

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ КАТЕГОРИЙ, ЛЕЖАЩИЕ В ОСНОВЕ ИССЛЕДОВАНИЙ ОБЩЕСТВЕННЫХ И ПОЛИТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Ашот Рамзесович Тевикян

Доцент кафедры «Информационные технологии» ЕФ РЭУ
им. Г.В. Плеханова, кандидат экономических наук

Гамлет Бабкенович Вирабян

Заведующий кафедрой «Информационные технологии» ЕФ РЭУ
им. Г.В. Плеханова, кандидат технических наук

Рост на инновации в стратегическом управлении и мышлении, проблема сложности изучаемой социальной и экономической среды, спрос на математическую строгость для представления (моделирования) социальных, экономических, политических, военных процессов требуют принципиально нового подхода в применяемом математическом языке.

В основе нынешнего, применяемого в исследовательской практике социальных и экономических наук математического языка лежит теория множеств, которая была принята в качестве проекта переустройства всей математики. Она предоставила математике подходящий “язык” для формулировки и доказательства ее теорем. Подобный подход сформировался на рубеже XIX - XX в., когда в математике происходили драматические события, которые можно охарактеризовать как кризис роста. Однако, сама теория множеств вскоре столкнулась со своим собственным кризисом оснований¹, который так и остался до конца не разрешенным.

Однако, очевидно, что математика и научные направления, использующие математический язык становятся все более сложными и более абстрактными, и это есть неизбежное следствие прогресса науки. И перед современным математическим сообществом стоит во весь рост сложная проблема - сформировать по возможности новые, ясные общие основания, которые способствовали бы дальнейшему прогрессу как ее самой, так научных направлений, использующих этот язык. Поиск новых оснований представляется как необходимое (хотя и очевидно недостаточное) условие для дальнейшего прогресса.

1. Основания

Многое говорит в пользу того, что математика обладает присущей ей одной «внутренней таинственной силой». Есть нечто непознанное во внешнем мире, которая позволяющее математической теории согласовывать свои разработки с

¹ Френкель И., Бар-Хиллел А.А. Основания теории множеств, М., 1966, с. 556.

рациональным выражением реального мира. Философское (формализм, логика, интуиционизм) объяснение этому надо искать в возможных соотношениях между математикой и реальным миром. И более всего, с позиции аристотелевского реализма, этот вопрос получает рациональное решение, когда явным образом определяются основы математики в соотношении их понятий с эмпирической реальностью¹, объединяя этим математику с естественными, социальными науками.

Математические построения и применяемая символика, являясь инструментальными образами математических понятий, становятся либо формальными, либо естественными отображениями (выражающие признаки) реальных структур и их свойств². В конкретных приложениях основная идея заключается в проверке того, можно ли эти конструкции действительно найти во внешнем мире. Это очевидное требование, когда мы имеем дело с реальным миром и хотим применить эти разработки к анализу естественных или социальных наук.

Однако, необходимо различать используемые конструкции и данные для обоснования теоретических положений и получаемых практических результатов в естественных и социальных науках. В первом это делать несколько проще, поскольку в случае социальных наук есть определенная сложность, усугубляемая свободой человеческого выбора, что делает применяемые для них формализации нерегулярными (несистематичными), а сами предсказания (особенно их получение) становятся очень сложными. Мы должны довольствоваться тем что имея дело с объектами/предметами с неопределенными предпосылками, в которых мы добиваемся успеха в представлении истинных схем, когда наши субъекты и наши предпосылки являясь просто общими, мы, основываясь на них приходим к общепринятым выводам. Наука не должна требовать больше того, к чему она может апеллировать, с учетом ее возможностей. Это ограничение не является постыдным, поскольку оно происходит не из-за слабости науки, но из-за изучаемого предмета: ведь материал поведения нерегулярен (несистематичен).

И в начале XX века теория множеств действительно стала той основой, которая способствовала такой организации математики, которая послужила ее широкому применению в естественных, социальных и общественных науках.

Однако серьезным недостатком такой организации стало то, что понятие множества (в той специфической форме, в которой это базовое понятие описывается данной теорией) оказалось либо вовсе не связанным с базовыми

¹ **Kline M.** Mathematics and the search for knowledge, Oxford and New York: Oxford University Press, 1985.

