ԳՐԱՖՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՏԱՐՐԵՐԻ ՆԵՐՄՈՒԾՈՒՄԸ ՄԻՋՆԱԿԱՐԳ ԴՊՐՈՑԻ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ԴԱՍԸՆԹԱՑՈՒՄ*

Սլավիկ Թադևոսյան

Բանալի բառեր՝ գրաֆների տեսություն, հարթ գրաֆ, վերջավոր և անվերջ գրաֆներ, գրաֆի կողեր և գագաթներ, զրոյական գրաֆներ, լրիվ գրաֆ, ենթագրաֆներ:

Գրաֆների տեսությունը մաթեմատիկայի ճյուղերից մեկն է, որը մեծ կիրառություն ունի գիտության և տեխնիկայի բազմաթիվ բնագավառներում:Նկատի ունենալով այդ տեսության «լեզվի» պարզությունը՝ նպատակահարմար է այդ տեսության տարրերը ներմուծել միջնակարգ դպրոցի մաթեմատիկայի դասընթացում (ինչպես պարտադիր ծրագրում, այնպես էլ արտադասարանական և ֆակուլտատիվ պարապմունքների թեմատիկայում)[1]:

Այդ նպատակով, ինչպես մեզ մոտ, այնպես էլ արտասահմանում կատարվում են մի շարք փորձարարական աշխատանքներ, որոնց արդյունքների վերլուծությունը հիմք է տալիս վստահ եզրակացնելու, որ մոտակա ժամանակներում կմշակվի անհրաժեշտ մեթոդիկա՝ գրաֆների տեսության տարրերի ներմուծման համար: Ըստ այդմ՝ յուրաքանչյուր այդպիսի խնդրի (պրոբլեմի) լուծում պետք է լինի հետևյալ հիմնական հարցերի պատասխանը.

1. *Ի՞նչը ներմուծել (ներմուծվող նյութի բովանդակությունը և ծավալը):*
2. *Ինչո՞ւ ներմուծել (տվյալ ներմուծման նպատակը):*
3. *Որտե՞ղ ներմուծել (որ դասարանում, որ թեմայից հետո ներմուծել):*
4. *Ինչպե՞ս ներմուծել (ուսուցման մեթոդը):*

Գրաֆների տեսության հիմնադիրը հայտնի շվեյցարացի մաթեմատիկոս Լեոնարդ Էյլերն [2] (1707 – 1783թթ.) է: Էյլերը 1736թվականին առաջադրեց և լուծեց Քյոնիգսբերգ քաղաքի 7 կամուրջների խնդիրը, որի լուծման ժամանակ կատարվեցին մի շարք լուրջ և հիմնարար հայտնագործություններ, որոնք հիմք հանդիսացան գրաֆների տեսության հիմնադրմանը: Խնդիրն ունի բացասական պատասխան, այսինքն՝ խնդրի պահանջը կատարել հնարավոր չէ:

Էյլերի այս հայտնագործությունից հետո ավելի քան 100 տարի գրաֆների տեսության վերաբերյալ համարյա ոչ մի լուրջ աշխատանք չկատարվեց: Միայն 1850թ. անգլիացի մաթեմատիկոս Մորգանը առաջադրեց մի դժվար խնդիր, որը մինչև օրս էլ չի լուծված և պատմության մեջ հայտնի է որպես «4 գույների պրոբլեմ»[3]: Խնդիրն այն է, թե հնարավոր է արդյոք յուրաքանչյուր աշխարհագրական քարտեզ ներկել 4 գույնով այնպես, որ ցանկացած երկու սահմանակից պետություններ ներկված լինեն տարբեր գույներով: Ապացուցված է, որ եթե աշխարհագրական քարտեզը բաղկացած լինի 42 պետություններից, ապա խնդրի լուծումն ունի դրական պատասխան, իսկ կամայական թվով պետությունների դեպքում՝ մնում է չլուծված: Այս խնդրի լուծման փորձերի ընթացքում հանդեսեկան բազմաթիվ նոր խնդիրներ (օրինակ՝2, 3 և 5 գույների խնդիրը և այլն), որոնք ունեցան պրակտիկ նշանակություն, և որոնց լուծումները հարստացրին այս տեսությունը: Գրաֆը կամայական բնույթի օբյեկտների բազմության և նրանց զույգերի միջև եղած որոշակի հարաբերությունների կապերի համախումբն է[5]:

---

* Հոդվածն ընդունվել է 11.11.2015:
Հոդվածը տպագրության է երաշխավորել ՍՄՀ մաթեմատիկայի ամբիոնը:

G գրաֆը կոչվում է հարթ, եթե այն կարելի է այնպես պատկերել հարթության վրա, որ ցանկացած կող չունենա ինքնահատում և ցանկացած երկու կողեր չունենան ընդհանուր կետեր, բացի գագաթներից[4]:

Ամեն մի հարթ գրաֆ, որի յուրաքանչյուր գագաթի աստիճանը զույգ է, կարելի է ներկել երկու գույնով: Ապացույցը կատարվում է մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով:

Ամեն մի քարտեզ, որի յուրաքանչյուր տիրույթը սահմանակից է զույգ թվով տիրույթների, կարելի է ներկել երեք գույնով:

Ամեն մի հարթ գրաֆ կարելի է ներկել հինգ գույնով:

«Գրաֆ» եզրույթն առաջին անգամ ներմուծվել է հունգար մաթեմատիկոս Դենեշ Քյոնիգի կողմից: Մինչև 1936 թվականը՝ տարբեր բնագավառներում օգտագործել են տարբեր անվանումներ: Օրինակ՝ հոգեբանության մեջ կոչվել են «սոցիոգրամներ», տնտեսագիտության մեջ՝ «դիագրամներ», ֆիզիկայում՝ «շղթաներ», տոպոլոգիայում՝ «սիմպլեքսներ» և այլն:

1936թ. Քյոնիգը աշխարհում առաջին անգամ հրատարակեց գրաֆների տեսության վերաբերյալ գիրքը՝ «Վերջավոր և անվերջ գրաֆների տեսություն» վերնագրով: Այս գրքում Քյոնիգը նշված բոլոր տերմինները փոխարինեց մեկ ընդհանուր՝ «գրաֆ» եզրույթով[9]:

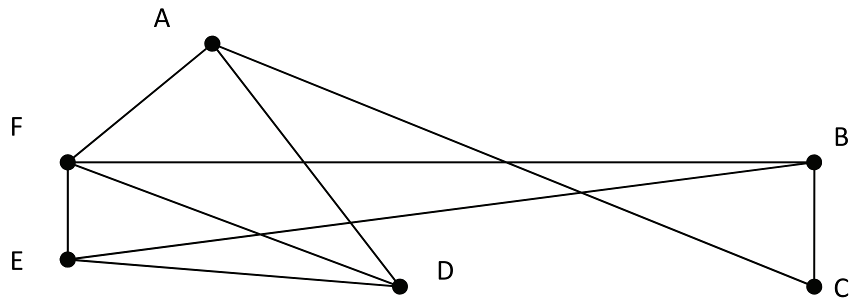
Գրաֆի սահմանումից երևում է, որ բնության բազմաթիվ երևույթներ կարելի է ներկայացնել գրաֆների տեսքով:

Այժմ տեսնենք, թե ինչպես կարելի է սպորտային մրցումները[6] ներկայացնել գրաֆի տեսքով: Ենթադրենք մրցամարտին մասնակցում են վեց ֆուտբոլային թիմեր, որոնք համապատասխանաբար նշանակենք A, B, C, D, E, F տառերով: Մրցամարտը սկսվելուց մի քանի շաբաթ հետո պարզվում է, որ մի քանի թիմեր մրցել են միմյանց հետ: Օրինակ՝

A-ն՝	*C-ի, D-ի, F-ի հետ,*
B-ն՝	*C-ի, E-ի, F-ի հետ,*
C-ն՝	*A-ի, B-ի հետ,*
D-ն՝	*A-ի, E-ի, F-ի հետ,*
E -ն՝	*B -ի, D -ի, F-ի հետ,*
F-ն՝	*A-ի, B-ի, D-ի, E-ի հետ:*

Այս բոլորը կարելի է ներկայացնել երկրաչափական սխեմայի միջոցով: Յուրաքանչյուր թիմ ներկայացնենք կետի կամ փոքրիկ շրջանակի տեսքով և հատվածով միացնենք այն կետերի զույգերը, որոնց համապատասխան թիմերը խաղացել են միմյանց հետ:

Այդ դեպքում անցկացրած խաղերի համար տված գրության փոխարեն կունենաք հետևյալ սխեման կամ գրաֆը՝



