

**ИЗГИБ ДВУХ ОДИНАКОВЫХ БАЛОК НА УПРУГОЙ ШЕРОХОВАТОЙ ПОЛОСЕ
ЛИНЕЙНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПОПЕРЕЧНОЙ НАГРУЗКОЙ ПРИ НАЛИЧИИ
ОСЕВЫХ СЖИМАЮЩИХ СИЛ**

КУТУЗЯН НЕЛЛИ

*Кандидат физико-математических наук, доцент,
Проректор Гаварского государственного университета*

ШЕКЯН ЛАВРЕНТИЙ

*Член корреспондент инженерной Академии Армении,
доктор физико-математических наук, профессор
Преподаватель Гаварского государственного университета*

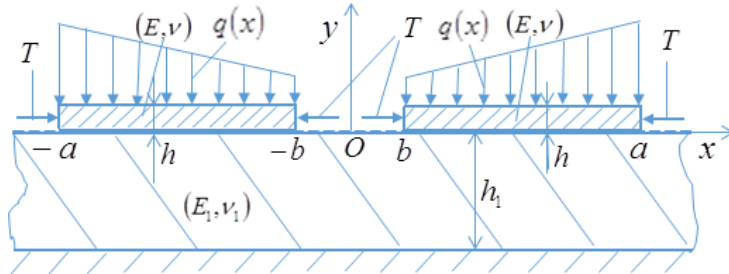
В рамках теории С. П. Тимошенко [1] обобщенной модели изгиба балок (цилиндрический изгиб длинных прямоугольных пластин), когда на прогибы балок влияют как поперечная нагрузка, так и действующие на ее срединные линии продольные силы, рассматривается плоская контактная задача теории упругости об изгибе на упругой шероховатой горизонтальной полосе двух одинаковых балок конечной длины, находящихся под действием распределенной по линейному закону поперечной нагрузки и осевых сжимающих сил. Нижняя грань полосы закреплена.

Задача сведена к решению нелинейного интегрального уравнения типа Гаммерштейна [2] при дополнительных условиях. Эффективное решение задачи получено по разработанной в [3] методике, основанной на теории нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна [2] и принципа сжимающих отображений [4]. Приведено приближенное аналитическое решение задачи.

1. Пусть две одинаковые упругие балки с толщиной h , с модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ν под действием линейно распределенных вертикальных сил интенсивности $q(x)$ [$q(-x) = q(x)$] и осевых горизонтальных сжимающих сил T изгибаясь вдавливаются в упругую бесконечную однородную полосу толщиной h_1 , с модулем упругости E_1 и

коэффициентом Пуассона ν_1 , нижняя горизонтальная грань которой $y = -h_1$ жестко закреплена (фиг.1).

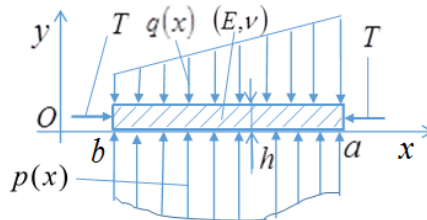
Требуется определить закон распределения контактных давлений $p(x)$ ($x \in [-a, -b] \cup [b, a]$, $0 < b < a$), действующих между полосой и балками, вертикальные перемещения $v(x)$ всех точек изогнутой оси балок, а также изгибающих моментов $M(x)$ и перерезающих сил $Q(x)$ во всех поперечных сечениях x ($x \in [-a, -b] \cup [b, a]$) балок.



Фиг. 1. Схема контакта балок и полосы.

Предполагается, что полоса и балки находятся в условиях плоской деформации с базовой плоскостью Oxy .