² **Franklin J.** Aristotelian realism. In A. Irvine (Ed.), Philosophy of mathematics, volume 4 in D. Gabbay, P. Thagard and J. Woods (series eds.), Handbook of the philosophy of science, Amsterdam: Elsevier, 2009.

понятиями современных наук (например, социальных), использующих этот язык, либо связанным с ними неудовлетворительным образом.

Разумеется, использование математиками теоретико-множественных оснований (или в более мягкой форме - “теоретико-множественного языка”) не является непреодолимым препятствием для любого сотрудничества между социальными, точными науками, с одной стороны, и математиками, с другой. Однако теоретико-множественные основания математики, по меньшей мере, уже не способствуют такому сотрудничеству. Если и можно говорить о том, что теория множеств решила проблему оснований математики в XX в. (что, впрочем, вызывает многочисленные возражения как математиков, так и философов), она в любом случае оставила полностью открытой проблему математических оснований для социальных наук, или даже сделала эту проблему еще более острой.

Как нам представляется, не-продуктивно отстраненное наблюдение за возникающие вопросы по вышеназванным научным направлениям, в основе которого лежат проблемы, связанные с математическими основаниями. Оно не только не способствует быстрому успеху, но и ставит принципиальные барьеры на пути дальнейшего прогресса научных дисциплин с использованием математического языка. Надо принять во внимание тот факт, что математическое познание, идя путем восприятия новых закономерностей и универсалий, вводит в научный оборот новые прикладные математические направления, расширяя этим исследовательский диапазон математики.

Исследовательская практика последних десятилетий все настоятельнее ставит вопрос выбора иного набора правил, чем множественная аксиоматика Георга Кантора. Это означает, что и строгость, применяемая при решении практических задач, неизбежно будет отличаться от строгости в аксиоматической системе. Все более разумной становится идея рассмотрения новых оснований, как необходимое условие дальнейшего научного прогресса. Представим мнение известного эксперта Елены Лариной о роли математики¹: “В последнее время выяснилось, что при всем своем могуществе, математика не в силах справиться с наиболее острыми и актуальными вызовами современности. ... отмеченное выше не означает, что формальные методы в принципе бессильны в анализе и прогнозировании развивающихся систем. Общее направление движения показывают такие концепты, как теория категорий и функторов, унивалентные основания математики, общая формальная теория...”. В чем то можно согласиться с высказанным мнением, по некоторым положениям можно дискутировать. Более

¹ Руководство по работе с развивающимися системами, <http://hrazvedka.ru/handbook/rukovodstvo-po-rabote-s-razvivayushhimisya-sistemami.html>, Александрова Б.И. «Теория систем и системное моделирование».

интересным представляется последнее предложение относительно “теории категорий и функторов”, которая может стать новым основанием.

2. Теория категорий и ее приложения для изучения социальной среды

Имеются альтернативные и более удобные способы представления математических идей, в основе которых лежит теория категорий. Существует широкий консенсус среди чистых и прикладных математиков о том, что «теория категорий заняла центральное место в современной математике и теоретической информатике, а также применяется к математической физике... Категория - это альтернатива теории множеств как основа для математики»¹. В последние годы в этой сфере произошел взрыв интереса, который привел к открытию новых связей и синергии между областями науки.

Теория категорий - это универсальная область математики, в основе которой



лежит базовый (общий) язык, описывающий структуры, возникающие в разных контекстах. Это делает теорию категорий мощным инструментом для приложений, позволяя ей изучать сложные объекты вместе с отображениями их друг в друга.

Приводимый график наглядно свидетельствует о том, как фраза “теория категорий” использовалась в книгах примерно с 1950 года по настоящее время².

Теория категорий была предложена в 40-х годах прошлого века американскими математиками МакЛейном и Эйленбергом в качестве полезного “языка” для алгебраической топологии³. Топология интересуется свойствами геометрических объектов, которые не меняются при обратимых непрерывных преобразованиях. Категория топологических пространств состоит из всех

¹ Marquis J.-P. Category theory. In E. Zalta (Ed.), The Stanford encyclopedia of philosophy (Winter 2015 Edition), 2015, <http://plato.stanford.edu/archives/win2015/entries/category-theory/>.

