ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Ճիտոյան Արման Սամվելի

# ՏՐԱՄԱԲԱՆԱԿԱՆ ՈՐՈՇ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐՈՒՄ ԱՐՏԱԾՈՒՄՆԵՐԻ ԲԱՐԴՈՒԹՅԱՆ ԳՆԱՀԱՏԱԿԱՆՆԵՐԻ ՃՇԳՐՏՈՒՄԸ

Ա.01.09. <<Մաթեմատիկական կիբեռնետիկա և մաթեմատիկական տրամաբանություն>> մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

Երևան 2018

---

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Читоян Арман Самвелович

# УТОЧНЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ СЛОЖНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ВЫВОДОВ В РАЗЛИЧНЫХ ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09. “Математическая кибернетика и математическая логика”

Ереван 2018

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի պետական համալսարանում:

Գիտական ղեկավար՝ ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր Ա. Ա. Չուբարյան
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր Ի. Դ. Զասլավսկի
ֆիզ. մաթ. գիտ. թեկնածու Ս. Մ. Սայադյան

Առաջատար կազմակերպություն՝ Ռուս-Հայկական համալսարան

Պաշտպանությունը կայանալու է 2018 թ. հունիսի 12-ին, ժամը 14:30-ին, ԵՊՀ-ում գործող ԲՈՀ-ի 044 <<Մաթեմատիկական կիբեռնետիկա և մաթեմատիկական տրամաբանություն>> մասնագիտական խորհրդի նիստում, հետևյալ հասցեով՝ Երևան, 375025, Ալեք Մանուկյան 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ Երևանի պետական համալսարանի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2018 թ. Մայիսի 11-ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար՝ ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր Վ. Ժ. Դումանյան

---

Тема диссертации утверждена в Ереванском государственном университете.

Научный руководитель: доктор физ. мат. наук А. А. Чубарян
Официальные оппоненты: доктор физ. мат. наук И. Д. Заславский
кандидат физ. мат. наук С. М. Саядян

Ведущая организация: Российско-Армянский университет

Защита состоится 12-го июня 2018 г., в 14:30 часов на заседании специализированного совета 044 «Математическая кибернетика и математическая логика» ВАК, при ЕГУ по адресу: 375025, г. Ереван, ул. Алека Манукяна 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ереванского государственного университета.

Автореферат разослан 11-го мая 2018 г.

Ученый секретарь специализированного совета доктор физ. мат. наук В. Ж. Думанян

## Ատենախոսության ընդհանուր նկարագիրը

**Թեմայի արդիականությունը. Արտածումների բարդության** տեսությունը ուսումնասիրում է բարդության գաղափարը տրամաբանության տեսանկյունից: Թեորեմի ապացուցման բարդության մեծությունը կարելի է նկարագրել տարբեր եղանակներով՝ ինչպիսին են տրված համակարգում նրա կարճագույն ապացույցի երկարությունը (size), քայլերի քանակը (steps), օգտագործված տարածության մեծությունը (space), յուրաքանչյուր քայլում օգտագործված պնդումների մեծագույն երկարությունը (width): Բնական է, որ ապացույցի օպտիմալությունը էապես կախված է այն համակարգից, որում կատարվում է ապացույցը: Ֆորմալ տեսություններից ամենապարզ՝ ասույթային հաշվի արտածման բարդության հետազոտումների թվացյալ պարզությունը և հետևաբար նաև ոչ այնքան կարևոր լինելը կտրականապես հերքեց Կուկի և Ռեքաուի[1] հոդվածը, որտեղ ապացուցվել էր, որ ասույթային արտածումների երկարությունների և հաշվարկելիության բարդության դասերի տարանջատման միջև առկա է ֆունդամենտալ կապ՝ NP դասը փակ է լրացման նկատմամբ այն և միայն այն դեպքում, եթե գոյություն ունի **ասույթային հաշվի** այնպիսի արտածման համակարգ, որում բոլոր նույնաբանությունների արտածումների երկարությունները բազմանդամորեն սահմանափակ են /այդպիսի համակարգը հեղինակները անվանում են **սուպեր** համակարգ/: Այդ դիտակետից առաջացել է այսպես կոչված Կուկ-Ռեքաու ծրագիրը, որը հանդիսանում է ասույթային հաշվի համակարգերում արտածման բարդության բնութագրիչների հետազոտման ակտիվացման սկզբնակետերից մեկը և որը ներառում է հետևյալ հիմնական ուղղությունները՝

- տրված համակարգում բանաձևերի արտածման բնութագրիչների գնահատում,
- նոր, առավել արդյունավետ համակարգերի սահմանում,
- նոր, առավել բարդ արտածվող բանաձևերի որոնում:

Վերջերս Գորդեևի և Հեյսլերի[2] կողմից ապացուցվել է, որ **NP=PSPACE** և, հետևաբար, **NP = coNP = PSPACE**: Այսպիսով, **սուպեր համակարգ գոյություն ունի**: Հայտնի է, որ բազմաթիվ համակարգեր սուպեր չեն, սակայն ասույթային հաշվի առավել բնական (սեկվենցիալ կամ Ֆրեգեի) համակարգերի, ինչպես նաև վերջերս կառուցված որոշ համակարգերի վերաբերյալ սուպեր լինելու խնդիրը դեռ բաց է, հետևաբար խիստ արդիական է և անհրաժեշտ այդպիսի համակարգերի ուսումնասիրությունը արտածումների բարդության տեսանկյունից:

Սա հեռահար նպատակն է, սակայն առկա են նաև այլ հետաքրքրություններ, որոնցով նույնապես պատճառաբանվում են այս ոլորտում առկա հետազոտությունների մեծամասնությունը: Այդպիսի խնդիրներից է, մասնավորապես, **ԻՐԱԳՈՐԾԵԼԻՈՒԹՅԱՆ խնդրի /SAT problem-ի/** լուծումը, որը կարող է բացահայտել արդեն **P** և **NP** դասերի փոխհարաբերությունը: Հայտնի է, որ ասույթային հաշվի յուրաքանչյուր բանաձև որոշակի ձևափոխությամբ կարելի է ներկայացնել այնպիսի կոնյունկտիվ նորմալ ձևով (ԿՆՁ), որի երկարությունը ունի ոչ ավելին, քան գծային աճ սկզբնական բանաձևի երկարության

[1] Cook S. A. and Reckhow A. R., “The relative efficiency of propositional proof systems”J. Symbolic Logic, 44, (1979), 36-50

[2] L. Gordeev, E. H. Haeusler, NP vs PSPACE, arXiv:1609.09562v1 [cs.CC] 30 Sep 2016

համեմատությամբ, և որն անիրագործելի է այն և միայն այն դեպքում, երբ ինքը բանաձևը նույնաբանություն է: Անիրագործելիությունը հաստատող որևէ ալգորիթմ սահմանում է որոշակի արտածման համակարգ, որը կրկնօրինակում է ալգորիթմի կատարման քայլերը և, հակառակը, անիրագործելիությունը փաստող որևէ արտածման համակարգ հանդիսանում է **SAT problem-ը** լուծող ալգորիթմ: SAT problem-ի ժամանակակից հետազոտողները որոնում են որոշակի «թույլ» համակարգերում (Resolution, Polynomial Calculus, Analytic Tableaux, Catting Planes, Cut-fee Sequence, Elimination, Bounded Frege) արտածումների բարդության վերին և ստորին գնահատականները, որոնք հուշում են **SAT problem-ի** լուծման համար նվազագույն և առավելագույն բավարար ռեսուրսների մասին: Հիմնավորվել է, որ օգտագործված հիշողությունը հանդիսանում է կարևորագույն պարամետրը SAT-problem-ի լուծման ընթացքում, հետևաբարr, արտածման space բարդությունը կարող է լինել օգտակար այս հարցում: Վերջերս կատարված հետազոտու-թյուններիրի արդյունքները փաստում են resolution համակարգում space բարդության համար ստացված տեսական արդյունքների և միևնույն ժամանակահատվածում պրակտիկորեն ստացված բարդության մեծությունների իրական մոտիկությունը: Այսպիսով, արտածումների բարդության հետազոտումները կարևոր են նաև «թույլ» համակարգերում:

Արտածումների բարդության վերոհիշյալ, ինչպես նաև որոշ այլ հարցեր, որոնք վերաբերում են **բազմարժեք տրամաբանության** որոշ տարատեսակների համակարգերում արտածումների բարդությունների գնահատմանը, ունենալով տեսական նշանակություն, **ունեն նաև պրակտիկ կիրառություն** թեորեմների արտածումների ավտոմատացման ընթացքում, հետևրաբար նաև Formal Verification, Artificial Intelligence, Operations Research, Computational Biology, Cryptography, Data Mining, Machine Learning, Hardware Design-ի հետ առնչվող հետազոտումներում:

**Նպատակն ու խնդիրները.** Աշխատանքի հիմնական նպատակն է ասույթային հաշվի որոշակի համակարգերում արտածումների տարբեր բնութագրիչների գնահատականների ճշգրտումը, նշելու համար այդ համակարգերի տեղակայումը ասույթային համակարգերի ըստ արդյունավետության բաղդատման աղյուսակում: Հիմնական խնդիրներն են՝

- R(lin)-գծայնացված ռեզոլյուցիա համակարգի սուպեր լինելու հանգամանքի հետազոտումը,
- տարբեր տեղադրման կանոնների ազդեցությունը R- ռեզոլյուցիա և E – կրճատման համակարգերի արդյունավետության վրա,
- F -Ֆրեգեի համակարգերում արտածումների քայլերի ստորին գնահատականների ճշգրտումը,
- բազմարժեք տրամաբանության որոշ տարատեսակների համակարգերում արտածումների բարդությունների գնահատմանը:

**Հետազոտման մեթոդներն են՝** մաթեմատիկակն տրամաբանության, բարդության ընդհանուր տեսության և կոմբինատոր օպտիմիզացիայի մեթոդները:

**Պաշտպանության ներկայացվող հիմնական դրույթներն են՝**

1. R(lin) համակարգում բանաձևերի որոշակի հաջորդականության համար ստացված են արտածումների քայլերի և երկարության ստորին ցուցչային

գնահատականներ, հետևաբար R(lin)-ը սուպեր համակարգ չէ: Ապացուցված է նաև, որ այդ նույն բանաձևերի հաջորդականության արտածումները բազմանդամորեն սահմանափակ են R(lin)+տեղադրություն համակարգում: Նույնատիպ արդյունքներ ստացվել են նաև R(lin)-ին երկակի E(lin) համակարգի համար:

2. Սահմանված են R+l-տեղադրություն և E+ l-տեղադրություն համակարգերը / l≥0 – տեղադրվող բանաձևերի տրամաբանական գործողությունների քանակն է / և ապացուցված է, որ R+(l+1)-տեղադրություն (E+ (l+1)-տեղադրություն) համակարգը ունի քայլերի քանակի ցուցչային արագացում R+l-տեղադրություն (E+l-տեղադրություն) համակարգի նկատմամբ, իսկ R+տեղադրություն և E+տեղադրություն համակարգերը համարժեք են Ֆրեգեի համակարգերին: Նմանատիպ արդյունքներ ստացված են նաև ինտուիցիոնիստական և մինիմալ տրամաբանությունների համապատասխան համակարգեր համար:
3. Ֆրեգեի բոլոր համակարգերի համար ստացված է արտածումների քայլերի սուպեր-գծային ստորին գնահատականներ /մինչ այժմ հայտնի գծայինի փոխարեն/:
4. Բազմարժեք տրամաբանության որոշ տարատեսակների համակարգերում բանաձևերի որոշակի հաջորդականությունների արտածումների բարդությունների բոլոր չորս բնութագրիչների համար ստացված են օպտիմալ /նույն կարգի վերին և ստորին/ գնահատականներ:

**Գիտական նորույթը.** Ներկայացվող հետազոտությունների ուղղությամբ ստացված բոլոր արդյունքները նոր են՝ դասական երկարժեք տրամաբանության համակարգերի համար ստացված արդյունքների հիման վրա էապես ճշգրտվել է ասույթային համակարգերի ըստ արդյունավետության բաղդատման աղյուսակը, իսկ բազմարժեք տրամաբանության որոշ տարատեսակների համակարգերում արտածումների բարդությունների բնութագրիչների գնահատում կատարվել է առաջին անգամ:

**Ստացված արդյունքների գործնական կիրառությունը.** Արտածումների բարդության բնութագրիչների գնահատումները թե երկարժեք, թե բազմարժեք տրամաբանության որոշ տարատեսակների համակարգերում, ունենալով տեսական նշանակություն, **ունեն նաև պրակտիկ կիրառություն** թեորեմների արտածումների ավտոմատացման գործընթացում, ինչպես նաև վերջին տասնամյակում այնպիսի ոլորտներում, ինչպիսիք են Formal Verification, Artificial Intelligence, Operations Research, Computational Biology, Cryptography, Data Mining, Machine Learning, Hardware Design-ը:

**Ստացված արդյունքների փործարկումը.** Ատենախոսությունում ներկայացված արդյունքները բազմիցս ներկայացվել և քննարկվել են տարբեր սեմինարների և տարբեր միջազգային գիտական կոնֆերանսների ժամանակ՝

- Logic Colloquium 2015 LC 2015Annual European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic (ASL), Helsinki, 2015,
- Logic Colloquium 2016 LC 2015Annual European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic (ASL), Leeds, 2016,
- CSIT-2015, Yerevan

- ԵՊԸ ՈՒԳԸ գիտական նստաշրջան, 2017:

**Հրապարակումներ.** Ատենախոսության հետազոտությունների վերաբերյալ տպագրված են 11 գիտական աշխատություններ:

**Աշխատանքի ծավալը և կառուցվածքը.** Ատենախոսությունը կազմված է ներածությունից, վեց գլուխներից, եզրակացությունից, երկու հավելվածներից և օգտագործված գրականության ցանկից /42 անուն/: Ծավալը 90 էջ է:

**Գլուխների համառոտ բովանդակությունը**

**Առաջին գլխում** տրվում են ատենախոսությունում հետազոտված հիմնական արտածման համակարգերի, բարդության տարբեր բնութագրիչների և որոշակի «դժվար» արտածվող բանաձևերի սահմանումները:

Մենք կօգտագործենք բուլյան խորանարդի հայտնի սահմանումը $\boldsymbol{E^n} = \{(\boldsymbol{\sigma_1}, \boldsymbol{\sigma_2}, \dots, \boldsymbol{\sigma_n}) \,/\, \boldsymbol{\sigma_i} \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\},\ \mathbf{1} \le \boldsymbol{i} \le \boldsymbol{n}\}$, $\boldsymbol{p_i}$ և $\boldsymbol{p_{i_j}} (\boldsymbol{i} \ge \mathbf{1};\ \boldsymbol{j} \ge \mathbf{1})$ տրամաբանական փոփոխականների, հետևյալ տրամաբանական կապերով ¬, &, ∨, ⊃ ասույթային հաշվի բանաձևերի, նույնաբանության գաղափարները:

**1.1. Որոշիչ դիզյունկտիվ նորմալ ձևի գաղափարը**

Երկարժեք տրամաբանությունում փոփոխականները և դրանց ժխտումները կանվանենք լիտերալներ: K կոնյունկտը իրենից ներկայացնում է լիտերալների բազմություն (կոնյունկտը չի կարող պարունակել փոփոխականը և այդ փոփոխականի ժխտումը միաժամանակ):

Հետևելով Ա.Չուբարյանին[3] տանք հետևյալ սահմանումները՝

**Սահմանում 1.1.1:** Ասույթային հաշվի յուրաքանչյուր $\psi$ բանաձևի համար հետևյալ տարրական ձևափոխումներից յուրաքանչյուրը կանվանենք փոխարինման-կանոն՝

$$\begin{array}{llll} 0 \& \psi = 0, & \psi \& 0 = 0, & 1 \& \psi = \psi, & \psi \& 1 = \psi, \\ 0 \vee \psi = \psi, & \psi \vee 0 = \psi, & 1 \vee \psi = 1, & \psi \vee 1 = 1, \\ 0 \supset \psi = 1, & \psi \supset 0 = \overline{\psi}, & 1 \supset \psi = \psi, & \psi \supset 1 = 1, \\ \overline{0} = 1, & \overline{1} = 0, & \overline{\overline{\psi}} = \psi. & \end{array}$$

Փոխարինման-կանոնի միջոցով բանաձևերում փոխարինման կանոնի ձախ մասի տեսքը ունեցող ցանկացած ենթաբանաձև կարող է փոխարինվել աջ մասի տեսքը ունեցող համապատասխան բանաձևով:

Դիցուք $\boldsymbol{\varphi}$–ն ասույթային հաշվի բանաձև է, իսկ $\boldsymbol{P} = \{\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}, \dots, \boldsymbol{p_n}\}$–ն՝ այդ բանաձևի բոլոր փոփոխականների բազմությունը: $\boldsymbol{P'} = \{\boldsymbol{p_{i_1}}, \boldsymbol{p_{i_2}}, \dots, \boldsymbol{p_{i_m}}\}$-ով $(\mathbf{1} \le \boldsymbol{m} \le \boldsymbol{n})$ նշանակենք $\boldsymbol{P}$–ի որևէ ենթաբազմություն:

[3] An.Chubaryan, 2002, Relative efficiency of some proof systems for classical propositional logic, Proceedings of NASA RA, Vol.37,N5,2002, and Journal of CMA (AAS),Vol.37, N5, 71-84

**Սահմանում 1.1.2:** Տրված $\sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\} \subset E^m$–ի համար $K^\sigma = \left\{p_{i_1}^{\sigma_1}, p_{i_2}^{\sigma_2}, \dots, p_{i_m}^{\sigma_m}\right\}$[4] կոնյունկտը կանվանենք $\boldsymbol{\varphi} - \mathbf{1}$–որոշիչ ($\boldsymbol{\varphi} - \mathbf{0}$-որոշիչ), եթե ամեն $p_{i_j}$–ին $\sigma_j$ արժեքը ($1 \le j \le m$) վերագրելուց հետո կիրառելով փոխարինման կանոնները, կստանանք $\varphi$–ի արժեքը (1 կամ 0) անկախ մնացած փոփոխականների արժեքներից:

$\varphi - 1$-որոշիչ կոնյունկտը և $\varphi - 0$-որոշիչ կոնյունկտը կանվանենք նաև $\varphi$-որոշիչ կամ որոշիչ $\varphi$–ի համար:

**Սահմանում 1.1.3:** $D = \{K_1, K_2, \dots, K_l\}$ ԴՆՁ-ն կանվանենք որոշիչ ԴՆՁ (ոԴՆՁ) $\varphi$–ի համար, եթե $\varphi = D$ և ցանկացած $K_j$ ($1 \le j \le l$) կոնյունկտ 1-որոշիչ է $\varphi$–ի համար:

Հինգերորդ գլխում ոԴՆՁ-ի գաղափարը ընդհանրացվել է բազմարժեք տրամաբանության համար:

## 1.2. Հիմնական համակարգերը

Ատենախոսության հիմնական արդյունքները ստացվել են մի շարք հանրահայտ արտածման համակարգերի /Ֆրեգեի, սեկվենցյալ/ տարատեսակների համար և վերջերս սահմանված նոր համակարգերի, ինչպես նաև դրանց տարատեսաների համար: Վերջինների ոչ այնքան հայտնի լինելու պատճառով տանք դրանց սահմանումները:

**Արտածման E համակարգ կրճատման կանոնով** սահմանված է Ա.Չուբարյանի վերոհիշյալ հոդվածում: E-ի հենասույթները չեն ֆիքսվում, բայց ցանկացած $\varphi$-ի համար նրա որևէ ոԴՆՁ-ի յուրաքանչյուր կոնյունկտ կարող է դիտարկվել որպես հենասույթ:

Կրճատման կանոնը ($\boldsymbol{\varepsilon}$-կանոն) արտածում է $K' \cup K''$-ն $K' \cup \{p\}$ և $K' \cup \{\overline{p}\}$ կոնյունկտներից, որտեղ $K'$ և $K''$ կոնյունկտներ են, իսկ $p$–ն՝ փոփոխական:

Կոնյունկտների վերջավոր հաջորդականությունը հանդիսանում է արտածում E-ում, եթե կամայական կոնյունկտ կամ հենասույթ է, կամ ստացվել է հաջորդականության նախորդ կոնյունկտներից $\varepsilon$-կանոնով:

Ակնհայտ է, որ $\boldsymbol{D} = \{\boldsymbol{K_1}, \boldsymbol{K_2}, \dots, \boldsymbol{K_l}\}$ ԴՆՁ-ն նույնաբանություն է, եթե $\{\boldsymbol{K_1}, \boldsymbol{K_2}, \dots, \boldsymbol{K_l}\}$ հենասույթներից կարելի է արտածել դատարկ կոնյունկտը ($\emptyset$) $\boldsymbol{\varepsilon}$-կանոնով:

### Ռեզոլյուցիոն R համակարգ

Ռեզոլյուցիոն R համակարգը կոնյունկտիվ նորմալ ձևերով (ԿՆՁ) տրված բանաձևի հերքման մեթոդով արտածման համակարգն է: Ֆորմալ սահմանմամբ՝ ԿՆՁ բանաձև կանվանենք $\boldsymbol{K} = \{\boldsymbol{D_1}, \boldsymbol{D_2}, \dots, \boldsymbol{D_s}\}$ դիզյունկտների հավաքածուն, որտեղ որպես դիզյունկտ դիտարկվում է լիտերալների հավաքածուն /փոփոխականը և իր ժխտումը միաժամանակ չեն կարող մասնակցել/: R-ում հենասույթները ֆիքսված չեն: Որոշակի $\boldsymbol{K} = \{\boldsymbol{D_1}, \boldsymbol{D_2}, \dots, \boldsymbol{D_s}\}$ ԿՆՁ-ի համար յուրաքանչյուր $\boldsymbol{D_i}$ դիզյունկտ կարող է համարվել հենասույթ: Ռեզոլյուցիոն

[4] Տրված $p$ փոփոխականի և $\sigma \in E^1$ համար $p^\sigma$–ով կնշանակենք $p^\sigma = \begin{cases} p, \text{եթե } \sigma = 1 \\ \overline{p}, \text{եթե } \sigma = 0 \end{cases}$

կանոնը $\boldsymbol{D'} \cup \{\boldsymbol{p}\}$ և $\boldsymbol{D''} \cup \{\overline{\boldsymbol{p}}\}$-ից արտածում է $\boldsymbol{D'} \cup \boldsymbol{D''}$-ը, որտեղ $\boldsymbol{D'}$ և $\boldsymbol{D''}$ դիզյունկտներ են, իսկ $\boldsymbol{p}$-ն փոփոխական:

$\boldsymbol{K} = \{\boldsymbol{D_1}, \boldsymbol{D_2}, \dots, \boldsymbol{D_s}\}$ ԿՆՁ-ն կոչվում է հերքվող այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի դատարկ դիզյունկտի արտածում $\{\boldsymbol{D_1}, \boldsymbol{D_2}, \dots, \boldsymbol{D_s}\}$ հենասույթներից:

Յուրաքանչյուր բանաձևի ժխտմանը որոշակի եղանակով համապատասխանեցվում է $\boldsymbol{K} = \{\boldsymbol{D_1}, \boldsymbol{D_2}, \dots, \boldsymbol{D_s}\}$ ԿՆՁ, որի հերքելիությունը համարժեք է տրված բանաձևի նույնաբանություն հանդիսանալուն:

**R(lin) համակարգ**

R(lin) համակարգի սահմանումը տանք ըստ Ռան Ռազի և Իդդո Ձամեռետի[5] հոդվածի.

Դիցուք ունենք L գծային հավասարում հետևյալ տեսքով՝ $\boldsymbol{a_1 x_1} + \cdots \boldsymbol{a_n x_n} = \boldsymbol{a_0}$: Աջ կողմի $\boldsymbol{a_0}$-ն կոչվում է L-ի ազատ մաս, իսկ ձախ $\boldsymbol{a_1 x_1} + \cdots \boldsymbol{a_n x_n}$ մասը կոչվում L-ի գծային մաս (գծային մասը կարող է 0 լինել): Գծային հավասարումների դիզյունկտ կանվանենք հետևյալ արտահայտությունը՝

$$\left(\boldsymbol{a_1^{(1)} x_1} + \cdots + \boldsymbol{a_n^{(1)} x_n} = \boldsymbol{a_0^{(1)}}\right) \vee \dots \vee (\boldsymbol{a_1^{(t)} x_1} + \cdots + \boldsymbol{a_n^{(t)} x_n} = \boldsymbol{a_0^{(t)}}),$$

որտեղ $\boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}$ և $\boldsymbol{a_i^{(j)}}$-երը ամբողջ թվեր են ($\boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{i} \leq \boldsymbol{n},\ \boldsymbol{1} \leq \boldsymbol{j} \leq \boldsymbol{t}$): Գծային հավասարումների կրկնությունները գծային հավասարումների դիզյունկտում բացառվում է: Այս դիզյունկտը ունի հետևյալ բնական նկարագրությունը՝ մենք ասում ենք, որ $\boldsymbol{x_1} \dots \boldsymbol{x_n}$ փոփոխականներին ամբողջ թվերի վերագրումը իրագործելի է այն և միայն այն դեպքում, եթե գոյություն ունի $\boldsymbol{j} \in [\boldsymbol{1}, \boldsymbol{t}]$ այնպես, որ $\boldsymbol{a_1^{(j)} x_1} + \cdots + \boldsymbol{a_n^{(j)} x_n} = \boldsymbol{a_0^{(j)}}$ հավասարումը ճիշտ է փոփոխականներին տրված արժեքների դեպքում:

Քանի որ այս աշխատանքում օգտագործված բոլոր գծային հավասարումները ունեն ամբողջ գործակիցներ, մենք որպես գծային հավասարում այսուհետ կհասկանանք գծային հավասարում ամբողջ արժեք գործակիցներով:

Այժմ կներկայացնենք դիզյունկտների “թարգմանության” գաղափարը: Ցանկացած ԿՆՁ հնարավոր է թարգմանել գծային հավասարումների դիզյունկտների հավաքածուի հետևյալ կերպ՝ ԿՆՁ-ի մեջ մտնող ցանկացած $\bigvee_{i \in I} \boldsymbol{x_i} \vee \bigvee_{j \in J} \neg \boldsymbol{x_j}$ դիզյունկտ (որտեղ $\boldsymbol{I}$ և $\boldsymbol{J}$ փոփոխականների ինդեքսների բազմություններն են) թարգմանվում է հետևյալ գծային հավասարումների դիզյունկտի $\bigvee_{i \in I} (\boldsymbol{x_i} = \boldsymbol{1}) \vee \bigvee_{j \in J} (\boldsymbol{x_j} = \boldsymbol{0})$: $\boldsymbol{D}$ դիզյունկտի թարգմանությունը գծային հավասարումների դիզյունկտին կնշանակենք $\widetilde{\boldsymbol{D}}$-ով: Հեշտ է տեսնել, որ $\boldsymbol{x_1} \dots \boldsymbol{x_n}$ փոփոխականների բուլյան արժեքները բավարարում են $\boldsymbol{D}$-ին այն և միայն այն դեպքում, երբ բավարարում են $\widetilde{\boldsymbol{D}}$-ին (որտեղ 1 հասկացվում է որպես ճիշտ, իսկ 0-ն սխալ):

Գծային հավասարումների ռեզոլյուցիոն R(lin) համակարգը սահմանվում է հետևյալ կերպ.