Дифференциальное уравнение изгиба правой балки поперечными силами $q(x)$ и $p(x)$, учитывая при этом влияние действующих вдоль срединной линии балок сжимающих сил T (фиг. 2), по теории С.П. Тимошенко ([1], стр.422, формула (217), $T = -N_x$, $w = v$, $N_y = N_{xy} = 0$) имеет вид



Фиг. 2. Схема упругого равновесия правой балки

$$D \frac{d^4 v}{dx^4} + T \frac{d^2 v}{dx^2} = p(x) - q(x), \quad (b < x < a) \quad (1)$$

где $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ – жесткость балок на изгиб. При этом функции $v(x)$, $M(x)$ и $Q(x)$ связаны между собой соотношениями

$$M(x) = D \frac{d^2 v}{dx^2}, \quad Q(x) = D \frac{d^3 v}{dx^3} \quad [x \in (b, a)]. \quad (2)$$

Уравнение (1) рассматривается при граничных условиях $M(b) = M(a) = 0$, или

$$\left(d^2v/dx^2\right)_{x=b} = \left(d^2v/dx^2\right)_{x=a} = 0, \quad (3)$$

указывающих на то, что в концевых точках $x=b$ и $x=a$ правой балки (а также левой балки) изгибающие моменты отсутствуют. При этом условия равновесия правой балки имеют вид

$$\int_b^a p(x)dx = \int_b^a q(x)dx = P, \quad \int_b^a xp(x)dx = \int_b^a xq(x)dx = M, \quad (4)$$

где P и M – соответственно величины главного вектора и относительно центра O главного момента действующих на правой балке распределённых нагрузок $q(x)$ и $p(x)$.

Положив

$$k = \sqrt{T/D}, \quad g(x) = [p(x) - q(x)]/D, \\ q(x) = q_c + \alpha \cdot (x - c), \quad z(x) = d^2v/dx^2, \quad (5)$$

где $c = (a+b)/2$, а q_c , α заданные постоянные, уравнение (1) принимает вид

$$(d^2z/dx^2) + k^2z = g(x), \quad (b < x < a). \quad (6)$$

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения второго порядка (6) представляется формулой [5]

$$z(x) = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx + \frac{1}{2k} \int_b^a \sin(k|x-s|)g(s)ds, \quad (b \leq x \leq a), \quad (7)$$

где C_1 и C_2 постоянные интегрирования. Для определения этих постоянных будем использовать граничные условия (3), которые, согласно последнему обозначению (5), принимают вид $z(a) = z(b) = 0$. В итоге приходим относительно C_1 и C_2 к системе двух линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} C_1 \cos kb + C_2 \sin kb = -\frac{1}{2k} \int_b^a \sin[k(s-b)]g(s)ds, \\ C_1 \cos ka + C_2 \sin ka = -\frac{1}{2k} \int_b^a \sin[k(a-s)]g(s)ds. \end{cases} \quad (8)$$

Главный определитель системы (8) $\Delta = \sin k(a-b)$. Исходя из этого предположим, что $0 < k(a-b) < \pi$, или согласно (5) $0 < T < \pi^2 D / (a-b)^2$. Тогда $\Delta \neq 0$ и система уравнений (8) имеет единственное решение

$$C_1 = -\frac{1}{2k \sin[k(a-b)]} \int_b^a \{\sin kas \sin[k(s-b)] - \sin kbs \sin[k(a-s)]\} g(s) ds, \quad (9)$$

$$C_2 = -\frac{1}{2k \sin[k(a-b)]} \int_b^a \{\cos kbs \sin[k(a-s)] - \cos kas \sin[k(s-b)]\} g(s) ds.$$

Далее, подставляя выражения C_1 и C_2 из (9) в (7), а затем полученное соотношение дважды интегрируя по x , с учётом (5), получим

$$v(x) = \frac{1}{D} \int_b^a H(x,s) [p(s) - q(s)] ds + k_0 \cdot (x-c) + v_c, \quad (b \leq x \leq a) \quad (10)$$

где

$$H(x,s) = \int_c^x (x-t) \left[\frac{\cos^2 k(a-b) \sin kt \sin ks - \sin^2 k(a-b) \cos kt \cos ks}{k \sin 2k(a-b)} + \frac{\sin(k|t-s|)}{2k} \right] dt, \quad (11)$$

$c = (a+b)/2$, а v_c и k_0 – постоянные интегрирования, характеризующие, соответственно, вертикальное перемещение серединной точки $x=c$ изогнутой оси правой балки и угловой коэффициент касательной, проведенной к изогнутой оси правой балки в этой же точке $x=c$.