² Robb Seaton Why Category Theory Matters, <http://rs.io/why-category-theory-matters/>.

³ Eilenberg S., MacLane S. A general theory of natural equivalences // Trans. Amer. Math. Soc., 58 (1945), pp. 231-294.

топологических пространств и всех непрерывных преобразований этих пространств друг в друга и самих в себя. Преимуществом категорного подхода является то, что преобразования топологических пространств включены в эту конструкцию на равных с самими пространствами.

“Категорную философию” можно кратко сформулировать следующим образом: любой данный тип объектов нужно рассматривать вместе с преобразованиями объектов¹.

Теория категорий - это, по сути, изучение математической структуры. Это исследование объектов и их сопоставление, преобразования (морфизм (или стрелки)) этих объектов. Объекты можно рассматривать как множества, а стрелки как функции, хотя они не ограничиваются этой интерпретацией.

Как пишет Сандерс МакЛейн²: “Столь широкие обобщения в основном бывают проявлением дерзости и стремления к спекулятивному абстрагированию, которое в данном случае подкреплялось удовольствием от похищения терминов у философов: “категория” заимствована у Аристотеля и Канта, “функтор” — у Карнапа (*Logische Syntax der Sprache*), а “естественное преобразование” — из тогдашней повседневной речи. ... В дальнейшем применение категорий расширилось, и вопрос надежного обоснования вышел на первый план”.

Широкая применимость и выразительность языка теории категорий подводит к мысли, что большинство структур в математике лучше всего понимаются, если к ним применить теоретические конструкции категорной абстракции. Общие методы, которые имеют широкое применение, обычно не накладываются на сложные проблемы. Для этого, естественно, применяются специализированные инструменты исследования. Точно так же теория категорий, которая является скорее инструментом для выяснения связей между математическими структурами, чем для решения конкретных задач. В отличие от традиционных основ, которые гораздо больше интересуются природой математических объектов, теория категорий фокусируется на отношениях между ними.

В этом отношении теория категорий подобна теории множеств. В тоже время теория категорий имеет преимущество перед теорией множеств в том, что она является менее искусственной конструкцией, учитывая, что она непосредственно связана с работой в алгебраической топологии.

Таким образом, любая категория может быть описана морфизмами между ее объектами. Хотя это может показаться простым переписыванием традиционной

¹ **Родин А.В.** Теория категорий и поиски новых математических оснований физики // Вопросы философии, М., 2010, № 7, сс. 67-82.

² **Маклейн С.** Категории для работающего математика / Перевод с англ. под ред. В.А. Артамонова, М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004, с. 352.

формы математики, ее реальная сила возникает, когда разные категории связаны через функторы, которые действуют как над объектами, так и между морфизмами. Более того, этот способ связывания математических построений может быть продолжен, установливая для этого другие виды отношений. Понижение роли Бурбаки¹ можно рассматривать как следствие успеха теории категорий. Но, «по иронии судьбы, бурбакистское видение единой математики нашло мощное продолжение в теории категорий. Общетеоретические концепции широко используются во многих различных математических областях; на самом деле очень жесткое разделение математики на разделы было поставлено под вопрос»².

Первоначально развиваясь как ветвь математики, теория категорий стала успешно применяться в других областях знания, как инструмент систематизации и унификации, например, в информатике, биологии, квантовой физике, языкознании и др. Теория категорий - отличный источник объединяющих понятий и принципов организации. Это преимущество всей абстракции - отбросив детали, раскрывается структура объекта.

Основной чертой является его способность связывать разрозненные поля, создавая своего рода скелет, чтобы на нем «повесить» другие знания. Так, Майк Бэйн и Джон Баэз пишут об этом в своей «Физике, топологии, логике и вычислениях: Розеттский камень»³, где они, используя теоретическую конструкцию категории, указывают на сходства физики, топологии, логики и теории вычислений.

Перспективным приложением теории категорий, на наш взгляд, является ее применение в области экономики.