[5] Ran Raz, Iddo Tzameret: Resolution over linear equations and multilinear proofs, Ann. Pure Appl. Logic 155(3), 2008, 194-224

Դիցուք ունենք գծային հավասարումների դիզյունկտների $\boldsymbol{K} \coloneqq \{\boldsymbol{D_1}, \dots, \boldsymbol{D_m}\}$ բազմություն: $\boldsymbol{\pi} = (\boldsymbol{D_1}, \dots, \boldsymbol{D_l})$ գծային հավասարումների դիզյունկտների հաջորդականությունը կանվանենք $\boldsymbol{D}$ գծային հավասարման դիզյունկտի արտածում K-ից R(lin)-ում, եթե $\boldsymbol{D_l} = \boldsymbol{D}$ և ցանկացած $\boldsymbol{i} \in [\boldsymbol{1}, \boldsymbol{l}]$-ի համար կամ $\boldsymbol{D_i} = \boldsymbol{K_j}$ ինչ որ $\boldsymbol{j} \in [\boldsymbol{1}, \boldsymbol{m}]$-ի համար, կամ $\boldsymbol{D_i}$-ն $(\boldsymbol{x_h} = \boldsymbol{0}) \vee (\boldsymbol{x_h} = \boldsymbol{1})$ բուլյան հենասույթ է $\boldsymbol{h} \in [\boldsymbol{1}, \boldsymbol{n}]$-ի համար, կամ $\boldsymbol{D_i}$-ին արտածվել է $\boldsymbol{D_j}, \boldsymbol{D_k}$-ից $(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{k} < \boldsymbol{i})$ R(lin)-ի հետևյալ արտածման կանոներից մեկով՝

***Ռեզոլյուցիա*՝** Դիցուք $A$-ն և $B$-ն գծային հավասարումների երկու դիզյունկտներ են (հնարավոր է դատարկ դիզյունկտներ), իսկ $L_1$-ը և $L_2$-ը երկու գծային հավասարումներ: $A \vee L_1$-ից և $B \vee L_2$-ից արտածվում է $A \vee B \vee (L_1 + L_2)$ (+ռեզոլյուցիա) կամ $A \vee B \vee (L_1 - L_2)$ (-ռեզոլյուցիա):

***Թուլացում*՝** $A$ գծային հավասարումների դիզյունկտներից արտածվում է $A \vee L$, որտեղ $L$-ը կամայական գծային հավասարում է:

***Պարզեցում*՝** $A \vee (0 = k)$-ից բխում է $A$-ն, որտեղ $A$-ն գծային հավասարումների դիզյունկտ է, իսկ $(k \neq 0)$:

K գծային հավասարումների դիզյունկտների բազմության հերքում R(lin)-ում դատարկ դիզյունկտի՝ $(k \neq 0)$-ի արտածումն է վերը նշված համակարգում:

**E(lin) համակարգ**

Այժմ կներկայացնենք նոր արտածման համակարգ՝ հիմնված որոշիչ ԴՆՁ-ի վրա: Դիցուք տրված $\varphi$–ի համար $K = \left\{p_{i_1}^{\sigma_1}, p_{i_2}^{\sigma_2}, \dots, p_{i_m}^{\sigma_m}\right\}$–ը $\varphi - 1$–որոշիչ կոնյունկտ է: $K^0$-ով կնշանակենք հետևյալ հավասարումը՝ $\sum_{j=1}^{m} \alpha\left(p_{i_j}^{\sigma_j}\right) = 0$, որտեղ

$$\alpha\left(p_{i_j}^{\sigma_j}\right) = \begin{cases} x_{ij}, & \text{եթե } \sigma_j = 1 \\ 1 - x_{ij}, & \text{եթե } \sigma_j = 0 \end{cases}$$

Եթե $\varphi$-ն n փոփոխականի ասույթային բանաձև է և $\boldsymbol{D} = \{\boldsymbol{K_1}, \boldsymbol{K_2}, \dots, \boldsymbol{K_l}\}$-ն որոշիչ ԴՆՁ $\varphi$–ի համար, ապա որպես E(lin)–ի հենասույթներ կհամարենք հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_i = 0 \vee x_i = 1}, & \boldsymbol{1 \le i \le n} \\ \boldsymbol{K_j^0}, & \boldsymbol{1 \le j \le l} \end{cases}$$

Նշենք, որ եթե $\varphi$-ն նույնաբանություն է, ապա այս համակարգը անհամատեղելի է: Որպես արտածման կանոններ կհամարենք R(lin)-ի համար վերը սահմանված կանոնների երկակի կանոնները:

Երբեմն մենք արտածման և հերքման վերաբերյալ կօգտագործենք միևնույն «արտածում» տերմինը:

Հետագայում դիտարկվում են նաև այս չորս համակարգերին տեղադրման կանոնի որոշակի տարատեսակների ավելացմամբ ստացված որոշ իմաստով «առավել արդյունավետ» համակարգեր:

### 1.3. Արտածման բարդության բնութագրիչների սահմանումները

Սույն աշխատանքում դիտարկված ասույթային հաշվի յուրաքանչյուր Φ արտածման համակարգ սահմանվում է հենասույթների որոշակի բազմությամբ /կամ նախապես սևեռված, կամ յուրաքանչյուր բանաձևի համար ուրույն ձևով ընտրվող/ և որոշակի արտածման կանոնների բազմությամբ: Հետևելով Ֆիլմուս և համահեղինակներ[6] հոդվածի, տանք արտածման բարդության բնութագրիչների ֆորմալ սահմանումները:

Եթե Φ-ում արտածումը ներկայացնենք որպես տողերի հաջորդականություն, որտեղ ցանկացած տող իրենից կներկայացնի կամ հենասույթ կամ արտածվել է նախորդ տողերի վերջավոր բազմությունից որոշակի արտածման կանոնով, ապա Φ-կոնֆիգուռացիա կանվանենք այդպիսի տողերի որևէ բազմություն: Φ-կոնֆիգուռացիաների $\{\boldsymbol{D_0}, \boldsymbol{D_1}, \dots, \boldsymbol{D_r}\}$ հաջորդականությունը կանվանենք Φ-ապացույց, եթե $D_0 = \emptyset$ և բոլոր $t$-երի $(1 \le t \le r)$ համար $D_t$-ն ստացվում է $D_{t-1}$-ից հետևյալ քայլերով՝

***Հենասույթի ավելացում***. $\boldsymbol{D_t} = \boldsymbol{D_{t-1}} \cup \{\boldsymbol{L_A}\}$, որտեղ $\boldsymbol{L_A}$-ն հենասույթ է $\boldsymbol{\Phi}$-ում:

***Արփածման կանոն***. $\boldsymbol{D_t} = \boldsymbol{D_{t-1}} \cup \{\boldsymbol{L}\}$, որտեղ $\boldsymbol{L}$-ը ստածվել է $\boldsymbol{\Phi}$-ի արտածման կանոններից $\boldsymbol{D_{t-1}}$-ին պատկանող նախորդ տողերից:

***Հեռացում***. $\boldsymbol{D_t} \subset \boldsymbol{D_{t-1}}$:

$\boldsymbol{\varphi}$ **նույնաբանության** $\boldsymbol{\Phi}$**-արտածում** կանվանենք **Φ**-ում այնպիսի $\{\boldsymbol{D_1}, \boldsymbol{D_2}, \dots, \boldsymbol{D_r}\}$ **Φ**-*ապացույց*, որ $\boldsymbol{D_0} = \emptyset$ և $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}} \in \boldsymbol{D_r}$, որտեղ $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}$-ն $\boldsymbol{\varphi}$ բանաձևը ներկայացնող որոշակի տող է (կոնկրետ համակարգից կախված այն կարող է լինել կամ դատարկ կոնյունկտ, կամ դատարկ դիզյունկտ, կամ նույն $\boldsymbol{\varphi}$-ն, կամ որևէ այլ «պատկեր»):

$|\boldsymbol{\varphi}|$-ով կնշանակենք $\boldsymbol{\varphi}$ բանաձևի երկարությունը (կամ նրա ինչ-որ ներկայացման երկարությունը, օրինակ, երբ ներկայացված է որպես գծային հավասարում որոշ համակարգում), սահմանված որպես բոլոր տրամաբանական գործողությունների /կամ այլ գործողությունների/ մուտքերի քանակը: Ակնհայտ է, որ բանաձևի ընդհանուր երկարությունը, որը ներառում է բոլոր փոփոխականների մուտքերը, տրամաբանական գործողությունները և փակագծերը, սահմանափակված է $|\boldsymbol{\varphi}|$-ից կախված գծային ֆունկցիայով:

*Φ-արփածման* ***երկարությունը (l-բարդություն)*** *հավասար է արփածման բոլոր փողերի երկարությունների գումարին:*

*Φ-արփածման* ***քայլերի քանակը (t-բարդություն)*** *հենասույթների և արփածման կանոնների կիրառումների քանակն է:*

*Φ-արփածման* ***ծավալը (s-բարդություն)*** *մաքսիմալ կոնֆիգուռացիայի ծավալն է, որփեղ կոնֆիգուռացիայի ծավալը նրա մեջ գփնվող փառերի մուփքերի քանակն է :*

---

[6] Y. Filmus, M. Lauria, J. Nordstrom, N. Thapen, N. Ron-Zewi, 2012, Space Complexity in Polynomial Calculus, 2012 IEEE Conference on Computational Complexity (CCC), 334-344

*Փ-արփածման **լայնությունը** (**w-բարդություն**) հավասար է արփածման ամենաերկար փողի երկարությանը:*

Դիցուք, ունենք $\boldsymbol{\Phi}$ արտածման համակարգը և $\boldsymbol{\varphi}$ նույնաբանությունը: $\boldsymbol{t}_{\varphi}^{\phi}(\boldsymbol{l}_{\varphi}^{\phi},\boldsymbol{s}_{\varphi}^{\phi},\boldsymbol{w}_{\varphi}^{\phi})$-ով նշանակենք $\boldsymbol{\Phi}$ համակարգում $\boldsymbol{\varphi}$-ի բոլոր արտածումների $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{l},\boldsymbol{s},\boldsymbol{w})$-բարդությունների մինիմալ արժեքը:

Դիցուք, $\boldsymbol{\Phi_1}$-ն ու $\boldsymbol{\Phi_2}$-ը երկու տարբեր արտածման համակարգեր են: Հետևելով Կուկին և Ռեքաուին, հիշեցնենք բազմանդամային հանգեցման գաղափարը:

**Սահմանում 1.3.1:** $\boldsymbol{\Phi_1}$-ը $\mathbf{p}-\mathbf{t}$-հանգեցվում է ($\mathbf{p}-\mathbf{l}$-հանգեցվում է) $\boldsymbol{\Phi_2}$-ին, եթե գոյություն ունի այնպիսի $\mathbf{p}()$ բազմանդամ, որ և $\boldsymbol{\Phi_1}$-ում, և $\boldsymbol{\Phi_2}$-ում արտածելի յուրաքանչյուր $\boldsymbol{\varphi}$ բանաձևի համար $\mathbf{t}_{\boldsymbol{\varphi}}^{\boldsymbol{\Phi_2}} \leq \mathbf{p}(\mathbf{t}_{\boldsymbol{\varphi}}^{\boldsymbol{\Phi_1}})$ ($\mathbf{l}_{\boldsymbol{\varphi}}^{\boldsymbol{\Phi_2}} \leq \mathbf{p}(\mathbf{l}_{\boldsymbol{\varphi}}^{\boldsymbol{\Phi_1}})$):

**Սահմանում 1.3.2:** $\boldsymbol{\Phi_1}$ և $\boldsymbol{\Phi_2}$ համակարգերը $\mathbf{p}-\mathbf{t}$-համարժեք են ($\mathbf{p}-\mathbf{l}$-համարժեք են), եթե $\boldsymbol{\Phi_1}$-ը $\mathbf{p}-\mathbf{t}$-հանգեցվում է ($\mathbf{p}-\mathbf{l}$-հանգեցվում է) $\boldsymbol{\Phi_2}$-ին և $\boldsymbol{\Phi_2}$-ը $\mathbf{p}-\mathbf{t}$-հանգեցվում է ($\mathbf{p}-\mathbf{l}$-հանգեցվում է) $\boldsymbol{\Phi_1}$-ին:

**Սահմանում 1.3.3:** $\boldsymbol{\Phi_1}$ համակարգը ունի ցուցչային արագացում $\boldsymbol{\Phi_2}$ համակարգի նկատմամբ, եթե $\boldsymbol{\Phi_2}$-ը $\mathbf{p}-\mathbf{l}$-հանգեցվում է $\boldsymbol{\Phi_1}$-ին և գոյություն ունի $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{n}}$ բանաձևերի այնպիսի հաջորդականություն, որ $\mathbf{l}_{\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{n}}}^{\boldsymbol{\Phi_2}} > \mathbf{2}^{\boldsymbol{\Theta}\left(\mathbf{l}_{\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{n}}}^{\boldsymbol{\Phi_1}}\right)}$:

Ա.Չուբարյանի վերոհիշյալ աշխատանքում ապացուցված է E և R համակարգերի բազմանդամային համարժեքությունները և ըստ քայլերի և ըստ երկարությունների: Դժվար չէ համոզվել, որ E(lin) և R(lin) համակարգերի բազմանդամային համարժեքությունները կարելի է ապացուցել նմանատիպ մեթոդներով՝ ձևափոխելով E համակարգում ցանկացած արտածում R համագարգի արտածման և հակառակը:

## 1.4. Դժվար արտածելի բանաձևեր

Երկարժեք տրամաբանության տարբեր համակարգերում արտածումների բարդությումների գնահատականների համեմատությունների համար կարևոր դեր են խաղում հետևյալ բանաձևերը՝

$$\boldsymbol{TTM_{n,m}} = \bigvee_{(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n)\in E^n} \bigwedge_{j=1}^{m} \bigvee_{i=1}^{n} \boldsymbol{p_{i_j}}^{\sigma_j} \; (\boldsymbol{n} \geq \mathbf{1}, \mathbf{1} \leq \boldsymbol{m} \leq \mathbf{2}^{\boldsymbol{n}} - \mathbf{1}),$$

որոնք նշված միջակայքի յուրաքանչյուր ֆիքսված $n \geq 1$-ի և $\boldsymbol{m}$-ի համար արտահայտում են հետևյալ ճշմարիտ պնդումը. տրված n x m չափանի 0,1-մատրիցում կարելի է այնպես շրջել որոշ տողեր (փոխարինելով 0-ն 1-ի և հակառակը), որ կամայական սյուն պարունակի առնվազն մեկ հատ 1:

Ատենախոսությունում n-ի և m-ի որոշակի արժեքների համար տրվում է նաև այս պնդման ընդհանրացումը բազմարժեք տրամաբանության որոշակի տարատեսակների համար և գնահատվում են արտածումների բարդությունները համապատասխան բանաձևերի համար:

**Երկրորդ գլխում** ուսումնասիրվել են արտածումների բարդության բնութագրիչները R(lin) և E(lin) համակարգերում, ինչպես նաև նրանց որոշակի ընդլայնումներում: Հարկ ենք համարում նշել, որ R(lin) համակարգը իսկզբանե ընդունվել էր մեծ ոգևորությամբ, քանի որ մինչ այդ հայտնի «բարդ» բանաձևերը / Pigeon Hole Principle, Clique Colouring pair, Hool's theorem, Ցեյտինի բանաձևերը և այլն/, որոնք մի շարք հանրահայտ համակարգերում ունեն արտածման երկարության ստորին ցուցչային գնահատականներ, R(lin)–ում արտածվեցին բազմանդամային բարդությամբ: Սույն ատենախոսությունում ապացուցվել է, որ կան բանաձևեր, որոնք «բարդ» են նաև R(lin) համակարգում: Ներմուծվել է նաև տեղադրման կանոնի մի տարատեսակ՝ վերանվանման (renaming) կանոնը $\beta = \binom{x_{j1}, x_{j2},\dots,x_{jk}}{x_{i1}, x_{i2},\dots,x_{ik}}$, համաձայն որի յուրաքանչյուր $x_{im}$ փոփոխականը փոխարինվում է $x_{jm}$ ($1 \le m \le k$) փոփոխականով: R(lin)+renaming-ով և E(lin)+renaming-ով նշանակված են renaming կանոնով համալրված համապատասխանաբար R(lin) և E(lin) համակարգերը:

Դիցուք $\varphi_n = TTM_{n,2^n-1}$, իսկ $K_n$ –ը $\neg\varphi_n$ –ին համապատասխանող ԿՆՁ –ն է R(lin)-ում: Ապացուցվել են հետևյալ երկու պնդումները.

**Թեորեմ 2.1:** $l_{K_n}^{R(lin)} \ge t_{K_n}^{R(lin)} \ge 2^{2^n-1}$ և $l_{\varphi_n}^{E(lin)} \ge t_{\varphi_n}^{E(lin)} \ge 2^{2^n-1}$:

Հաշվի առնելով, որ $|\varphi_n|=|K_n|=n2^n(2^n-1)$, R(lin) և E(lin) համակարգերից ոչ մեկը ***սուպեր չէ***:

**Թեորեմ 2.2:** Գոյություն ունի այնպիսի p() բազմանդամ, որ

$$t_{K_n}^{R(lin)+renaming} \le l_{K_n}^{R(lin)+renaming} \le p(|K_n|).$$

$$t_{\varphi_n}^{E(lin)+renaming} \le l_{\varphi_n}^{E(lin)+renaming} \le p(|\varphi_n|).$$

Այս երկու պնդումները փաստում են, որ R(lin)+renaming և E(lin)+renaming համակարգերը **ունեն ցուցչային արագացում** համապատասխանաբար R(lin) և E(lin) համակարգերի նկատմամբ:

**Երրորդ գլխում** ուսումնասիրվում են E տիպի համակարգերը դասական, ինտուիցիոնիստական և մինիմալ տրամաբանությունների համար, որոնք նշանակված են համապատասխանաբար E, EI և EM-ով, և դրանց որոշակի ընդլայնումները: Կոնյունկտների C բազմության համար, որոնցից առնվազն մեկը պարունակում է p փոփոխականը, և լիտերալների դիզյունկցիա հանդիսացող A բանաձևի համար ներմուծված է տեղադրման հետևյալ կանոնը՝ $\frac{C}{S(C)_p^A}$, որտեղ $S(C)_p^A$-ով նշանակված է $C$-ում $p$-ի փոխարեն ամենուրեք A բանաձևի տեղադրման արդյունքը: Ներմուծված է նաև կրճատման կանոնի ընդհանրացումը՝ $\frac{C_1 \cup \{A\} C_2 \cup \{\bar{A}\}}{C_1 \cup C_2}$, որտեղ A-ն կամ լիտերալ է, կամ արտածման որևէ քայլում տեղադրված բանաձև:

Տեղադրման կանոնով համալրված E (EI, EM) համակարգը նշանակված է SEC (SEI, SEM)-ով: Եթե որևէ սևեռված $\ell$-ի համար տեղադրվող բանաձևերի տրամաբանական կապերի քանակը սահմանափակված է $\ell$-ով, ապա համապատասխան համակարգը նշանակված է $S_\ell EC$ ($S_\ell EI$, $S_\ell EM$)-ով:

Այս գլխի հիմնական արդյունքն է՝

**Թեորեմ 3.1:**

1) $\forall l \geq 0$-ի համար $S_{l+1}EC$ ($S_{l+1}EI, S_{l+1}EM$) համակարգը ունի ցուցչային արագացում $S_lEC$ ($S_lEI$, $S_lEM$) համակարգի նկատմամբ, եթե դիտարկվում են միայն ծառատիպ արտածումները:

2) $SEC$ ($SEI$, $SEM$) համակարգը բազմանդամորեն համարժեք է Ֆրեգեի $\mathcal{F}C$ ($\mathcal{F}I, \mathcal{F}M$) համակարգին, որտեղ $\mathcal{F}$C, $\mathcal{F}$I և $\mathcal{F}$M –ով նշանակված են համապատասխանաբար Ֆրեգեի համակարգերը դասական, ինտուիցիոնիստական և մինիմալ տրամաբանությունների համար:

Հաշվի առնելով E և R համակարգերի բազմանդամային համարժեքությունը և երկակիությունը, նույնատիպ եղանակով կառուցվում են SRC (SRI, SRM) և S$_\ell$RC (S$_\ell$RI, S$_\ell$RM) համակարգերը, որոնց համար տեղի ունեն վերոհիշյալ երկու պնդումները: Այսպիսով, նշված տրամաբանություններից յուրաքանչյուրի Ֆրեգեի և E ու R համակարգերի միջև **կառուցված են համակարգերի անվերջ բազմություններ, որոնցից յուրաքանչյուր հաջորդը էապես ավելի արդյունավետ է, քան նախորդը:**

**Չորրորդ գլխում Ֆրեգեի յուրաքանչյուր** համակարգում որոշակի դասի բանաձևերի արտածումների քայլերի համար ստացված է **սուպեր-գծային ստորին գնահատական** (մինչ այժմ հայտնի էր միայն գծային ստորին գնահատական և միայն Ֆրեգեի մեկ համակարգի քայլերի համար նմանատիպ գնահատական նախկինում ստացվել էր Ա. Չուբարյանի և Ա. Մնացականյանի աշխատությունում[7]): Այդ հոդվածում օգտագործված արտածումների աջակողմյան հատվածության գաղափարը ընդհանրացվել է Ֆրեգեի յուրաքանչյուր համակարգի համար և որոշակի դասի նույնաբանությունների համար գնահատվել են արտածումների քայլերը, հիմնվելով «անկախ էական ենթաբանաձևերի» մուտքերի մաքսիմալ խորությունների գումարի մեծության վրա:

**Հինգերորդ գլխում** բազմարժեք տրամաբանության որոշ տարատեսակների համակարգերում գնահատվել են բանաձևերի որոշակի հաջորդականությունների արտածումների բարդությունների բոլոր չորս բնութագրիչները:

Արդյունքների հստակ ձևակերպման համար տանք **k-արժեք (k≥3) տրամաբանության հիմնական գաղափարները**՝ $E_k$–ով նշանակենք հետևյալ բազմությունը $\left\{0, \frac{1}{k-1}, \ldots, \frac{k-2}{k-1}, 1\right\}$: Ասույթային բանաձևերը կառուցվում են հայտնի եղանակով $E_k$-ից արժեքներ ընդունող ասույթային փոփոխականներից /կամ նաև ասույթային հաստատուններից/ և $\wedge$, $\vee$, $\supset, \neg$ (կամ ~) տրամաբանական կապերից, որոնցից յուրաքանչյուրը կարող է սահմանվել տարբեր ձևերով՝

$p \vee q = max(p, q)$ (1) կամ $p \vee q = [(k-1)(p+q)](mod\ k)/(k-1)$ (2)

[7] An. Chubaryan, A.Mnatsakanyan, Super linear lower bounds for steps of proofs in some Frege system, News of Science and Education, Sheffield, SCIENCE AND EDUCATION LTD, NR 21(21) 2014, pp.104-110

$p \wedge q = min(p, q)$ (1) կամ $p \wedge q = max(p + q - 1, 0)$ (2)

$$p \supset q = \begin{cases} 1, & p \leq q \\ 1 - p + q, & p > q \end{cases}$$ (1) Լուկասևիչի

կամ

$$p \supset q = \begin{cases} 1, & p \leq q \\ q, & p > q \end{cases}$$ (2) Գյոդելի

$\sim p = 1 - p$ (1) Լուկասևիչի կամ $\neg p = ((k-1)p + 1)(mod\ k)/(k-1)$ (2) ցիկլիկ

Որոշ դեպքերում $\neg p$ նշանակման փոխարեն օգտագործվում է $\bar{p}$ նշանակումը:

$p$ ասույթային փոփոխականին $\delta = \frac{i}{k-1}$ $(0 \leq i \leq k-1)$-ի համար սահմանված է նաև ***ցուցչային*** ֆունկցիան.

$p^{\delta}$ որպես $(p \supset \delta) \wedge (\delta \supset p)$ (1),

$p^{\delta}$ որպես $p$-ն $(k-1)-i$ հատ ցիկլիկ ժխտումներով (2):

Եթե սևեռվում է որպես «ճշմարտություն» 1 արժեքը /$\frac{1}{2} \leq \frac{\boldsymbol{i}}{\mathbf{k-1}} \leq 1$ միջակայքի յուրաքանչյուր արժեք/, ապա $p_1, p_2, \ldots, p_n$ փոփոխականներով յուրաքանչյուր $\varphi$ բանաձև կոչվում է $\mathbf{1} - \boldsymbol{k}$-**նույնաբանություն**($\geq \mathbf{1/2} - \boldsymbol{k}$-**նույնաբանություն**), եթե ցանկացած $\tilde{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n) \in E_k^n$ հավաքածուի համար, վերագրելով յուրաքանչյուր $p_j$–*ին* $\delta_j (1 \leq j \leq n)$ արժեքը, ստանում ենք $\varphi$-ի արժեքը 1 (կամ $\frac{1}{2} \leq \frac{i}{k-1} \leq 1$ միջակայքից որևէ մեկը):

Ա.Չուբարյանի և Ա.Խամիսյանի կողմից մի քանի աշխատություններում բազմարժեք տրամաբանության բոլոր հնարավոր տարբերակների համար կառուցվել են մի քանի համապիտանի համակարգեր, այդ թվում նաև, ընդհանրացնելով բազմարժեք տրամաբանության համար ոԴՆՁ-ի գաղափարը և կրճատման կանոնով E տիպի համակարգերը: Ատենախոսությունում բազմարժեք տրամաբանության որոշ տարատեսակների համար կառուցվել են $TTM_{n,m}$-ին նմանատիպ $\mathbf{1} - \boldsymbol{k}$-**նույնաբանություններ** ($\geq \mathbf{1/2} - \boldsymbol{k}$-**նույնաբանություններ**) և համապատասխան ընդհանրացված կրճատման կանոնով համակարգերում գնահատվել են այդ բանաձևերի արտածումների բարդությունների բոլոր բնութագրիչները: Հետազոտված համակարգերն են՝

$\boldsymbol{ELN_k}$ **[1]** - k-արժեք համակարգը **Լուկասևիչի ժխտմամբ** և որպես «ճշմարտություն» սևեռված **1** արժեքով,

$\boldsymbol{ECN_k}$ **[1]** - k-արժեք համակարգը **ցիկլիկ ժխտմամբ** և որպես «ճշմարտություն» սևեռված **1** արժեքով,

$\boldsymbol{ELN_3}$ $\mathbf{[1/2,1]}$ - 3-արժեք համակարգը **Լուկասևիչի ժխտմամբ** և որպես «ճշմարտություն» սևեռված $\mathbf{1/2}$ **և 1-ով,**

$\boldsymbol{ECN_3}$ $\mathbf{[1/2,1]}$ - 3-արժեք համակարգը **ցիկլիկ ժխտմամբ** և որպես «ճշմարտություն» սևեռված $\mathbf{1/2}$ **և 1-ով:**

$\boldsymbol{CN_3}$**-cut-free [1]** - Ֆրեգեի տիպի 3-արժեք համակարգը **ցիկլիկ ժխտմամբ** և որպես «ճշմարտություն» սևեռված 1-ով:

Ապացուցված է, որ

$ELN_k$[1]–ում $1-k$-նույնաբանություններ են հանդիսանում հետևյալ բանաձևերը.

$$L_kTTM_{n,m} = \vee_{(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n)\in E_k^n} \wedge_{j=1}^{m} \vee_{i=1}^{n} {p_{i_j}}^{\sigma_j} \ /n \geq 1, m \leq \mathrm{k}^{[\mathrm{n}/\mathrm{k}]} / \text{ և (1) exponent-ով}$$

$ECN_k$[1]–ում $1-k$-նույնաբանություններ են հանդիսանում հետևյալ բանաձևերը.

$$C_kTTM_{n,m} = \vee_{(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n)\in E_k^n} \wedge_{j=1}^{m} \vee_{i=1}^{n} {p_{i_j}}^{\sigma_j} \ /n \geq 1, m \leq \mathrm{k}^{[\mathrm{n}/\mathrm{k}]} / \text{ և (2) exponent-ով}$$

$ELN_3[1/2,$ 1]–ում $\geq 1/2-3$-նույնաբանություններ են հանդիսանում հետևյալ բանաձևերը.

$$L_3TTM_{n,m} = \vee_{(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n)\in E^n} \wedge_{j=1}^{m} \vee_{i=1}^{n} {p_{i_j}}^{\sigma_j} \ /n \geq 1, m \leq 2^n - 1 / \text{ և (1) exponent-ով}$$

$ECN_3[1/2,$ 1]-ում $\geq 1/2-3$-նույնաբանություններ են հանդիսանում հետևյալ բանաձևերը.

$$C_3TTM_{n,m} = \vee_{(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n)\in E_3^n} \wedge_{j=1}^{m} \vee_{i=1}^{n} {p_{i_j}}^{\sigma_j} \ /n \geq 1, m \leq 3^n - 1 / \text{ և (2) exponent-ով:}$$

Այս չորս հաջորդականությունների բանաձևերի արտածումների բարդության բնութագրիչների համար ստացված են հետևյալ գնահատականները.

**Թեորեմ 5.1***:* Գոյություն ունի այնպիսի $\varphi_n$ $\boldsymbol{1-k}$**-նույնաբանությունների** $(k \geq 3)$ հաջորդականություն, որ $\boldsymbol{ELN_k}$**[1]**–ում տեղի ունեն հետևյալ հավասարումները

1) $\log_k(|\varphi_n|) = \theta(n)$;
2) $log_k\log_k(t(\varphi_n)) = \theta(n)$;
3) $log_k\log_k(l(\varphi_n)) = \theta(n)$;
4) $log_k(s(\varphi_n)) = \theta(n)$;
5) $log_k(w(\varphi_n)) = \theta(n)$.

**Թեորեմ 5.2:** Գոյություն ունի այնպիսի $\varphi_n$ $\mathbf{1-k}$**-նույնաբանությունների** $(k \geq 3)$ հաջորդականություն, որ $\mathbf{ECN_k}$**[1]**–ում և $\mathbf{CN_k}$**-Cut-Free[1]**-ում տեղի ունեն հետևյալ հավասարումները

1) $log_k(|\varphi_n|) = \theta(n)$;
2) $log_k\log_k(t(\varphi_n)) = \theta(n)$;
3) $log_k\log_k(l(\varphi_n)) = \theta(n)$;
4) $log_k(s(\varphi_n)) = \theta(n)$;
5) $log_k(w(\varphi_n)) = \theta(n)$.

**Թեորեմ 5.3:** Գոյություն ունի այնպիսի $\varphi_n \geq \mathbf{1/2 - 3}$**-նույնաբանությունների** հաջորդականություն, որ $\mathbf{ELN_3[1/2,\ 1]}$–ում տեղի ունեն հետևյալ հավասարումները

1) $log_3(|\varphi_n|) = \theta(n)$;

2) $log_2 \log_3(t(\varphi_n)) = \theta(n)$;

3) $log_2 \log_3(l(\varphi_n)) = \theta(n)$;

4) $log_3(s(\varphi_n)) = \theta(n)$;

5) $log_3(w(\varphi_n)) = \theta(n)$.

**Թեորեմ 5.4:** Գոյություն ունի այնպիսի $\varphi_n \geq \mathbf{1/2 - 3}$**-նույնաբանությունների** հաջորդականություն, որ $\mathbf{ECN_3[1/2,\ 1]}$–ում տեղի ունեն հետևյալ հավասարումները

1) $log_3(|\varphi_n|) = \theta(n)$;

2) $log_3 \log_3(t(\varphi_n)) = \theta(n)$;

3) $log_3 \log_3(l(\varphi_n)) = \theta(n)$;

4) $log_3(s(\varphi_n)) = \theta(n)$;

5) $log_3(w(\varphi_n)) = \theta(n)$.

**Վեցերորդ գլխում** տրվում են նույնաբանությունների ոԴՆՁ-ների տարատեսակները /**կատարյալ, կրճատված, փակուղային, կարճագույն, մինիմալ**/ և հետազոտված է դրանց կապը արտածումների բարդության բնութագրիչների մեծությունների հետ:

## Հիմնական արդյունքները և հետևությունները

Ատենախոսությունում հետազոտված են արտածումների բարդության տարբեր բնութագրիչների մեծությունները երկարժեք և բազմարժեք տրամաբանությունների ասույթային հաշվի մի շարք համակարգերում: Մասնավորապես ստացված են հետևյալ արդյունքները՝

1. Բանաձևերի որոշակի հաջորդականության համար R(lin) համակարգում ստացված են արտածումների քայլերի և երկարության ստորին ցուցչային գնահատականներ, հետևաբար **R(lin)-ը սուպեր համակարգ չէ**: Ապացուցված է նաև, որ այդ նույն բանաձևերի հաջորդականության արտածումները բազմանդամորեն սահմանափակ են R(lin)+renaming համակարգում, հետևաբար վերջին համակարգը ունի ցուցչային արագացում R(lin)-ի նկատմամբ: Նմանատիպ արդյունքները ստացվել են E(lin) և E(lin)+renaming համակարգերի համար:
2. Սահմանված են R+l-տեղադրություն և E+l-տեղադրություն /$l \geq 0$–տեղադրվող բանաձևերի տրամաբանական գործողությունների քանակն է /տիպի համակարգերը դասական, ինտուիցիոնիստական և մինիմալ տրամաբանությունների համար և ապացուցված է, որ ծառատիպ որտածումների համար R+(l+1)-տեղադրություն (E+(l+1)-տեղադրություն) համակարգը ունի

քայլերի քանակի ցուցչային արագացում R+I-տեղադրություն (E+ I-տեղադրություն) համակարգի նկատմամբ, իսկ R+տեղադրություն և E+տեղադրություն համակարգերը համարժեք են Ֆրեգեի համակարգերին: Այսպիսով, նշված տրամաբանություններից յուրաքանչյուրի Ֆրեգեի և E ու R համակարգերի միջև **կառուցված են համակարգերի անվերջ բազմություններ, որոնցից յուրաքանչյուր հաջորդը էապես ավելի արդյունավետ է, քան նախորդը**:

3. Ֆրեգեի **բոլոր** համակարգերի համար արտածումների քայլերի համար ստացված է սուպեր-գծային ստորին գնահատական:
4. Բազմարժեք տրամաբանության որոշ տարատեսակների համակարգերում բանաձևերի որոշակի հաջորդականությունների արտածումների բարդությունների բոլոր չորս բնութագրիչների համար ստացված են օպտիմալ /նույն կարգի վերին և ստորին/ գնահատականներ:
5. Ուսումնասիրված են տարբեր տրամաբանությունների նույնաբանությունների որոշիչ դիզյունկտիվ նորմալ ձևերի տարատեսակները /**կատարյալ, կրճատված, փակուղային, կարճագույն, մինիմալ**/ և հետազոտված է դրանց կապը արտածումների բարդության բնութագրիչների մեծությունների հետ:

## Ատենախոսության թեմայով հրապարակումների ցանկը


1. Tshitoyan A.S., BOUNDS OF PROOF COMPLEXITY MEASURES FOR SOME SEQUENCE OF MANY-VALUED TAUTOLOGIES, Журнал «Проблемы современной науки и образования», N 3, (123), И-во «Проблемы науки», Иваново, РФ, 2018, 17-23.
2. Arman Tshitoyan, Bounds of proof complexities in some systems for many-valued logics, Isaac Scientific Publishing (ISP), Journal of Advances in Applied Mathematics, Vol. 2, No. 3, July 2017, 164-172. https://dx.doi.org/10.22606/jaam.2017.23006
3. Chubaryan Anahit, Khamisyan Artur, Arman Tshitoyan, On some systems for Łukasiewicz's many-valued logic and its properties, Scientific Journal "Fundamentalis Scientiam", Vol.8(8), Madrid, Spain, 2017, 74-79.
4. Chubaryan A.A., Tshitoyan A.S., On some propositional proof systems for various logics, Sciences of Europe, Vol 1, # 11 (11), Physics and Mathematics, Praha, Czech Republic, 2017, 26-29.
5. А.А.Чубарян, А.С.Читоян, А.А. Хамисян, О некоторых системах доказательств для многозначных логик и сложностях выводов в них, ДНАН Армении, том 116, N2, Прикладная Математика, 2016, 18-24.
6. An.Chubaryan, Arm.Chubaryan, A.Tshitoyan, Refutation of hard-determinable formulas in the system "Resolution over Linear Equations" and its generalization, Pure and Applied Mathematics Journal, USA, 2013; 2(3); 128-133.
7. Armine A.Chubaryan, A.S.Tshitoyan, Some Generalization of Proof System "Resolution over Linear Equations", ДНАН Армении, том 113, N1, Прикладная Математика, 2013, 7-12.
8. An.Chubaryan, Arm.Chubaryan, A.Tshitoyan, The Properties of Determinative Disjunctive Normal Forms and Systems Based on Them, Journal of Mathematics Research, Vol.4, No 6, Toronto, Published by Canadian Centre of Science and Education, 2012, pp.89-96.

9. Anahit Chubaryan, Artur Khamisyan, Arman Tshitoyan, Some new proof systems for a version of many-valued logics and proof complexities in it, ASL, ESM, Logic Colloquium – 2016, Leeds, Volume of Abstracts, 70.
10. An.Chubaryan, Arm. Chubaryan, A.Tshitoyan, Some notes about lower bounds for steps and sizes of proofs in Frege systems. Logic Colloquium 2015 (LC 2015), Annual European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic (ASL), University of Helsinki, 3–8 August 2015, The Bulletin of Symb. Logic V.22, N3, 2016, 391-392.
11. An.Chubaryan, Arm. Chubaryan, A.Tshitoyan, On lower bounds for steps and sizes of proofs in Frege systems, Proceedings of CSIT-2015, Yerevan.

**Abstract**

Two main subjects of this thesis are **the quantitative studies of propositional proof systems** for two-valued and many-valued logics: a) investigations of different proof complexity measures in different propositional systems and b) improvement of some known lower and upper bounds for steps and sizes of proofs in some systems.