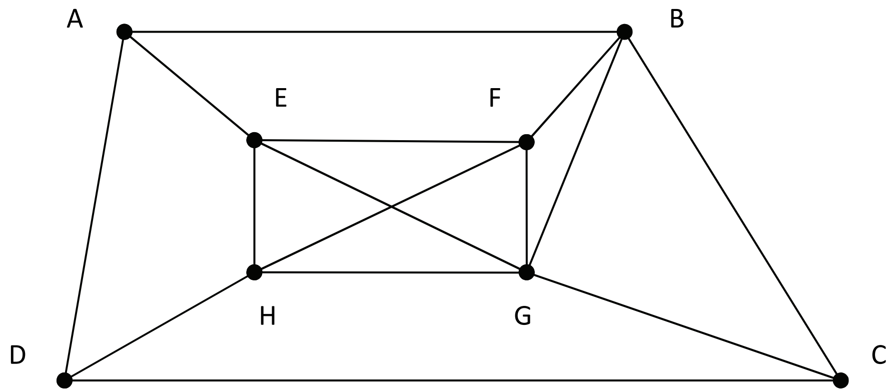
Գծ.1

Այս սխեման կոչվում է գրաֆ:

Այս գրաֆը կազմված է A, B, C, D, E, F կետերից, որոնք կոչվում են գագաթներ և մի քանի գծերի հատվածներից, որոնք միացնում են իրար հետ որոշ գագաթներ AC-ն - կամ EB-ն և այլն: Այս գծերի հատվածները կոչվում են գրաֆի կողմեր կամ կողեր:

Գծ. 1-ից երևում է, որ գրաֆի մի քանի կողերի հատման կետերը չեն կարող համարվել նրա համար գագաթներ: Եվ դա այն պատճառով, որ մենք մեր գրաֆը պատկերել ենք հարթության վրա, այլ ոչ թե տարածության մեջ:

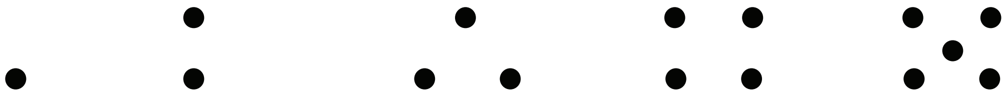
Այսպիսով՝ վերջավոր խաղերով ցանկացած առաջնություն կարելի է ներկայացնել համապատասխան գրաֆի միջոցով: Հակառակը նս ճիշտ է: Եթե տրված է ինչ որ գրաֆ՝ կազմված կետերից, այսինքն՝ գագաթներից, և այդ կետերը միացնող գծի հատվածներից, այսինքն՝ կողերից, ապա այն կարելի է դիտարկել այսպիսի սխեմայով: Որպես օրինակ՝ դիտարկենք գծ. 2-ում պատկերված գրաֆը.



Գծ.2

Սա կարելի է պատկերացնել որպես մի առաջնության գրաֆ, որին մասնակցել են ութ թիմ, որտեղ A -ն արդեն խաղացել է B, E, D թիմերի հետ, B-ն խաղացել է A, F, G, C – թիմերի հետ և այլն:

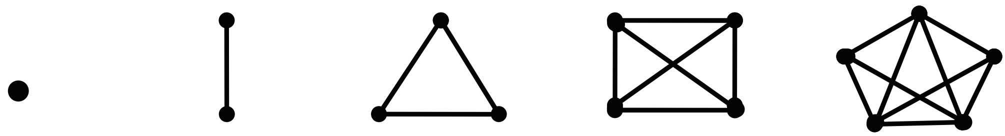
Գոյություն ունեն մի քանի հատուկ գրաֆներ, որոնք հանդիպում են գրաֆների տեսության շատ օրինակներում: Նորից դիտարկենք սպորտային մրցումներին[6] վերաբերվող գրաֆները: Մինչև մրցումները սկսվելը՝ դեռևս ոչ մի խաղ չի անցկացվել, այսինքն՝ համապատասխան գրաֆը ոչ մի կող չունի: Այդպիսի գրաֆը կազմված է միայն մեկուսացված կետերից՝ գագաթներից, այսինքն՝ գագաթները միացնող ոչ մի կող չկա: Այդպիսի գրաֆներն անվանում են զրոյական գրաֆներ: Բերենք այդպիսի գրաֆներ այն դեպքերի համար, երբ թիմերի թիվը հավասար են՝ 1, 2, 3, 4 և 5:



1 2 3 4 5

Դիտենք հետևյալ մասնավոր դեպքը:

Ենթադրենք, որ մրցումների վերջում յուրաքանչյուր թիմ խաղացել է մնացած թիմերից յուրաքանչյուրի հետ մեկ անգամ: Այդ դեպքում համապատասխան գրաֆում գագաթների յուրաքանչյուր զույգ պետք է միացնել կողով: Այդպիսի գրաֆը կոչվում է լրիվ գրաֆ:



1 2 3 4 5

Հեշտությամբ կարելի է ցույց տալ, որ n գագաթանի U_n լրիվ գրաֆի կողերի թիվը հավասար է $\frac{n(n-1)}{2}$ –ի:

<u>Թեորեմ</u> - Ամեն մի G (X, U) սովորական գրաֆի մեջ կենտ աստիճանի գագաթների թիվը զույգ է:

<u>Խնդիր</u> – Հնարավոր է արդյո՞ք 77 հեռախոսներ իրար միացնել այնպես, որ յուրաքանչյուրը միացվի ուղիղ 5 հեռախոսի հետ:

Ենթադրենք, թե հնարավոր է: Հաշվենք հեռախոսային գծերի (գրաֆի կողերի) թվի կրկնապատիկը՝ 2P = 77 · 5 = 385: Ստացանք հակասություն, որ զույգ թիվը հավասար է կենտ թվին: հակասությունը բխեց մեր սխալ ենթադրությունից: Հետևաբար, հնարավոր չէ 77 հեռախոսներ իրար միացնել այնպես, որ յուրաքանչյուրը միացված լինի ուղիղ 5 հեռախոսի:

<u>Թեորեմ</u> - Եթե G գրաֆը կազմված է K հատ կապակցված բաղադրիչներից (ենթագրաֆներից), ապա այդպիսի գրաֆի կողերի առավելագույն թիվը՝ $P_{max}=\frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$, որտեղ n-ը G գրաֆի գագաթների թիվն է, |x| = n, |u|= P

<u>Խնդիր</u> – I, II և III կարգային 42 շախմատիստների միջև պետք է անցկացնել մրցություն: Մրցելու են նույն կարգի շախմատիստներն իրար հետ, յուրաքանչյուր զույգ կարող է խաղալ առավելագույնը մեկ անգամ: Յուրաքանչյուր կարգից քանի՞ շախմատիստ էին մասնակցում, եթե՝

1) *խաղերի թիվը առավելագույնն է,*
2) *խաղերի թիվը նվազագույնն է:*

<u>Լուծում</u> - 1). Ըստ թեորեմի՝ $P_{max}=\frac{40\cdot 39}{2}$ = 780 խաղ:

Սա կլինի այն դեպքում, եթե ունենանք հետևյալ թվով խաղացողներ՝

	I կարգ	II կարգ	III կարգ
ա)	1 հոգի	1 հոգի	40 հոգի
բ)	1 հոգի	40 հոգի	1 հոգի
գ)	40 հոգի	1 հոգի	1 հոգի

2). Խաղերի թիվը նվազագույնը կլինի, եթե յուրաքանչյուր խմբում լինի $\frac{42}{3}$ = 14 խաղացող:

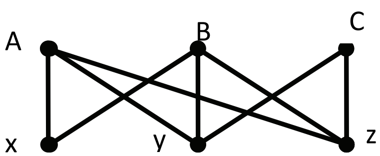
I կարգ	II կարգ	III կարգ
14 հոգի	14 հոգի	14 հոգի

Այն գրաֆը, որը հնարավոր է հարթության կամ սֆերայի վրա պատկերել կամ գծագրել այնպես, որ նրա կողերը, բացի գրաֆի գագաթներից, ուրիշ հատման կետեր չունենան, կոչվում է հարթ գրաֆ:

Օրինակ՝ Հարթ գրաֆ է, քանի որ հնարավոր է պատկերել հետևյալ ձևով՝

Այստեղ հարմար է բերել «Երեք շենքեր և երեք աղբյուրներ» խնդիրը: Մի հողամասում կառուցված է եղել երեք շենք և երեք աղբյուր այդ շենքերի բնակիչների համար, ընդ որում այդ երեք աղբյուրներից յուրաքանչյուրից էլ օգտվում են երեք շենքերի բնակիչները: Մի որոշ ժամանակ անց A, B և C շենքերի բնակիչները վիճում են իրար հետ և որոշում են շենքերից դեպի x, y և z աղբյուրները ճանապարհները գցել այնպես, որ աղբյուրները գնալուց և վերադառնալուց տարբեր շենքերի բնակիչներ միմյանց չհանդիպեն: Հնարավոր է արդյո՞ք այդ:

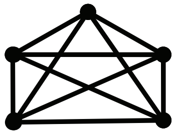
Փաստորեն այդ խնդիրը հանգում է հետևյալին: Հնարավոր է արդյո՞ք նշված իրավիճակը ներկայացնել հարթ գրաֆի տեսքով: Պարզվում է, որ այդ ներկայացումը հնարավոր չէ:



Սա կոչվում է $K_{3,3}$ տիպի գրաֆ:

Պարզվում է, որ այս գրաֆը հարթ չէ: Այսինքն՝ մեր խնդիրնունի բացասական պատասխան:

Ոչ հարթ գրաֆ է նաև K_5 տիպի գրաֆը:



Առանց ապացույցի՝ ներմուծենք հետևյալ թեորեմը.

Պոնտրյագին – Կուրատովսկու թեորեմը – Որպեսզի G (x, u) գրաֆը լինի հարթ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նա չունենա $K_{3,3}$ և K_5 տիպի ենթագրաֆներ:

Գրաֆների տեսության ենթաբաժիններից են՝ իզոմորֆ գրաֆներ, շղթա և ցիկլ, Համիլտոնյան ցիկլ, ծառ և անտառ, գծային օրենտացված գրաֆներ և այլն:

ԾԱՆՈԹԱԳՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

1) Берж К., Теория графов и ее применения, Пер. с франц., М., ИЛ, 1962, стр. 11,15:
2) Емеличев В.А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р.И., Лекции по теории графов, М., Наука, 1990, стр.3-5:
3) Зыков А.А., Основы теории графов, М., Наука, 1987, стр.12:
4) Оре О., Теория графов, Пер. с англ. М., Наука, 1980, стр.14:
5) Гладких О.Б., Белых О.Н, Основные понятия теории графов (учебное пособие), Елец. ЕГУ им. И.А.Бунина, 2008, стр. 9-15, 23-24, 25-28:
6) Харари Ф., Теория графов, Пер. с англ. М., Мир, 1973, стр.7-10:
7) Կարապետյան Ի.Ա., Գրաֆների տեսություն (մեթոդական ցուցումներ), Եր., ՀՊՃՀ, 2006, էջ 6:
8) Հակոբյան Հ.Ց., Գրաֆների տեսության ներածություն (մեթոդական ցուցումներ), Եր., ԵՊՀ, 1982, էջ 8-13:
9) Պետրոսյան Պ.Ա., Մկրտչյան Վ.Վ., Քամալյան Ռ.Ռ., Գրաֆների տեսություն (ուսումնամեթոդական ձեռնարկ), Եր., ԵՊՀ, 2015, էջ 151-160:

ԱՄՓՈՓԱԳԻՐ

Գրաֆների տեսության տարրերի ներմուծումը միջնակարգ դպրոցի մաթեմատիկայի դասընթացում

Սլավիկ Թադևոսյան

Հոդվածում ներկայացված է կրթության արդիականացմանն ուղղված ուսուցման ժամանակակից տեխնոլոգիաներց մեկի՝ գրաֆների տեսության ներմուծման առավելությունն ու հնարավորությունները միջնակարգ դպրոցի մաթեմատիկայի դասընթացում: Ըստ այդմ՝ ավելի հետաքրքիր, նպատակային և արդյունավետ կկազմակերպվի դասընթացը, և ավելի մեծ կլինեն բարձր դասարանցիների բազմաբնույթ մտածողության զարգացման հնարավորությունները:

РЕЗЮМЕ

Включение элементов теории графов в курс математики в средней школе

Славик Тадевосян

Ключевые слова: *теория графов, плоский граф, конечные и бесконечные графы, ребра и вершины графов, нулевые графы, полный граф, подграфы.*

В статье представлена одна из современных технологий обучения, направленная на актуализацию образования, а именно: преимущества и возможности включения теории графов в курс математики в средней школе. Как следствие курс станет более продуктивным, целевым и интересным, а также позволит расширить возможности развития разностороннего мышления старшекурсников.

SUMMARY

The inclusion of elements of graph theory in mathematics course in high school

Slavik Tadevosyan

Keywords: *graph theory, planar graph, finite and infinite graphs, edges and vertices of graphs, null graphs, complete graph, subgraphs*.

This article presents one of the modern teaching technologies aimed at actualization of education, namely the benefits and the possibility of including graph theory in mathematics course in high school. As a consequence, the course will be more productive, purposeful and interesting, and will increase the capacity of undergraduates' versatile thinking.