Подобная возможность предоставляется, если мы будем исходить из предположения, что связанное с экономическими исследованиями изменение образа привело к тому, что экономика, задуманная как исследование систем сил (system-of-forces (SOF)), будет рассматриваться как система отношений (system-of-relations (SOR))⁴. Где под SOF мы будем представлять экономику, как научную дисциплину, основной темой изучения которой является анализ экономических процессов,

¹ **Никола́ Бурбаки́** (фр. *Nicolas Bourbaki*) — коллективный псевдоним группы французских математиков (позднее в неё вошли несколько иностранцев), созданной в 1935 году. Целью группы является написание серии книг, отражающих современное состояние математики. Книги Бурбаки написаны в строгой аксиоматической манере и дают замкнутое изложение математики на основе теории множеств Цермело-Френкеля.

² **Etingof P., Golberg O., Hensel S., Liu T., Schwendner A., Vaintrob D., et al.** (2011). Introduction to representation theory. Providence, RI: American Mathematical Society, p. 198.

³ **Mike Stay and John Baez** Physics, Topology, Logic and Computation: a Rosetta Stone, 2009, <http://math.ucr.edu/home/baez/rosetta.pdf>.

⁴ **Giocoli N.** Modeling rational agents. Elgar: Cheltenham and Northampton, 2003, pp. 4-6.

создаваемых рыночными и нерыночными силами, в том числе - но отнюдь не исключительно - ведущих систему к равновесию. В соответствии с взглядом SOR, основной темой исследования в экономике становится вопрос существования и свойств экономических равновесий с точки зрения валидации (внутренний процесс управления характером/свойством, обеспечивающий согласие с правилами) и взаимной согласованности заданных формальных условий, который, к сожалению, не раскрывает о значимость экономических равновесий для анализа реальных экономических систем.

Очевидно, что такой подход представляет несколько искусственное разделение для изучения экономической науки. Естественно появятся новые подходы, которые, скажем, возможно более обоснованно подведут основание для применения теории категорий. В обоснование предлагаемого способа, можно сказать, что наблюдается параллелизм между “образами” SOF и SOR, и “сдвигом образа/основания” в математике, в том числе и относительно понятия строгости. Подобный “сдвиг” в понятиях не означает, что интерес к экономическим приложениям утрачен, и формальная тенденция стала преобладать еще больше.

Концептуальные преимущества для экономики, в основе которой по результатам такого “сдвига” лежит категориальный формализм, многообразны. С одной стороны, теория категорий меняет фокус с объектов на морфизмы. Это можно интерпретировать как движение в сторону SOR, в противоположность подходу Дебре и его бурбакской позиции. Надо понять, что “категорная концепция” фокусируясь на морфизмах освобождает экономические модели от акцентирования на равновесиях, которые в свою очередь становятся объектами изучения. Реляционный аспект морфизмов позволяет выявлять различные подходы в одной и той же структуре.

В отличие от бурбакского подхода, который требует, чтобы каждая сущность была определена в терминах более простых понятий, теория категорий поддерживает “синтетический” подход, в котором объекты представляются без углубления в их внутреннюю структуру, просто благодаря взаимодействию с другими объектами¹.

В условиях высокого запроса на экономические реформы, подобные исследования актуальны. В этих условиях можно обсуждать различные варианты развития событий и предлагать свои стратегии. Как отмечает академик РАН Сергей Глазьев²: “Весь мир в ситуации структурной перестройки, внедрения нового технологического уклада снижает цену денег. ... как раз у денежных

¹ Rodin A. Axiomatic method and category theory, Berlin: Springer, 2014, p. 337.

² Интервью данное С. Глазьевым, 4 Апреля 2018. tsargrad.tv/articles/sergej-glazev-u-nashih-denezhnyh-fetishistov-v-golove-tolko-jekonomicheskoe-ravnovesie_123073.

фетишистов в голове экономическое равновесие, они вокруг денег танцуют, и равновесие происходит тогда, видимо, когда все деньги будут в руках небольшой группы финансовой олигархии, которая сидит, паразитирует на государственной банковской системе”.