Следует отметить, что при $k \rightarrow 0$ ($T \rightarrow 0$) из (10)-(11) получим соответствующие формулы классической теории изгиба балок [1], а при $k = \pi/(a-b)$ ($T = \pi^2 D / (a-b)^2$) балки потеряют устойчивость [6].

2. Теперь рассмотрим упругое равновесие шероховатой полосы, когда на части верхней горизонтальной границы $y=0$ приложено контактное давление $p(x)$, а остальные точки границы $y=0$ свободны от напряжений (фиг.3). Нижняя грань $y=-h_1$ полосы жестко закреплена.

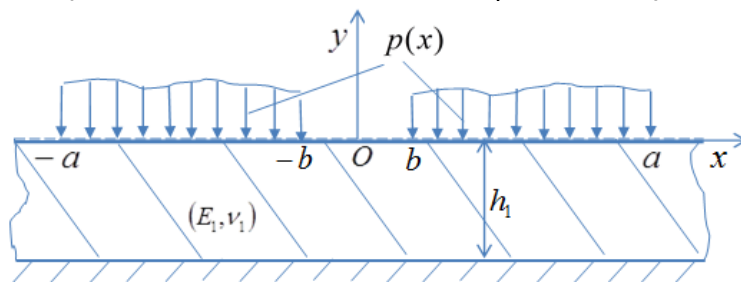
Вертикальное перемещение $v_1(x)$, которое получает произвольная точка x ($x \in [-a, -b] \cup [b, a]$) границы $y=0$ упругой полосы, согласно [3], является суммой двух вертикальных перемещений

$$v_1(x) = v_r(x) + v_e(x), \quad (x \in [-a, -b] \cup [b, a]). \quad (12)$$

Перемещение $v_r(x)$ обусловлено деформациями верхнего тонкого граничного шероховатого слоя полосы и, согласно [3], в каждой точке x из области $[-a, -b] \cup [b, a]$ пропорционально некоторой степени давления $p(x)$ данной точки

$$v_r(x) = A \cdot [p(x)]^\beta \quad (x \in [-a, -b] \cup [b, a]). \quad (13)$$

Здесь A и β положительные постоянные, притом $0,3 < \beta \leq 1$.



Фиг. 3. Схема упругого равновесия полосы.

Вертикальное перемещение $v_e(x)$ обусловлено глобальной деформацией полосы. Оно определяется решением показанной на фиг. 3, соответствующей плоской граничной задачи линейной теории упругости для полосы [7]

$$v_e(x) = \frac{2(1-\nu_1^2)}{\pi E_1} \left(\int_{-a}^{-b} + \int_b^a \right) U\left(\frac{s-x}{h_1}\right) p(s) ds, \quad (x \in [-a, -b] \cup [b, a]) \quad (14),$$

где ядерная функция $U(z)$ определяется следующим интегралом

$$U(z) = \int_0^\infty \frac{(2\varepsilon sh2t - 4t)\cos zt}{\varepsilon(2\varepsilon ch2t + 1 + \varepsilon^2 + 4t^2)} dt, \quad (\varepsilon = 3 - 4\nu_1). \quad (15)$$

Далее, запишем условие контакта правой балки и упругой полосы

$$v(x) = v_1(x), \quad (x \in [b, a]). \quad (16)$$

Так как $U(-z) = U(z)$, а из симметричности задачи следует, что $p(-x) = p(x)$, то из условий контакта (16) с учётом (10)-(15), получим относительно неизвестного контактного давления $p(x)$ нелинейное интегральное уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{1}{D} \int_b^a H(x,s)[p(s) - q(s)] ds + k_0 \cdot (x - c) + v_c = A \cdot [p(x)]^\beta + \\ & + \frac{2(1 - v_1^2)}{\pi E_1} \int_b^a \left[U\left(\frac{s-x}{h_1}\right) + U\left(\frac{s+x}{h_1}\right) \right] p(s) ds, \quad (b \leq x \leq a). \end{aligned} \quad (17)$$

Заметим, что в уравнение (17), помимо неизвестной функции $p(x)$, входят также неизвестные постоянные v_c и k_0 , при этом, функция $p(x)$ должна удовлетворять также условиям равновесия (4).