The propositional calculus had an undeserved reputation among logicians as being essentially trivial, but at present it is a strong conviction, that propositional calculus presents one of the most challenging and intriguing problems in modern logic. Interest in the problem arose from two fields connected with computers, automated theorem proving and computational complexity theory.

One of the most fundamental problems of the proof complexity theory is to find an efficient proof system for classical propositional calculus. According to the opinion, a truly "effective" system must have a polynomial size $p(n)$ proof for every tautology of size $n$. Cook and Reckhow named such system a *super system*. They showed that ***NP*** = ***coNP*** if there exists a super system. Lately it was proved that ***NP*** = ***PSPACE***, and as corollary from this result, it follows that ***NP*** = ***coNP*** = ***PSPACE***, hence it must be some propositional proof system, which is ***super system***. It is well known that many systems are not super, and for some natural systems this question is still open.

Most current research in proof complexity is driven by other concerns also. One such concern is the connection to SAT solving. In fact, most modern-day SAT solvers can be seen to search for proofs in systems at fairly low levels in the proof complexity hierarchy (*Resolution, Polynomial Calculus, Analytic Tableaux, Catting Planes, Cut-fee Sequence, Elimination, Bounded Frege*), and upper and lower bounds for these proof systems hence give information about the potential and limitations of the corresponding SAT solvers, therefore the investigations of proof complexities in such "weak" systems are very important also.

It is known that **many-valued logic** as a separate subject was created and developed first by Łukasiewicz, who used a third truth value for "possible" (or "unknown"). In the meantime many interesting applications of **many-valued logic** were found in different fields.

All above questions, besides their mathematical and philosophical significance, ***have practical applications*** in such areas as Logic, Mathematics, Formal Verification, Artificial Intelligence, Operations Research, Computational Biology, Cryptography, Data Mining, Machine Learning, Hardware Design etc., therefore these investigations are very actual.

**Main results of this work are the following:**

1. The power of the propositional proof system R(lin) (Resolution over Linear Equations), which is the generalization of R (Resolution System), is investigated. It is known that many tautologies, which require the exponential lower bounds of proof complexities in R, have polynomially bounded proofs in R(lin). It is shown first that there are the sequence of unsatisfiable collections of disjuncts of linear equations, which require exponential lower bounds in R(lin), therefore this proof system **is not super**. After adding the **renaming** rule, mentioned collections have polynomially bounded refutations. The analogous results are

shown for dual systems E(lin) and E(lin)+renaming, which are based on the linear equations conjuncts.

2. The families of some propositional proof systems with full substitution rule and with restricted substitution rules are introduced for Classical, Intuitionistic and Minimal (Johansson's) logics on the base of R (Resolution System) and dual E (Elimination System), and the efficiencies of introduced systems are compared for every mentioned logic. It is shown that for each of mentioned logics the introduced system with full substitution rule is polyomially equivalent to Frege systems by size, but for every $\ell \geq 1$ systems with ℓ-restricted substitution rule, where the number of connectives for substituted formula is bounded by ℓ, proofs in tree form can have an exponential speed-up over the one, bounded by ℓ-1. So, the hierarchies of propositional proof systems for above mentioned logics are completed with two infinite sequences of new systems.

3. Only $\Omega(n^2)$ bounds of proof sizes and $\Omega(n)$ bounds of proof steps for tautologies with the length $n$ were known for most natural propositional proof systems - Frege systems. Recently the super-linear lower bound for proof steps was obtained for some fixed Frege system. In this work it is **proved that in every Frege system the lower bounds for proof steps (for proof sizes) for some sequence of tautologies $\varphi_n$ are super-linear (super-quadratic) in the lenghts of tautologies.**

4. The main proof complexity characteristics (size, step, space, width) in proof systems for some versions of many valued propositional logic are investigated for four sequences of *k*-valued (k≥3) tautologies. We consider the systems, based on determinative disjunctive normal for many-valued logic with two versions of *negation* and with one or more than one designated values. For considered sequences of tautologies simultaneously optimal bounds for different proof complexity measures (asymptotically the same upper and lower bounds for each measures) are obtained.

5. Some structural and numerical properties of varieties for determinative disjunctive normal forms are investigated. We consider for classical and non-classical propositional logics some proof systems, which are constructed on the base of determinative disjunctive normal forms. The relations between the proof complexities in some well-known classical and non-classical proof systems (Resolution, Cut-free sequent, Gentzen refutation, Cutting planes etc.) and numerical properties of varieties for determinative disjunctive normal forms for classical and non-classical tautologies are investigated.

## Резюме

В диссертации исследованы два основных направления количественного изучения пропозициональных систем выводов двузначной и многозначных логик: а) оценки величин различных сложностных характеристик выводов для ряда новых пропозициональных систем, б) уточнение ряда известных нижних и верхних оценок длин и шагов выводов для некоторых традиционных систем выводов.

Пропозициональные системы выводов пользовались в логичесой среде незаслуженной репутацией существенно тривиальных объектов для исследований, однако в настоящее время самые важные и интригующие проблемы современной логики относятся именно к пропозициональным системам. Интерес к этим проблемам возникли из двух областей, связанных с компьютерами: автоматизцией доказательства теорем и теории сложности вычислений.

Одной из фундаментальных проблем теории сложностей выводов является построение эффективной системы выводов для классической пропозициональной логики. Считается естественным, что в действительно «эффективной» системе для некоторого полинома $p$ длина вывода любой тавтологии длины $n$ не должна превышать $p(n)$. Cook и Reckhow назвали такую систему ***супер*** системой и доказали, что ее существование равнозначно соотношению **NP = coNP**. Недавно было доказано, что **NP = PSPACE**, откуда следует, что **NP = coNP = PSPACE**, а следовательно, супер система существует. Известно, что многие системы не являются супер системами, но для многих более традиционных систем этот вопрос пока открыт.

Многие современные исследования сложностей выводов вызваны также иными интересами. Один из них связан с решением проблемы ВЫПОЛНИМОСТИ (SAT solving). Исследования этой проблемы проводятся в «слабых» системах (*Resolution, Polynomial Calculus, Analytic Tableaux, Catting Planes, Cut-fee Sequence, Elimination, Bounded Frege*), что дает информацию о потенциально необходимых для решения проблемы ресурсах. Следует отметить, что ряд экспериментально полученных результатов практически совпадают с оценками space сложности в «слабых» системах, а следовательно, исследования этих систем также важны.

Известно, что многозначные логики, впервые введеные Лукасевичем, являются отдельным объектом исследований и в настоящее время имеют интересные приложения в разных областях.

Все вышеперечисленные проблемы помимо математического и философского интереса, имеют также **практическое применемие** в таких областях, как Logic, Mathematics, Formal Verification, Artificial Intelligence, Operations Research, Computational Biology, Cryptography, Data Mining, Machine Learning, Hardware Design и т.д., следовательно, эти исследования весьма актуальны.

**Основные результаты диссертации следующие:**

1. Исследована эффективность пропозициональной системы R(lin) (Resolution over Linear Equations), которая является обощением системы R (Resolution System). Известно, что практически все известные тавтологии, которые в R имеют экспоненциальную нижнюю оценку длины вывода, имеют полиномиальньо ограниченные выводы в R(lin). В диссертации впервые построена последовательность невыполнимых систем дизъюнктов, составленных из линейных равенств, опровержение которых в R(lin), возможно с не менее, чем экспоненциальной сложностью, а следовательно, система **R(lin) не является супер системой**. Расширение **R(lin)** правилом **переименования** позволяет опровергать те же системы дизъюнктов уже с полиномиальной сложностью. Аналогичные результаты получены для двойственных систем E(lin) и E(lin)+renaming, которые основаны на конъюнктах линейных равенств.
2. Для классической, интуицинистской и минимальной логик на базе систем R (Resolution System) и E (Elimination System) построены пропозициональные системы выводов с правилом подстановки и $\ell$-ограниченными правилами подстановки, при которых количество логических связок в подставляемой формуле $\leq\ell$. Доказано, что для каждой из названных логик системы с полным правилом подстановки полиномиально эквивалентны соответствующим системам Фреге, а для каждого $\ell \geq 1$ системы с $\ell$-ограниченными правилами подстановки имеют экспоненциальное ускорение над системами с ($\ell$-1)-ограниченными правилами подстановки. Таким образом в иерархиях пропозициальных систем появились две бесконечные последовательности новых систем.
3. Во **всех системах Фреге** для некоторой последовательности тавтологий впервые получены ***супер-линейные*** (от длины формул) нижние оценки для шагов выводов. Отметим, что недавно только для одной из систем Фреге была получена аналогичная оценка.
4. Для четырех последовательностей k-значных ($k\geq3$) тавтологий исследованы основные сложностные характеристики выводов (size, step, space, width) в ряде систем некоторых версий многозначных логик с одним или двумя выделенными значениями, основанных на определяющих дизъюнктивных нормальных формах с двумя определениями отрицаний. Для рассмотренных последовательностей тавтологий получены одновременно оптимальные оценки величин различных сложностей выводов (ассимптотически одинаковые нижние и верхние оценки для каждой характеристики).
5. Исследованы некоторые структурные и количественные свойства определяющих дизъюнктивных нормальных форм. Для классических и неклассических логик рассмотрены пропозициональные системы выводов, основанные на определяющих дизъюнктивных нормальных формах. Исследованы соотношения между сложностями выводов в этих новых системах, а также в некоторых известных системах классической и неклассических логик (Resolution, Cut-free sequent, Gentzen refutation, Cutting planes etc.) с одной стороны и некоторыми количественными характеристиками определяющих дизъюнктивных нормальных форм с другой стороны.