Это радикальный отход от типичных методов, принятых в математической экономике. Он предполагает сформировать сеть отношений в реальном мире, которая позволит экономистам включить, представляющую для него интерес соответствующую сущность и концепцию. Это очень естественное воплощение на практике аристотелевской концепции: предполагая, что “реальность захвачена” в данных структуры (даже в форме общепринятых частей знания), основная математическая форма деятельности экономиста будет заключаться только в установлении связей между ними. Это обеспечивает дополнительный “бонус”, естественный выбор для реальной интерпретации экономики, становясь простой основой для анализа данных.

И экономика медленно принимает эту новую структуру. Это еще более удивительно, учитывая широко распространенное мнение, высказанное Полом Самуэльсоном о том, что математика для экономики - это просто язык¹.

Есть много интересных последствий по результатам решения этих проблем. С точки зрения теории, это приближает экономику к некоторым областям информатики и физики². Например, мы изучаем транзакции в распределенных виртуальных «обществах», или обсуждаем обмен в квантовых структурах, отмечая его сходство с “преднамеренными действиями”. С практической стороны вышеупомянутые исследования дают нам возможность для разработки эффективных методов для принятия решений и выбора моделей экономического взаимодействия.

Теория категорий позволяет охватить концепцию циклически развивающихся экономических систем в виде последовательных трансформаций предметно-смысловых областей, представленных соответствующими функторами³. Естественные трансформации, являющиеся центральными понятиями теории категорий и внутренне присущие экономическим процессам, гарантируют целостность циклического процесса, которая сохраняется на каждом этапе трансформации.

¹ **Samuelson P.** Economic theory and mathematics: An appraisal, *American Economic Review* (Vol.42), Papers and Proceedings of the Sixty-fourth Annual Meeting of the American Economic Association, 1952, pp. 56–66.

² **Shoham Y. & Leyton-Brown K.** Multiagent systems: Algorithmic, game-theoretic, and logical foundations, New York: Cambridge University Press, 2009, p. 514.

³ **Зеликин Н.В.** Теория категорий как понятийный аппарат для исследования ряда задач экономики, 2017, <http://www.mce.su/rus/archive/abstracts/mce24/sect57225/doc282550/>.

Важно подчеркнуть, что в настоящем подходе рассматриваются не только объекты и связи в пределах каждой области, но и полная система трансформаций, превращающих экономику производства в единый целостный процесс.

С высокой долей уверенности можно утверждать, что, включая вышеупомянутые подходы и методы, их компоненты в аналитические исследования, появится возможность получить общий обзор/взгляд на экономические явления, в которых предполагаемые тесные отношения с имеющимися данными будут адекватны отношениям, присущим к реалиям, циркулирующим в общественной жизни. Совершенно очевидно, что теория категорий дает эффективные инструменты для решения этой задачи.

В заключение предложим на перспективу изучить взаимосвязь теории категорий с теорией сложности, динамическим моделированием и прогнозированием, гибридными (композицией) системно-динамическими моделями, системным мышлением, прогнозированием и управлением.

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ КАТЕГОРИЙ ЛЕЖАЩИЕ В ОСНОВЕ ИССЛЕДОВАНИЙ ОБЩЕСТВЕННЫХ И ПОЛИТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Ашот Рамзесович Тевикян

Доцент кафедры «Информационные технологии» ЕФ РЭУ
им. Г.В. Плеханова, кандидат экономических наук

Гамлет Бабкенович Вирабян

Заведующий кафедрой «Информационные технологии» ЕФ РЭУ
им. Г.В. Плеханова, кандидат технических наук

Аннотация

Растущий спрос на математическую строгость в экономике, развернувшиеся инновации в стратегическом управлении требуют принципиально нового подхода в применяемом математическом языке для представления (моделирования) социальных, экономических, политических, военных процессов.

В статье исследуется подход, основанный на математической теории категорий. Теория категорий меняет фокус исследователя с объектов на морфизмы (преобразования). Основным инструментом исследования является сама структура, когда представленная в ней информация (содержание) становится значимой по причине внутренних и внешних связей, и объекты, которые рассматриваются без углубления во внутреннюю структуру, с позиции взаимодействия с другими объектами. Это радикальный отход от типичных

методов в математизации экономики и социальных наук.