3. Далее, введём безразмерные величины и функции

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{s}{a}, \quad h_0 = \frac{h_1}{a}, \quad m = \frac{1}{\beta}, \quad \delta = \frac{b}{a}, \quad P_0 = \frac{A^m}{a^{m+1}} P, \quad M_0 = \frac{A^m}{a^{m+2}} M, \quad (18)$$

$$v_0 = \frac{v_c}{a}, \quad H_0(\xi, \eta) = \left(\frac{a}{A}\right)^m \cdot \frac{H(x,s)}{D}, \quad U_0(z) = \frac{2(1 - v_1^2)}{\pi E_1} \left(\frac{a}{A}\right)^m U\left(\frac{z}{h_0}\right), \quad (19)$$

$$p_0(\xi) = \frac{A}{a} [p(x)]^\beta, \quad q_0(\xi) = D^{-1} \int_\delta^1 H(a\xi, a\eta) q(a\eta) d\eta, \quad (20)$$

$$L_0(\xi, \eta) = H_0(\xi, \eta) - U_0(\xi - \eta) - U_0(\xi + \eta), \quad (21)$$

и уравнение (17) представим относительно новой неизвестной функции $p_0(\xi)$ в виде нелинейного интегрального уравнения типа Гаммерштейна [2]

$$p_0(\xi) = \int_\delta^1 L_0(\xi, \eta) [p_0(\eta)]^m d\eta + q_0(\xi) + k_0 \xi + v_0, \quad (\delta \leq \xi \leq 1), \quad (22)$$

а условия равновесия (4) представим в следующем виде:

$$P_0 = \int_\delta^1 [p_0(\xi)]^m d\xi, \quad M_0 = \int_\delta^1 [p_0(\xi)]^m \xi d\xi. \quad (23)$$

Таким образом, решение поставленной контактной задачи сводится к определению функции $p_0(\xi)$ ($\xi \in [\delta; 1]$) и постоянных v_0 и k_0 из системы (22)-(23). Коль скоро эти величины будут определены, соотношениями (19), (20), (10), (2) можем определить также v_c , $p(x)$, $v(x)$, $M(x)$ и $Q(x)$.

4. Эффективное решение системы нелинейных уравнений (22)-(23) получим согласно разработанной в [3] методике, основанной на теории нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна [2] и принципа сжимающих отображений [4].

Сначала, на основании (4) и (5), числа q_c и α выразим через P и M

$$q_c = P/(a-b), \quad \alpha = [12M - 6(a+b)P]/(a-b)^3. \quad (24)$$

Тогда учитывая (5), (18), (20) и (24) получим

$$q_0(\xi) = P_0 f_1(\xi) + M_0 f_2(\xi) \quad (\delta \leq \xi \leq 1), \quad (25)$$

где $f_1(\xi)$ и $f_2(\xi)$ известные функции. В итоге уравнение (22) принимает вид

$$p_0(\xi) = \int_{\delta}^1 L_0(\xi, \eta) [p_0(\eta)]^m d\eta + P_0 f_1(\xi) + M_0 f_2(\xi) + k_0 \xi + v_0, \quad (\delta \leq \xi \leq 1). \quad (26)$$

Для определения $p_0(\xi)$, v_0 и k_0 из нелинейного интегрального уравнений (26) и условий (23), применяем методом последовательных приближений, а доказательство сходимости полученных приближений проводим следующим образом.

Исходя из структуры системы нелинейных уравнений (26) и (23), временно считаем, что значения v_0 и k_0 заданы и фиксированы, но соответственные значения параметров P_0 и M_0 , как и функция $p_0(\xi)$ неизвестны. Тогда, уравнения (26) и (23) будут иметь наиболее удобный вид для определения $p_0(\xi)$, P_0 и M_0 методом последовательных приближений. Полученные таким образом зависимости $p_0(\xi)$, P_0 и M_0 от v_0 и k_0 можно трактовать как искомое решение задачи, т.е. зависимости $p_0(\xi)$, v_0 и k_0 от P_0 и M_0 .

Теперь, следуя [3], введём вектор $\bar{x} = \{p_0(\xi), P_0, M_0\}$ и систему уравнений (26), (23) представим в операторном виде $\bar{x} = G(\bar{x})$. Тогда решение задачи сводится к определению неподвижной точки \bar{x}^* нелинейного оператора G , т.е. $\bar{x}^* = G(\bar{x}^*)$.

