системы (6) налагаются следующие начальные условия

$$
\begin{aligned}
&y_1(0,\lambda) = -\sin\alpha_1,\\
&y_2(0,\lambda) = -\sin\alpha_2,\\
&y_3(0,\lambda) = \cos\alpha_2,\\
&y_2(0,\lambda) = \cos\alpha_1.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Заметим, что систему (6) можно рассмотреть как совокупность двух независимых систем, состоящих соответственно из первого и четвертого, и, второго и третьего уравнений. Решая каждую из них в отдельности одним из известных для линейных однородных систем второго порядка методов, и, учитывая условия (7), нетрудно найти, что общее решение задачи (6)-(7) можно записать в виде

$$
\begin{aligned}
&y_1(t,\lambda) = \sin(\lambda t-\alpha_1),\\
&y_2(t,\lambda) = \sin(\lambda t-\alpha_2),\\
&y_3(t,\lambda) = \cos(\lambda t-\alpha_2),\\
&y_4(t,\lambda) = \cos(\lambda t-\alpha_1).
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Пусть E есть пространство четырехкомпонентных вектор-функций $\bar{f}(x)$, $0 \le x < \infty$, непрерывных и имеющих непрерывную первую производную. Топология в E определяется с помощью равномерной в каждом конечном интервале сходимости вектор-функций и их первых производных.

Далее, пусть A_1 и A_2 линейные операторы-матрицы (4x4) из E в E, а E_1 и E_2 --замкнутые подпространства в E.

Определение. Линейный обратимый оператор (матрица (4x4) X, определенный на всем E и действующий из E_1 в E_2 называется *оператором (матрицей) преобразования для пары операторов (матриц)* A_1 *и* A_2, если X удовлетворяет следующим двум условиям:

1. Оператор (матрица) X и обратный ему оператор (матрица) X^{-1} непрерывны в пространстве E.
2. Имеет место операторно-матричное тождество

$$A_1X = XA_2. \tag{9}$$

Пусть пространство E--то же, что определено выше, а пространства $E_1 = E_2$--подпространство вектор-функций $\bar{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x)\\ f_2(x)\\ f_3(x)\\ f_4(x)\end{pmatrix}$, удовлетворяющих краевому условию

$$f_4(0) = h_1 f_1(0), \quad f_3(0) = h_2 f_2(0), \tag{10}$$

где h_1 и h_2–произвольные конечные действительные числа.

Рассмотрим операторы-матрицы

$$A_1=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\frac{d}{dx}+\begin{pmatrix}p(x)&0&r(x)&0\\0&p(x)&0&r(x)\\r(x)&0&-p(x)&0\\0&r(x)&0&-p(x)\end{pmatrix}\equiv S\frac{d}{dx}+\Omega(x), \qquad (11)$$

$$A_2=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\frac{d}{dx}\equiv S\frac{d}{dx},\quad 0\le x<\infty, \qquad (12)$$

где $p(x)$ и $r(x)$ -- действительные и непрерывные функции на интервале $[0,\pi]$,

Теорема. *Оператор (матрица)* X, *отображающий* E_1 *на* E_2 *можно реализовать в виде*

$$X\bar{f}(x)=\bar{f}(x)+\int_0^x L(x,t)\bar{f}(t)dt. \qquad (13)$$

Ядро-матрица $L(x,t)$ оператора (13) является решением дифференциального уравнения

$$SL'_x(x,t)+L'_t(x,t)S=-\Omega(x)L(x,t) \qquad (14)$$

и удовлетворяет условиям

$$L(x,x)S-SL(x,x)=\Omega(x), \qquad (15)$$

$$L(x,0)S_1H=0,\quad H=\begin{pmatrix}1\\1\\h_2\\h_1\end{pmatrix}. \qquad (16)$$

Наоборот, если ядро-матрица $L(x,t)$ есть решение задачи (14)-(15), то оператор (матрица) X, определенный формулой (13), является оператором (матрицей) преобразования для пары операторов (матриц) A_1 и A_2, действующий из E_1 в E_2.

Доказательство. Из определения операторов –матриц A_1 и X, имеем

$$[X\bar{f}(x)]=S\bar{f}'(x)+SL(x,x)\bar{f}(x)+\Omega(x)\bar{f}(x)+\int_0^x[SL'_x(x,t)+\Omega(x)L(x,t)]\bar{f}(t)dt.$$

С другой стороны, учитывая определения X и A_2 будем иметь

$$X[A_2\bar{f}(x)]=S\frac{d}{dx}\bar{f}(x)+\int_0^x L(x,t)S\frac{d}{dx}\bar{f}(x)=S\bar{f}'(x)+\int_0^x L(x,t)S\bar{f}'(t)dt.$$

Учитывая (9), и, приравнивая правые части двух последних равенств, получим

$$S\bar{f}'(x)+SL(x,x)\bar{f}(x)+\Omega(x)\bar{f}(x)+\int_0^x[SL'_x(x,t)+\Omega(x)L(x,t)]\bar{f}(t)dt=S\bar{f}'(x)+\int_0^x L(x,t)S\bar{f}'(t)dt. \qquad (17)$$

Применив интегрирование по частям, будем иметь

$$\int_0^x L(x,t)S\bar{f}'(t)dt = L(x,x)S\bar{f}(x) - L(x,0)S\bar{f}(0) - \int_0^x L_t'(x,t)S\bar{f}(t)dt .$$

Тогда равенство (17) можно записать в виде

$$SL(x,x)\bar{f}(x)+\Omega(x)\bar{f}(x)+\int_0^x [SL_x'(x,t)+\Omega(x)L(x,t)]\bar{f}(t)dt = L(x,x)S\bar{f}(x)-L(x,0)S\bar{f}(0)-\int_0^x L_t'(x,t)S\bar{f}(t)dt . \quad (18)$$

В силу произвольности вектор-функции $\bar{f}(x)$, мы можем приравнить подынтегральные выражения. Получим

$$SL_x'(x,t)+L_t'(x,t)S = -\Omega(x)L(x,t) ,$$

т.е. уравнение (14). Далее, приравняв коэффициенты при $\bar{f}(t)$, найдем

$$L(x,x)S - SL(x,x) = \Omega(x) .$$

И, наконец, должен быть равен нулю член, содержащий справа в выражении (18), ввиду отсутствия подобного члена слева. Следовательно,

$$L(x,0)S\bar{f}(0) = 0. \quad (19)$$

Очевидно, что $\bar{f}(0) = H = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ h_2 \\ h_1 \end{pmatrix}$ удовлетворяет краевому условию (10). Поэтому из (19) будет следовать, что $L(x,0)SH = 0$, т.е. условие (16). Теорема доказана.

Рассмотрим теперь краевую задачу (4), (2a)-(2d). Обозначим через $\bar{\varphi}(x,\lambda)$ решение системы (4), удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi_1(0,\lambda) = -\sin\alpha_1,\ \ \varphi_2(0,\lambda) = -\sin\alpha_2,\ \varphi_3(0,\lambda) = \cos\alpha_2,\ \varphi_4(0,\lambda) = \cos\alpha_1, \quad (20)$$

Очевидно, что $\bar{\varphi}(x,\lambda)$ удовлетворяет краевому условию (2a), (2b). Рассмотрим теперь задачу (4), (20) при $p(t) = r(t) \equiv 0$. Пусть $\bar{\psi}(x,\lambda)$ –решение этой задачи. Как было показано выше, при этом будем иметь

$$\begin{aligned} \psi_1(x,\lambda) &= \sin(\lambda x - \alpha_1), \\ \psi_2(x,\lambda) &= \sin(\lambda x - \alpha_2), \\ \psi_3(x,\lambda) &= \cos(\lambda x - \alpha_2), \\ \psi_4(x,\lambda) &= \cos(\lambda x - \alpha_1). \end{aligned} \quad (21)$$

Применим теперь оператор-матрицу преобразования к решению задачи (4), (2a), (2b). Система (4) может быть записана в виде

$$A_1\overline{y}=\begin{pmatrix} p(x) & 0 & r(x) & -\frac{d}{dx} \\ 0 & p(x) & -\frac{d}{dx} & r(x) \\ r(x) & \frac{d}{dx} & -p(x) & 0 \\ \frac{d}{dx} & r(x) & 0 & -p(x) \end{pmatrix}\overline{y}=\lambda\overline{y} \qquad (22)$$

С другой стороны, вектор-функция $\overline{\psi}(x,\lambda)$, определенная равенствами (21), является решением уравнения

$$A_2\overline{y}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{d}{dx} \\ 0 & 0 & -\frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{d}{dx} & 0 & 0 \\ \frac{d}{dx} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\overline{y}=\lambda\overline{y}. \qquad (23)$$

Так как $\overline{\psi}(x,\lambda)$ является решением уравнения $A_2\overline{\psi}=\lambda\overline{\psi}$, то в силу определения оператора-матрицы преобразования X имеем

$$A_1X\{\overline{\psi}\}=XA_2\{\overline{\psi}\}=X\{\lambda\overline{\psi}\}=\lambda X\{\overline{\psi}\},$$

т.е. $\overline{\varphi}=X\{\overline{\psi}\}$ есть решение уравнения $A_1\{\overline{\varphi}\}=\lambda\overline{\varphi}$. Итак, если $\overline{\psi}(x,\lambda)$ есть решение уравнения (22), то $\overline{\varphi}(x,\lambda)=X\{\overline{\psi}(x,\lambda)\}$ есть решение уравнения (23). Согласно теореме 1 будем иметь

$$\overline{\varphi}(x,\lambda)=\overline{\psi}(x,\lambda)+\int_0^x L(x,t)\overline{\psi}(t,\lambda)dt,$$

откуда, учитывая явный вид вектор-функции $\overline{\psi}(x,\lambda)$, для компонентов вектор-функции $\overline{\varphi}(x,\lambda)$ получим следующие формулы

$$\varphi_1(x,\lambda)=\sin(\lambda x-\alpha_1)+\int_0^x\{L_{11}(x,t)\sin(\lambda t-\alpha_1)+L_{12}(x,t)\sin(\lambda t-\alpha_2)+L_{13}(x,t)\cos(\lambda t-\alpha_2)+L_{14}(x,t)\,\mathrm{s}\cos(\lambda t-\alpha_1)\}\,dt,$$

$$\varphi_2(x,\lambda)=\sin(\lambda x-\alpha_2)+\int_0^x\{L_{21}(x,t)\sin(\lambda t-\alpha_1)+L_{22}(x,t)\sin(\lambda t-\alpha_2)+L_{23}(x,t)\cos(\lambda t-\alpha_2)+L_{24}(x,t)\,\mathrm{s}\cos(\lambda t-\alpha_1)\}\,dt,$$

$$\varphi_3(x,\lambda)=\cos(\lambda x-\alpha_2)+\int_0^x\{L_{31}(x,t)\sin(\lambda t-\alpha_1)+L_{32}(x,t)\sin(\lambda t-\alpha_2)+L_{33}(x,t)\cos(\lambda t-\alpha_2)+L_{34}(x,t)\,\mathrm{s}\cos(\lambda t-\alpha_1)\}\,dt,$$

$$\varphi_1(x,\lambda)=\cos(\lambda x-\alpha_1)+\int_0^x\{L_{41}(x,t)\sin(\lambda t-\alpha_1)+L_{42}(x,t)\sin(\lambda t-\alpha_2)+L_{43}(x,t)\cos(\lambda t-\alpha_2)+L_{44}(x,t)\,\mathrm{s}\cos(\lambda t-\alpha_1)\}\,dt,$$

где $L_{ij}(x,t)$ $(i,j=1,2,3,4)$--элементы матрицы-ядра $L(x,t)$ из теоремы 1.

Литература
1. М.Г. Гасымов, Б.М. Левитан. *Обратная задача для системы Дирака.* ДАН СССР, т. 167, № 5, стр. 967-970, 1966.
2. Б.М. Левитан, И.С. Саргсян. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. М.; Наука, 1988.
3. Т.Н. Арутюнян. *К обратной задаче для канонической системы Дирака.* Известия НАН Армении, Математика, 41, № 1, 2006, стр. 5-14.
4. В.А. Марченко. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев, 1977.

Д. ф.м.н. Ольховский В.С.
Институт ядерных исследований НАНУ, Киев-0650, Украина

О ВРЕМЕНИ КАК КВАНТОВОЙ НАБЛЮДАЕМОЙ, КАНОНИЧЕСКИ СОПРЯЖЁННОЙ ЭНЕРГИИ

1.Введение. Уже долгое время (начиная с работы Паули [1]) известно, что время не может быть представлено самосопряжённым линейным оператором. То, что время не может быть представлено самосопряжённым оператором, следует из полуограниченности непрерывных спектров энергий (обычно они снизу ограничены нулём). Такая ситуация явно не укладывается в рамки обычных ожиданий того, что время, как и пространство, в одних случаях играет роль простого параметра, а в других ***является*** физической наблюдаемой, которую ***следовало бы*** представить оператором. Список работ, посвящённых проблеме времени в квантовой механике, велик. Однако, в ряде работ была проигнорирована теорема Наймарка из [2], которая явилась основанием авторских результатов. В этой теореме говорится [2], что неортогональное спектральное разложение $E(\lambda)$ эрмитового оператора H принадлежит к типу Карлемана [3] (и оно единственно для максимального эрмитового оператора), т.е. оно *может быть аппроксимировано* последовательностью самосопряжённых операторов, спектральные разложения которых слабо сходятся к спектральному разложению E (λ) оператора H .

Именно с помощью этой теоремы Наймарка было показано в [4-8], что время может быть введено как квантово-механическая наблюдаемая, канонически сопряжённая энергии, для физических систем с непрерывными спектрами энергий. При этом было показано, что оператор времени для таких систем обычно является максимальным эрмитовым оператором. А в [6-8]) было выяснено, что для систем с дискретными спектрами энергий время также является квантово-механической наблюдаемой, канонически сопряжённой энергии, а оператор времени является квази-самосопряжённым оператором.