Ключевые слова: категории, аристотелевский реализм, экономика, морфизмы, системное мышление и управление, гибридные системно-динамические модели, реляционный (отношения) аспект морфизмов.

**ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԵԹՈՂՆԵՐԸ՝
ՀԱՍԱՐԱԿԱԿԱՆ-ՔԱՂԱՔԱԿԱՆ ԳՈՐԾՆԹԱՑՆԵՐԻ ՀԻՄՆԱՐԱՐ
ՀԵՏԱԶՈՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ**

Աշոտ Ռամզեսի Թևիկյան

Գ. Վ. Պլեխանովի անվան ՌՏՀ Երևանի մասնաճյուղի Ինֆորմացիոն տեխնոլոգիաների ամբիոնի դոցենտ, տնտեսագիտության թեկնածու

Համլետ Բաբկենի Վիրաբյան

Գ. Վ. Պլեխանովի անվան ՌՏՀ Երևանի մասնաճյուղի Ինֆորմացիոն տեխնոլոգիաների ամբիոնի վարիչ, տեխնիկական գիտությունների թեկնածու

Համառոտագիր

Տնտեսության մեջ մաթեմատիկական խստապահանջության աճող պահանջարկը, ռազմավարական կառավարման մեջ նորարարությունների ստեղծումը պահանջում է հիմնարար նոր մոտեցում կիրառական մաթեմատիկական լեզվով սոցիալական, տնտեսական, քաղաքական, ռազմական գործընթացների ներկայացման (մոդելավորման) համար:

Հոդվածում ուսումնասիրվում է մոտեցում, որը հիմնված է կատեգորիաների մաթեմատիկական տեսության վրա: Կարգի տեսությունը փոխում է հետազոտողի ուշադրությունը օբյեկտներից մինչև մորֆիզմներ (վերափոխումներ): Մորֆիզմների քննարկվող հարաբերական (հարաբերական) կողմը թույլ է տալիս ամրագրել տարբեր մոտեցումներ մի կառույցում, որն ինքնին դառնում է հիմնական հետազոտական գործիք, երբ ներկայացված տեղեկատվությունը (բովանդակությունը) նշանակալի է դառնում իրենց ներքին և արտաքին հարաբերությունների, և օբյեկտների, որոնք դիտարկվում են առանց ներքին կառուցվածքի խորացման, այլ օբյեկտների հետ փոխգործակցության տեսանկյունից: Սա ռադիկալ հեռացում է տնտեսության և սոցիալական գիտությունների մաթեմատիզացման բնորոշ մեթոդներից:

Հիմնաբառեր. Արիստոտելի ռեալիզմ, տնտեսագիտություն, մորֆիզմներ, համակարգային մտածողություն և կառավարում, հիբրիդային մոդելներ:

THE METHODS OF MATHEMATICAL THEORY OF CATEGORIES
UNDERLYING THE RESEARCHES ON SOCIAL AND
POLITICAL PROCESSES

Ashot Ramzes Tevikyan

Associate Professor of the Department of "Information Technology" of
YB Plekhanov Russian University of Economics, PhD in Economics

Hamlet Babken Virabyan

Head of the Department of "Information Technology" of
YB Plekhanov Russian University of Economics, PhD in technical sciences

Abstract

The growing demand for mathematical rigor in the economy, unfolding innovations in strategic management require a fundamentally new approach in the applied mathematical language to represent (model) social, economic, political, and military processes.

The article explores this approach based on the mathematical theory of categories. Theory of categories changes the focus of the researcher from objects to morphisms (*transformations*). The discussed relational (*relationship*) aspect of morphisms allows to fix different approaches in one structure. The structure itself becomes the main research tool when the information (*content*) presented in it becomes significant because of their internal and external relations, and objects that are viewed without deepening into the internal structure from the standpoint of interaction with other objects. This is a radical shift from typical methods in the mathematization of the economy and social sciences.

Keywords: categories, Aristotelian realism, economics, morphisms, system thinking and management, hybrid system dynamic models, relational (*relationship*) aspect of morphisms.