Пусть в множестве X , каждый элемент которого является совокупностью непрерывной в $\xi \in [\delta; 1]$ функций $p_0(\xi)$ и двух произвольных чисел P_0 и M_0 , введена метрика формулой

$$\rho(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \max_{\delta \leq \xi \leq 1} |p_{01}(\xi) - p_{02}(\xi)| + |P_{01} - P_{02}| + |M_{01} - M_{02}|, \quad (27)$$

где $\bar{x}_i = \{p_{0,i}(\xi), P_{0,i}, M_{0,i}\}$ ($i=1,2$) – две произвольные элементы из X . Тогда множество X становится полным метрическим пространством [4]. Пусть, далее, $S(\bar{O}, r)$ – замкнутый шар в пространстве X с центром $\bar{O} = \{0,0,0\}$ и с некоторым радиусом $r > 0$. Способом, предложенным в [3],

доказывается, что существует область изменения характерных параметров задачи, где оператор $\bar{y} = G(\bar{x})$ отображает шар $S(\bar{O}, r)$ в себе и в нем является сжимающим оператором. Тогда для любого начального элемента $\bar{x}_0 \in S(\bar{O}, r)$, рекуррентными формулами

$$p_{0,i+1}(\xi) = \int_{\delta}^1 [H_0(\xi, \eta) - U_0(\xi - \eta) - U_0(\xi + \eta)] \cdot [p_{0,i}(\eta)]^m d\eta + P_{0,i} f_1(\xi) + M_{0,i} f_2(\xi) + k_0 \xi + v_0, \quad (\delta \leq \xi \leq 1), \quad (i = 0, 1, 2, \dots), \quad (28)$$

$$P_{0,i+1} = \int_{\delta}^1 [p_{0,i}(\xi)]^m d\xi, \quad M_{0,i+1} = \int_{\delta}^1 [p_{0,i}(\xi)]^m \xi d\xi, \quad (i = 0, 1, 2, \dots), \quad (29)$$

или в операторном виде $\bar{x}_{i+1} = G(\bar{x}_i)$, $(i = 0, 1, 2, \dots)$ получается последовательность $\{\bar{x}_i\}_{i=0}^{\infty}$, которая по метрике (27) стремится к некоторому пределу $\bar{x}^* = \{p_0^*(\xi), P_0^*, M_0^*\}$, являющийся точным решением операторного уравнения $\bar{x} = G(\bar{x})$.

Принимая $\bar{x}_0 = \bar{O}$ в качестве нулевого приближения, формулами (28)-(29) получим приближенные решения системы уравнений (26), (23).

В первом приближении имеем

$$p_{0,1}(\xi) = k_0 \xi + v_0, \quad (\delta \leq \xi \leq 1), \quad P_{0,1} = 0, \quad M_{0,1} = 0. \quad (30)$$

Решение системы (26), (23) во втором приближении будет

$$p_{0,2}(\xi) = \int_{\delta}^1 L_0(\xi, \eta) [k_0 \eta + v_0]^m d\eta + k_0 \xi + v_0, \quad (\delta \leq \xi \leq 1), \quad (31)$$

$$P_{0,2} = \int_{\delta}^1 [k_0 \xi + v_0]^m d\xi, \quad M_{0,2} = \int_{\delta}^1 [k_0 \xi + v_0]^m \xi d\xi. \quad (32)$$

Ключевые слова: упругость, изгиб балок, осевые силы, контактное давление.

Список использованной литературы

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С., Пластины и оболочки, М., Наука, 1966, 636 с.
2. Трикоми Ф., Интегральные уравнения, М., ИЛ, 1960, 300 с.

3. Мхитарян С.М., Шемян Л.А., Плоская контактная задача для двух шероховатых твердых тел, изготовленных из степенно упрочняющихся материалов // Изв. АН АрмССР, Механика, 1977, Т. 30, №3, С. 15 – 32.
4. Люстерник Л.А., Соболев В.И., Элементы функционального анализа, М., Наука, 1965, 360с.
5. Амирбемян А.Н., Мкртчян М.С., Мхитарян С.М., Шемян Л.А., О контактной задаче изгиба балки конечной длины на упругой полуплоскости с учетом сдвигающих сил в ее срединной линии, Известия НАН Армении, Механика, Т. 67, №1, 2014, Стр. 6-21.
6. Кутузян Н.А., Григорян М.С., Шемян Л.А., Поперечный изгиб свободно опертой балки при наличии продольных сжимающих сил., Сборник научных статей Гаварского гос. университета, Сборник научных статей Гаварского гос. университета, №.3, 2016, С. 56-63.
7. Ворович И.И., Александров В. М., Бабешко В.А., Неклассические смешанные задачи теории упругости, М., Наука, 1974, 455 с.

**ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ԱՆՀԱՐԹ ՇԵՐՏԻ ՎՐԱ ԵՐԿՈՒ ՄԻԱՏԵՍԱԿ ՀԵԾԱՆՆԵՐԻ
ՇՈՒՈՒՄԸ ԳԾԱՅԻՆ ԲԱՇԽՎԱԾ ԿՈՂԱՅԻՆ ԲԵՌՈՎ՝ ԱՌԱՆՑՔԱՅԻՆ ՍԵՂՄՈՂ
ՈՒԺԵՐԻ ԱՌԿԱՅՈՒԹՅԱՄԲ**

ԿՈՒՏՈՒՋՅԱՆ ՆԵԼԼԻ

*Ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածու, դոցենտ,
Գավառի պետական համալսարանի պրոռեկտոր*

ՇԵԿՅԱՆ ԼԱՎՐԵՆՏԻ

*ՀՀ ՃԱ թղթ. անդամ, ֆիզիկամաթեմատիկական
գիտությունների դոկտոր, պրոֆեսոր,
Գավառի պետական համալսարանի դասախոս*

Հեծանների ծոման՝ Ս. Պ. Տիմոշենկոյի ընդհանրացված մոդելի շրջանակներում, երբ լայնական ուժերից բացի երկայնական սեղմող կամ ձգող ուժերը նույնպես ազդում են հեծանների ճկման վրա, դիտարկվում է առաձգական անհարթ շերտի վրա երկու միատեսակ հեծանների՝ գծային օրենքով բաշխված լայնական ուժերով ծոման կոնտակտային հարթ խնդիրը՝ երկայնական սեղմող ուժերի առկայությամբ:

Խնդիրը ձևակերպված է շերտի և հեծանների միջև գործող նորմալ լարումների նկատմամբ ոչ գծային ինտեգրալ հավասարման տեսքով՝ լրացուցիչ պայմանների առկայությամբ: Խնդրի արդյունավետ լուծումը ստացվել է հաջորդական մոտավորությունների մեթոդով՝ սեղմող արտապատկերումների սկզբունքի ներգրավմամբ:

Քանալի բառեր՝ առաձգականություն, հեծանների ծռում, առանցքային ուժեր, կոնտակտային ճնշում:

**BENDING OF TWO IDENTICAL BEAMS ON AN ELASTIC ROUGH BAND
BY A LINEARLY DISTRIBUTED TRANSVERSE LOAD
IN THE PRESENCE OF AXIAL COMPRESSIVE FORCES**

KUTUZYAN NELLI

*PhD, Associate Professor
Vice-rector of Gavar State University*

SHEKYAN LAVRENTI

*Corresponding member of Ing. Acad. of Armenia,
Doctor of Sciences, Professor
Lecturer of Gavar State University*

In the framework of the generalized model of bending beams by S. P. Timoshenko, when in addition to the transverse forces, longitudinal compressive or tensile forces also affect beam deflections, a problem of plane contact of two identical beams of finite length on an elastic rough band under the action of a transverse load distributed by the linear law under the axial compressive forces is considered.

The problem is formulated in the form of a nonlinear integral equation in respect of normal pressure between band and beams, under the additional conditions. An effective solution of the problem was obtained by the method of successive approximation including the principle of compressed mappings.

Key words: *elasticity, bending of beams, axial forces, contact pressure.*

Հոդվածը ներկայացվել է խմբագրական խորհուրդ 22.12.2018թ.:
Հոդվածը գրախոսվել է 13.04.2019թ.: