ՀՀ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ
ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ
ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Աշոտ Մինասյան Վալերիի

Գծայնացվող ծածկույթներ վերջավոր դաշտերում

Ա.01.09 Մաթեմատիկական կիբեռնետիկա և մաթեմատիկական տրամաբանություն մասնագիտությամբ Ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման

ԱՏԵՆԱԽՈՍՈՒԹՅՈՒՆ

Գիտ. ղեկավար՝ ֆ.մ.գ.դ., պրոֆ. Ա.Ա.Ալեքսանյան

ԵՐԵՎԱՆ - 2018

Բովանդակություն

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Թեմայի արդիականություն: Բուլյան ֆունկցիաների դիզյունկտիվ նորմալ ձևերը դիսկրետ մաթեմատիկայի և մաթեմատիկական կիբեռնետիկայի հիմնական, հետազոտման առարկաներից են: Դրանք լայն կիրառություն ունեն գիտության և տեխնիկայի բազմաթիվ ոլորտներում: Դիզյունկտիվ նորմալ ձևերի տեսությունը լուրջ զարգացում ապրեց անցած դարի կեսերին Ս. Յաբլոնսկու, Յու. Ժուրավլյովի, Ա. Սապոժենկոյի, Յու. Լ. Վասիլևի, Օ. Լուպանովի, Լ. Ասլանյանի աշխատանքներում: Հետագայում Ա. Անդրեևը և Ա. Կորշունովը շարունակեցին զարգացնել այդ տեսությունը՝ ստանալով կարճագույն դիզյունկտիվ նորմալ ձևերի ասիմպտոտիկ արժեքը համարյա բոլոր բուլյան ֆունկցիաների համար:

Առաջացան դժվարություններ այդ արդյունքները կիրառական խնդիրներ լուծելու ժամանակ կիրառելիս: Այդ դժվարությունները կապված էին ոչ թե սկզբնական խնդրի, այլ դիզյունկտիվ նորմալ ձևերի մոդելի հետ, որը թույլ չէր տալիս կիրառել հանրահաշվական մոտեցումներ:

Տրամաբանական ֆունկցիաների հնարավոր պարզ դիզյունկտիվ նորմալ ձևերով իրականացման վրա են հիմնված ինտեգրալ սխեմաների նախագծման և անսարքությունների հայտնաբերման հիմնական կիրառական մեթոդները: Կան բավական մեծ թվով դիսկրետ էքստրեմալ խնդիրներ, որոնք հանգեցվում են ոչ գծային բուլյան հավասարումների լուծման: Այդ խնդիրների լուծմանն էր ուղղված դիզյունկտիվ նորմալ ձևերով տրամաբանական ֆունկցիաների ներկայացման հիմնական կիրառությունը: Այսպիսով անհրաժեշտ էր նոր մոտեցում, նոր մաթեմատիկական մոդել, որը հնարավորություն կտար տեղաշարժ գրանցել դիզյունկտիվ նորմալ ձևերի տեսության մեջ:

Յու. Ժուրավլյովը առաջարկել էր որպես այդպիսի մոդել դիտարկել գծային ֆունկցիաների արտադրյալները՝ որպես n-չափանի միավոր խորանարդի գագաթների բազմությունների՝ ինտերվալների ընդհանրացում: Դա իրականացվեց նրա աշակերտ Ա. Ալեքսանյանի կողմից [1,2,3]: Կառուցվեց գծայնացվող դիզյունկտիվ նորմալ ձևերի տեսությունը՝ սովորական դիզյունկտիվ նորմալ ձևերի տեսության բնական ընդհանրացումը և հիմնավորվեց, որ այն ադեկվատ տեսություն է:

Տրամաբանական ֆուկցիաները նոր տեսության մեջ ներկայացվում էին ոչ թե n-չափանի միավոր խորանարդի գագաթների բազմությունների՝ ինտերվալների ծածկույթով, այլ F_{2^n} վերջավոր դաշտի գծային ենթատարածությունների հարակից դասերի ծածկույթով՝ գծայնացվող ծածկույթով: Սա հնարավորություն տվեց գրանցել բուլյան ֆունկցիաների մինիմիզացիայի էական առաջընթաց, որը անհնար էր հին տեսության մեթոդներով: Այդպիսի օրինակ է քառակուսային բազմանդամներով ներկայացվող բուլյան ֆունկցիաների դասը: Այդ դասի ֆունկցիաների կարճագույն գծայնացվող ծածկույթները հաջողվեց դուրս գրել բացահայտ բանաձևային տեսքով:

Ա. Ալեքսանյանի աշխատանքները հիմնադրեցին բուլյան ֆունկցիաների հետազոտման նոր ուղղություն:

Պարզվեց, որ գծայնացվող ծածկույթների գաղափարը հնարավոր է կիրառել վերջավոր դաշտում տրված բազմանդամների, ինչպես նաև վերջավոր դաշտերի ենթաբազմությունների համար: Բուլյան ֆունցիաների համար ստացված հիմնական արդյունքները հաջողվեց տարածել վերջավոր դաշտերում սահմանված ֆունկցիաների համար Ա. Ալեքսանյանի, Վ.Գաբրիելյանի և այլոց աշխատանքներում [4-8]:

Բուլյան ֆունկցիաների ներկայացումը դիզյունկտիվ նորմալ ձևերով էապես տարբերվում էր տրամաբանական տարրերով սխեմաների ներկայացումից, քանի որ ամենաբարդ ֆունկցիայի դիզյունկտիվ նորմալ ձևի երկարությունը էապես մեծ է «համարյա բոլոր» ֆունկցիաների բարդությունից, մինչդեռ սխեմաների դեպքում ամենաբարդ և համարյա բոլոր ֆունկցիաների բարդությունները միևնույն կարգի են: Գծայնացվող դիզյունկտիվ նորմալ ձևերի դեպքում ամենաբարդ ֆունկցիայի կառուցումը հեշտ չէ՝ սա բաց խնդիր է: Անհայտ է մնում նաև, արդյոք ամենաբարդ ֆունկցիայի բարդությունը գծայնացվող դիզյունկտիվ նորմալ ձևերի դասում տարբերվում է «համարյա բոլոր» ֆունկցիաների բարդությունից:

Այսպիսով արդի խնդիր է բազմությունների նոր դասերի կարճագույն գծայնացվող ծածկույթների հետազոտումը:

Աշխատանքի նպատակը: Ատենախոսության հիմնական նպատակն է.

- Վերջավոր դաշտերի ենթաբազմությունների նոր դասերի նկարագրում, որոնց համար լուծելի է կարճագույն գծայնացվող ծածկույթի կառուցման խնդիրը:
- Դիտարկել վերջավոր դաշտից տարրերով մատրիցների գծայնացվող ծածկույթներ:
- Հետազոտել ընդհանուր աֆինական խմբի գործողությունը վերջավոր դաշտի ենթաբազմությունների վրա և դրա կապը գծայնացվող ծածկույթների բարդության հետ:

Հետազոտման օբյեկտը: Աշխատանքի հետազոտման օբյեկտը վերջավոր դաշտերի ենթաբազմությունների գծայնացվող ծածկույթներն են:

Հետազոտման մեթոդները: Աշխատանքում օգտագործված են դիսկրետ մաթեմատիկայի և հանրահաշվի մեթոդները:

Արդյունքի գիտական նորությունը: Աշխատանքի հիմնական արդյունքներն են՝

- $\dot{F}_q^n$-ով նշանակենք F_q^n գծային տարածության ոչզրոյական վեկտորների բազմությունը: Ստացվել են $\dot{F}_q^n \times \dot{F}_q^m$ դեկարտյան արտադրյալի կարճագույն գծայնացվող ծածկույթի վերին և ստորին գնահատականներ: Մասնավորապես, եթե և n-ը և m-ը 2-ի աստիճան են, ապա կարճագույն գծայնացվող ծածկույթի երկարությունը չի գերազանցում $m^{\log_2 3}\frac{n}{m}(q-1)^2$-ը: Որպես ստորին գնահատական ցույց է տրվել, որ $\dot{F}_q^n \times \dot{F}_q^m$-ի գծայնացվող ծածկույթը պարունակում է առնվազն $n(q-1)(q-\frac{1}{q^{m-1}})$ հարակից դաս:

- Ուսումնասիրվել է F_2 դաշտի վրա տրված $x_1x_2 \cdots x_n + x_{n+1}x_{n+2} \cdots x_{2n} + x_{2n+1}x_{2n+2} \cdots x_{3n} = 1$ հավասարման լուծումների բազմության գծայնացվող ծածկույթները: Տրիվիալ գծայնացվող ծածկույթի երկարության կարգը n^2 է: Օգտագործելով հարակից դասերով ծածկույթների և արգելափակող բազմությունների միջև կապը՝ հաջողվել է ստանալ կարգով փոքր գծայնացվող ծածկույթ, որի երկարությունը չի գերազանցում $9n^{log_2^3} + 4$:

- Ուսումնասիրվել է F_q դաշտի վրա տրված $n \times n$ չափի վերասերված մատրիցների բազմության գծայնացվող ծածկույթները: Օգտագործելով վերասերված մատրիցների բազմության մեջ ընկած մաքսիմալ հարակից դասերի նկարագրությունը՝ հաջողվել է ստանալ կարճագույն գծայնացվող ծածկույթ, որը պարունակում է $\frac{q^{n-1}}{q-1}$ հարակից դաս:

- Ուսումնասիրվել է F_q դաշտի վրա տրված $n \times n$ չափի չվերասերված մատրիցների բազմության գծայնացվող ծածկույթները: Հաջողվել է ստանալ կարճագույն գծայնացվող ծածկույթ, որի երկարությունը հավասար է $(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q-1)$:

- $xA + b$ տեսքի արտապատկերումների բազմությունը, որտեղ A-ն $n \times n$ չափի մատրից է տրված F_q դաշտի վրա, իսկ b-ն վեկտոր է F_q^n-ից, կոչվում է Աֆինական ձևափոխությունների խումբ: Ուսումնասիրվել է այդ խմբի գործողությունը F_q^n-ի ենթատարածությունների վրա: Ստացվել է, որ համարժեքության դասերի քանակը կարգով հավասար է $\frac{2^{q^n}}{A_n}$, որտեղ $A_n \approx q^{n^2+n}$ խմբի տարրերի քանակն է: Որպես հետևանք ստացվել է, որ համարյա բոլոր համարժեքության դասերը ունեն մաքսիմալ A_n չափ:
- Ստացվել է վերին գնահատական F_q^n-ի ենթատարածությունների գծայնացվող ծածկույթների համար, որը արտահայտվում է Աֆինական ձևափոխությունների խմբի տերմիններով: Ցանկացած $N \subseteq F_q^n$ բազմության կարճագույն գծայնացվող ծածկույթի երկարությունը չի գերազանցում $CR(G) \times \#orb_G(N)$ թիվը՝ $Stab(N)$-ի ցանկացած G ենթախմբի համար, որտեղ $CR(G)$-ն G-ի կարճագույն գծայնացվող ծածկույթի երկարությունն է, $Stab(N)$-ը N-ի ստաբիլ խումբը, իսկ $\#orb_G(N)$-ն՝ ուղեծրերի քանակը:

Ատենախոսության բոլոր արդյունքները նոր են և ստացվել են հեղինակի կողմից առաջին անգամ:

Կիրառական նշանակությունը: Աշխատանքի արդյունքները ու մեթոդները կարելի է կիրառելի վերջավոր դաշտերում ոչ գծային հավասարումների համակարգերի լուծման, վերջավոր դաշտերում բազմանդամներով նկարագրված ֆունկցիաների, վերջավոր դաշտերի ենթաբազմությունների «հարմար» ներկայացում կառուցելու, ինտեգրալային սխեմաների նախագծման և թեստավորման համար, ինչպես նաև դիսկրետ մաթեմատիկայի և մաթեմատիկական կիբեռնետիկայի այլ խնդիրների հետազոտման ժամանակ:

Ապրոբացիան: Աշխատանքի հիմնական արդյունքները հրատարակված են 6 հոդվածներում: Դրանք զեկուցվել են ԵՊՀ Ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի ֆակուլտետի Դիսկրետ մաթեմատիկայի և տեսական ինֆորմատիկայի ամբիոնի սեմինարում:

Աշխատանքի ծավալը և կառուցվածքը: Աշխատանքի ծավալը կազմում է 73 էջ: Աշխատանքը բաղկացած է ներածությունից, հինգ գլուխներից, եզրակացությունից և գրականության ցանկից (19 անուն):

1. Խնդրի դրվածքը և արդի վիճակը

Բուլյան ֆունկցիաների տեսության առաջին խնդիրներից մեկը, որը արդեն դասական խնդիր է համարվում, անշուշտ բուլյան ֆունկցիայի ներկայացումն է կարճագույն (մինիմալ) դիզյունկտիվ նորմալ ձևի (դ.ն.ձ.-ի) միջոցով: Բուլյան ֆունկցիայի ներկայացումը դ.ն.ձ.-ի տեսքով իսկզբանե օգտագործվել է մաթեմատիկական տրամաբանության աբստրակտ բաժինների կարիքների համար, բայց հետագայում վերածվեց կիրառական խնդիրների լուծման ընդհանուր մեթոդի, հանդիսացավ նոր գաղափարների և դիսկրետ էքստերմալ խնդիրների լուծման նոր մեթոդների ակունք:

Դիտարկենք երկու կարևոր խնդիր, որոնց լուծմանն էին ուղղված բուլյան ֆունկցիաների դ.ն.ձ-ների տեսքով ներկայացման առաջին կիրառությունները:

Առաջին խնդիրը կոմբինատոր սխեմաների (ֆունկցիոնալ տարրերի սխեմա, կոնտակտային տարրերի սխեմա) սինթեզն է:

Երկրորդը՝ բուլյան ֆունկցիաների համակարգերի լուծում.

$$\begin{cases} f_1(x_1,\cdots,x_n)=\alpha_1 \\ f_1(x_1,\cdots,x_n)=\alpha_2 \\ \vdots \\ f_m(x_1,\cdots,x_n)=\alpha_m \end{cases}, \qquad (1.1)$$

որտեղ f_i-երը բուլյան ֆունկցիաներ են՝ տրված բանաձևերով ինչ-որ ֆիքսված բազիսում, իսկ $\alpha_i \in \{0,1\}$, $i=1,\cdots,m$:

Տրված բուլյան ֆունկցիայի մինմիալ կոմբինատոր սխեմայի լուծման խնդրի համար դ.ն.ձ.-ների ապարատը բավականին զարգացած չէ: Պարզվում է, որ ունենալով տրված ֆունկցիայի մինիմալ, կարճագույն կամ ինչ-որ դ.ն.ձ.՝ հնարավոր չէ կառուցել այդ ֆունկցիան իրականացնող մինիմալ կամ մինիմալին մոտիկ կոմբինատոր սխեմա: Չնայած նրան որ դ.ն.ձ.-ներով կառուցված սխեմաները հեշտ թեստավորվում են և ունեն բարձր արտադրողականություն, բարդության չափերով բավականին մեծ են մինիմալ սխեմայի չափերից: Այդ պատճառով դ.ն.ձ.-ների կիրառությունը սխեմաների սինթեզի համար ոչ էֆֆեկտիվ է:

Ավելի մանրամասն դիտարկենք երկրորդ խնդիրը, որին բերվում են մեծ թվով խնդիրներ պատկերների ճանաչման, թեստերի կառուցման, գործողությունների հետազոտման և այլ ոլորտներից: (1.1) տեսքի համակարգի լուծման խնդիրը հանդիսանում է հատարկման տիպի և ընդհանուր դեպքում մտնում է այսպես կոչված NP-դժվար խնդիրների դասի մեջ: Օրինակ եթե բոլոր f_i-երը բազմանդամներ են ըստ մոդուլ 2-ի, որոնց կարգը 2-ից ավել չէ, ապա (1.1) համակարգի լուծումը NP-լրիվ խնդիր է: Դրանով է բացատրվում լուծման «լավ» ալգորիթմի բացակայությունը: Բոլոր հայտնի մեթոդները դիտարկում են (1.1) համակարգի հատուկ, նեղ դասեր: Միակ ունիվերսալ մոտեցումը հիմնված է համակարգի ֆունկցիաների դ.ն.ձ. ներկայացմամբ և նկարագրվում է հետևյալ ընդհանուր սխեմայով, որը կոչվում է «ունիվերսալ սխեմա»:

Դիտարկենք բուլյան ֆունկցիաների հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} f_1(x_1, \cdots, x_n) = 1 \\ f_2(x_1, \cdots, x_n) = 1 \\ \vdots \\ f_m(x_1, \cdots, x_n) = 1 \end{cases}, \qquad (1.2)$$

որտեղ f_i-երը բուլյան ֆունկցիաներ են $i = 1, \cdots, m$ (Սովորաբար (1.1) տեսքի համակարգը կարելի է բերել այս տեսքի):

Ակնհայտ է, որ (1.2) համակարգը համարժեք է հետևյալ հավասարմանը՝

$$f \equiv \prod_{i=1}^{m} f_i(x_1, \cdots, x_n) = 1$$

Այնուհետև յուրաքանչյուր $f_i(x_1, \cdots, x_n)$ ֆունկցիայի համար կառուցվում է որևէ (ցանկալի է կարճագույն) դ.ն.ձ. իրականացում՝ $D_i = K_{i_1} \vee \cdots \vee K_{i_s}$: Ակնհայտ է, որ $D_1 D_2 \cdots D_m$ ֆունկցիան իրականցնում է f-ը և D-ի դ.ն.ձ. իրականացում կարելի է ստանալ՝ $\prod_{i=1}^{m} K_{i_1} \vee \cdots \vee K_{i_s}$ արտահայտության մեջ փակագծերը բացելով: Ունենալով արդյունարար դ.ն.ձ.-ն՝ $D = K_1 \vee K_2 \vee \cdots \vee K_t$, դժվար չէ ստանալ (1.2)-ի բոլոր լուծումները: Դրա համար բավական է թվարկել բոլոր $(x_1, \cdots, x_n)$ հավաքածուները, որոնց համար K_i էլեմենտար կոնյուկցիաները 1 են $i = 1, \cdots s$: Այլ բառերով խնդիրը բերվում է s համակարգերի լուծման՝ $K_i = 1$ տեսքի, որը տրիվիալ խնդիր է:

Արդյունարար D դ.ն.ձ.-ի ստացումը նույնպես համարվում է NP-լրիվ խնդիր և նույնիսկ բազմապատակելով կարճ դ.ն.ձ.-ները (D_i)՝ գործնականում հնարավոր է ստանալ անսահմանափակ երկարության դ.ն.ձ.: Նաև այն դեպքում, երբ f-ի կարճագույն դ.ն.ձ.-ի երկարությունը շատ մեծ չէ, $D_1 D_2 \cdots D_m$ արտահայտության մեջ փակագծերը բացելը կարող է անհնար լինել՝ մեծ թվով տարրական գործողություններ պատճառով: Մենք այստեղ չենք թվարկի համակարգերի այն դասերը, որոնց համար հնարավոր է ստանդարտ չափի խնդիրը լուծել «ունիվերսալ սխեմայի» միջոցով: Փորձենք պատասխանել այն հարցին, թե ինչքանով է հիմնավորված դ.ն.ձ.-ների օգտագործումը որպես բուլյան հավասարումների համակարգերի լուծման գործիք: Նկատենք, որ «ունիվերսալ սխեմայի» միակ տեղը, որտեղ օգագործվում է այն փաստը, որ արդյունարար դ.ն.ձ.-ի անդամները տարրական կոնյուկցիաներ են հանդիսանում է $K_i = 1$ տեսքի հավասարումների լուծման պարզ լինելը: Յու. Ժուրավլյովը նկատել է, որ «ունիվերսալ սխեման» ամբողջությամբ կաշխատի նաև այն դեպքում, երբ D բանաձևի դիզյունկտիվ տարրերը K բուլյան ֆունկցիաներ են, որոնց համար $K = 1$ լուծելը պարզ խնդիր է: Այդպիսի ֆունկցիաների բնական դաս են հանդիսանում այն ֆունկցիաները, որոնք գծային ֆունկցիաների արտադրյալ են: Այդ ֆունկցիաների համար $K = 1$-ի լուծումը համարժեք է F_2 դաշտի նկատմամբ գծային հավասարումների համակարգի լուծմանը, որը պարզ խնդիր է: Մյուս կողմի ակնհայտ է, որ տարրական կոնյուկցիան ներկայացվում է գծային ֆունկցիաների արտադրյալի տեսքով:

Վերը նշվածից հանգում ենք հետևյալ եզրակացության: Բուլյան ֆունկցիաների համակարգի լուծման համար ավելի արդյունավետ է օգտագործել բուլյան ֆունկցիայի ներկայացում $G_1 \vee \cdots \vee G_s$ տեսքով, որտեղ G_i-ն F_2 դաշտի վրա տրված գծային ֆունկցիաների արտադրյալ է $i = 1, \cdots, s$. Այս ներկայացումը հանդիսանում է դ.ն.ձ.-ի ընհանրացում (ցանկացած դ.ն.ձ. այդ բանաձևի մասնավոր դեպք է):

Իմաստ ունի ենթադրել, որ f ֆունկցիայի այդպիսի ներկայացման դեպքում (այն անվանենք գծայնացվող դիզյունկտիվ նորմալ ձև, գ.դ.ն.ձ) կարճագույն դ.ն.ձ.-ն պետք է ունենա բավականին պարզ տեսք: Դա թույլ կտա ընդլայնել «ունիվերսալ սխեմայի» կիրառությունների դաշտը: Դրանից բացի գ.դ.ն.ձ.-ները ուսումնասիրելիս հնարավոր է կիրառել ավելի ուժեղ հանրահաշվական կառուցվածքներ, քան բուլյան հանրահաշիվն է:

Բուլյան ֆունկցիաների կարճագույն դ.ն.ձ.-ի կառուցման ալգորիթմական բարդությունները ուսումնասիրվել են շատ հետազոտողների կողմից: Այդ ուղղությամբ հիմնական արդյունքները ստացվել են Ս. Յաբլոնսկու և Յու. Ժուրավլյովի աշխատանքներում, որոնցից հետևում է, որ խնդրի լուծման մեթոդ՝ առանց հատարկման, կարծես թե գոյություն չունի:

Կարճագույն ներկայացման ժամանակ օգտագործվող հատարկման չափը կախված է դ.ն.ձ.-ի մետրիկական բնութագրիչներից:

Ինչպես արդեն նշվել է, գծային ֆունկցիաների արտադրյալների դիզյունկցիաները (գ.դ.ն.ձ.-ները) պարունակում են դ.ն.ձ.-ները որպես սեփական ենթաբազմություն: Հետևաբար սպասելի է, որ որոշ խնդիրներ, որոնք չունեն պրակտիկ լուծում դ.ն.ձ.-ների դասում, կլուծվեն գ.դ.ն.ձ.-ների դասում: Այն որ վերջինները չեն հանդիսանում դ.ն.ձ.-ների պարզ ընդհանրացում համոզում են հետևյալ փաստերը:

Նախ, ամենաբարդ դ.ն.ձ. ունեցող ֆունկցիան՝ «զույգության հաշվիչ»-ը՝ $x_1 + x_2 + \cdots + x_n (mod\ 2)$, իրականցվում է գ.դ.ն.ձ.-ների դասում 1 երկարությամբ բանաձևով:

n չափանի միավոր խորանարդի ցանկացած 2 գագաթ կազմում են ֆունկցիա, որը իրականացվում է գծային ֆունկցիաների արտադրյալի տեսքով, հետևաբար բոլոր բուլյան ֆունկցիաները կապված են և գոյություն չունի լոկալությանը համարժեք գաղափար: Հետևաբար գ.դ.ն.ձ. գտնելու համար լոկալության մոտեցումը չի օգնում: Բացի դրանից, գոյություն չունի դ.ն.ձ.-ի միջուկին համարժեք գաղափար:

Բացի այդ, n չափանի միավոր խորանարդի ձևափոխությունների բազմությունը, որի արդյունքում ֆունկցիայի գծայնացվող դ.ն.ձ.-ի երկարությունը չի փոխվում $y = xA + b$ տեսքի աֆինական ձևափոխությունների խումբն է, որտեղ A-ն F_2-ի վրա որոշված անվերածելի մատրից է, իսկ b-ն տեղաշարժի վեկտոր: Այս խումբը հետազոտվել է սխեմաների սինթեզի հետազոտման ժամանակ: Բայց այն չի պահպանում դ.ն.ձ.-ի հիմնական բնութագիրները, հետևաբար աֆինական ձևափոխությունների միջոցով ֆունկցիաների դասակարգումը չի գտել կիրառություն դ.ն.ձ.-ների տեսության մեջ: Եթե այն դիտարկենք, որպես հիմք գ.դ.ն.ձ.-ների դասակարգման համար, ապա աֆինական ձևափոխությունների խումբի դերը շատ է մեծանում և այն հնարավորություն է տալիս հանրահաշվական մեթոդների կիրառմանը:

Նշված դիտարկումները վկայում են այն մասին, որ բուլյան ֆունկցիայի կարճագույն ներկայացում գտնելու համար արժե ուսումնասիրել գծայնացվող դիզյունկտիվ ձևերը: Բացի այդ, իմաստ ունի դիտարկել գծայնացվող դ.ն.ձ.-ներ ոչ միայն F_2, այլև կամայական այլ վերջավոր դաշտի վրա որոշված ֆունկցիաների համար: Բոլոր նշված դիտարկումները տեղի ունեն, մասնավորապես աֆինական ձևափոխությունների խումբը գործում է նաև այն դեպքում երբ դաշտը F_q-ն է:

Պարզվում է, որ այդ դեպքում ֆունկցիայի ներկայացումը գծայնացվող դիզյունկտիվ նորմալ ձևերի տեսքով համարժեք է այդ ֆունկցիայի մեկերի բազմության ծածկույթի կառուցում F_q^n-ի ենթատաևածությունների հարակից դասերի միջոցով:

F_q^n-ում ծածկույթների մետրիկական գնահատականները վերցված են [7]-ից:

F_q^n-ի համարյա բոլոր N ենթաբազմությունների համար $l(n,k,N)$-ը՝ k չափի հարակից դասերի քանակը, որոնք ընկած են N-ում, բավարարում է հետևյալ անհավասարություններին՝

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \left(2^{-q^k} q^{n-k} - n 2^{-q^{k/2}} q^{(n-k)/2}\right) \leq l(n,k,N) \leq \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \left(2^{-q^k} q^{n-k} + n 2^{-q^{k/2}} q^{(n-k)/2}\right),$$

որտեղ $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$-ն Գաուսի գործակիցն է՝ F_q^n-ում k չափի ենթատարածությունների քանակը:

Հետաքրքիր է նկատել, որ համապաասխան գնահատականը k-չափի ինտերվալների քանակի համար դ.ն.ձ.-ներով իրականացման դեպքում ստացվում է $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$-ն փոխարինելով $\binom{n}{k}$-ով:

Հայտնի է, որ համարյա բոլոր բազմությունների մաքսիմալ հարակից դասի չափը, որը ընկած այդ բազմության մեջ $\lceil log_q n + log_q log_q n \rceil + 1$ է (դ.ն.ձ.-ների համար համապատասխան գնահատականը $\lceil log_2 n \rceil$ է):

Համարյա բոլոր ֆունկցիաների համար կրճատված գ.դ.ն.ձ.-ի համարյա բոլոր դիզյունկտիվ անդամների չափը ընկած է $\lceil log_2 n - 4; log_2 n + 3 \rceil$, այսինքն ունի մաքսիմալ հնարավորի չափ կարգ: Այստեղ առաջանում է էական տարբերություն դ.ն.ձ.-ների դեպքից, քանի որ կրճատված դ.ն.ձ.-ի համարյա բոլոր անդամները ունեն չափ, որը մոտիկ է $log_2 log_2 n$-ին, որը կարգով տարբերվում է մաքսիմալից:

$N \subseteq F_q^n$ բազմության կրճատված ծածկույթի՝ $E(N)$-ի համար տեղի ունի հետևյալ գնահատականը՝

$$n^{n(1-\beta_n)} \leq E(N) \leq n^{n(1+\alpha_n)},$$

որտեղ $\beta_n = \beta / log_q n$, $\alpha_n = \alpha / log_q n$ և $2\left(2 - \frac{1}{q} log_2 q \right) < \alpha, \beta < 2\left(2 - \frac{1}{q} log_2 q \right) + \varepsilon$, որտեղ ε-ը ինչքան ասես փոքր դրական թիվ է:

$l(n) \equiv \max l(f)$ ունի հետևյալ գնահատականը՝

$$\alpha \cdot e^{-1/3} q^{(n+1)^2/4} \leq l(n) \leq \alpha \cdot e^{4/3} q^{(n+1)^2/4},$$ որտեղ

$$\alpha = \begin{cases} 1, & n \equiv 1 \, mod \, 2 \\ q^{-1/4}, & n \equiv 1 \, mod \, 2 \end{cases}$$

Այսպիսով կրճատված գ.դ.ն.ձ.-ի երկարությունը էականորեն մեծ է, քան կրճատված դ.ն.ձ.-ինը:

$S(N)$-ով նշանակենք համարյա բոլոր ֆունկցիաների կարճագույն ծածկույթ-ի երկարությունը: Հայտնի է հետևյալ գնահատականը [8]՝

$$(1-\varepsilon(n)) \frac{q^n}{2qn \ log_q n} \leq S(N) \leq (1-\delta(n)) \frac{3q^3 q^n \, log_q n}{2n \, log_q e}$$

որտեղ $lim \, \delta(n) = lim \, \varepsilon(n) = 0$, երբ $n \to \infty$:

Հ. Նուրիջանյանին հաջողվել է լավացնել վերին գնահատականը [9]՝

$$S(N) \leq \frac{q^3 e^2 \, (ln \, 2+1) q^n}{2q^{ln \, 2} (ln \, 2) \, n}:$$

Հետևաբար կարճագույն գ.դ.ն.ձ.-ի երկարությունը կարգով փոքր է կարճագույն դ.ն.ձ.-ի երկարությունից:

Հայտնի է մաքսիմալ փակուղային գ.դ.ն.ձ.-ների քանակի հետևյալ գնահատականը [9]՝

$$q^{\left(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil-1\right)^2 \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil 2^{\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil-1}} \leq t(n) \leq q^{q^{n}\frac{(n+1)^2}{4}(1+\varepsilon(n))},$$

որտեղ $lim\, \varepsilon(n) = 0$, երբ $n \to \infty$:

Գ.դ.ն.ձ.-ների մետրիկական բնութագիրները ցույց են տալիս դ.ն.ձ.-ների հետ ունեցած նմանությունները և տարբերությունները: Մասնավորապես պարզ է դառնում, որ կարճագույն գ.դ.ն.ձ. գտնելու սխեման, որը հիմնված է փակուղայինների հատարկման վրա, կիրառելի չէ կրճատված գ.դ.ն.ձ.-ի մեծ երկարություն ունենալու և փակուղային գ.դ.ն.ձ.-ների մեծ թվի պատճառով:

Դիտարկենք բուլյան ֆունկցիաների որոշ կարևոր դասեր: Ուսումնասիրված է սիմետրիկ ֆունկցիաների դասը: Այդ դասում բուլյան ֆունկցիայի դ.ն.ձ. ներկայացումը ստանում է իր մաքսիմալ արժեքը կրճատված և փակուղային դ.ն.ձ.-ների բարդության երկարության համար: Մանրամասն ուսումնասիրված է կրճատված գ.դ.ն.ձ-ի կառուցվածքը, այն բուլյան ֆունկցիաների, որոնց մեկերի բազմությունը n երկարության վեկտորներ են, որոնց կորդինատներից 1 են ճիշտ k հատը: Հայտնի է սիմետրիկ ֆունկցիաների դասում մաքսիմալ կարճագույն գ.դ.ն.ձ.-ի՝ $T(n)$-ի հետևյալ արժեքը՝

$$\frac{1}{n+2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n} \leq T(n) \leq const\left(\frac{3}{2}\right)^{n}$$

Այստեղից անմիջապես հետևում է, որ սիմետրիկ ֆունկցիաները ունեն շատ ավելի պարզ իրականացում գ.դ.ն.ձ.-ների դասում քան համարյա բոլոր ֆունկցիաները: Սրանով ընդգծվում է ևս մեկ էական տարբերություն դ.ն.ձ.-ների և գ.դ.ն.ձ.-ների միջև՝ երկրորդի օգտին:

Հայտնի են նաև թույլ որոշված բուլյան ֆունկցիաների (փոքր թվով 0-ներ ունեցող) դասի ֆունկցիաների գ.դ.ն.ձ. ներկայացումները, որոնք ունեն բազմաթիվ կիրառությունների թեստերի տեսության և պատկերների ճանաչման խնդիրներում:

k զրո ունեցեղ ֆունկցիաները տրվում են աղյուսակի միջոցով, որը համարժեք է այսպես կոչված նելսոնյան հավասարումենրի ձախ մասերի արտադրյալին՝ ${x_1}^{\alpha_{i_1}} \vee \cdots \vee {x_n}^{\alpha_{i_n}} = 1, i = 1, \cdots, k$: Կիրառություններում անհրաժեշտ է լինում բազմապատկել հավասարումների ձախ մասերը, այսպիսով կարևոր է ստանալ ֆունկցիայի դ.ն.ձ. կամ գ.դ.ն.ձ. ներկայացումները՝ առանց բազմապատկելու համակարգի ձախ մասերը: Եթե դա հաջողվի, ապա հնարավոր է կրճատել հավասարումների քանակը՝ նրանց մի մասը փոխարինելով համարժեք հավասարումներով, որոնց դիզյունկտիվ անդամների քանակը մոտ է n-ին:

Հայտնի է կարճագույն գ.դ.ն.ձ-ի երկարությունը, որը իրականացնում է k զրոներով ֆունկցիա, որի զրոների մատրիցի ռանգը r է, զրոյական վեկտորի վրա արժեքը 0 է: Այն չի գերազանցում $n - r + \lceil 2^{r-1} - k/2 \rceil$, իսկ ֆունկցիայի կարճագույն գ.դ.ն.ձ. իրականացումը հանգեցվում է r փոփոխականից k զրոներով ֆունկցիայի համապտասախան ներկայացմանը, որը 0 է բոլոր այն վեկտորների վրա, որոնց ունեն երկուսից ոչ ավել 1 կորդինատ:

Ցույց է տրված, որ եթե $r \leq log_2 n - \rho(n)$ կամ $2^r - k = o(n)$, որտեղ $\rho(n)$-ը ինչքան ասես դանդաղ աճող ֆունկցիա է, ապա գ.դ.ն.ձ.-ի երկարությունը ասիմպտոտիկ հավասար է n-ի:

Կարևոր ենթադաս է $k \leq n$ զրո ունեցող ֆունկցիաների դասը, որոնք ունեն շատ պարզ՝ $n-1$ երկարության գ.դ.ն.ձ: Դրանք ֆունկցիաներ են, որոնց զրոները ընդհանուր դիրքում են: Ցույց է տրված, որ բոլոր ֆունկցիաները $k \leq 10$ զրոներով ունեն գ.դ.ն.ձ. իրականացում, որի երկարությունը չի գերազանցում $n+2$: Այսինքն Նելսոնի համակարգները միշտ կարելի է կրճատել 10 անգամ:

Նշված գնահատականները համեմատելով դ.ն.ձ.-ների համար հայտնի գնանատականների հետ պարզում ենք, որ գ.դ.ն.ձ.-ներով իրականացումը էապես լավն է: Նախ երկու դեպքում էլ ստացվում են $n + m(k)$ տեսքի գնահատականներ, որտեղ դ.ն.ձ.-ներին համապատասխան $m(k)$-ն մեծ է: Ստացվում են հետևյալ արժեքները՝

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
դ.ն.ձ.-ի $m(k)$	0	1	4	14	31	66	133	271	537
գ.դ.ն.ձ.-ի $m(k)$	-1	-1	-1	-1	-1	0	1	2	2

Աղյուսակից հետևում է, որ եթե դ.ն.ձ. ներկայացումը թույլ է տալիս կրճատել նելսոնյան հավասարումները ոչ ավել քան 5 անգամ, ապա գ.դ.ն.ձ ներկայացումը թույլ է տալիս դա անել ոչ պակաս քան 10 անգամ: Ընդ որում աղյուսակից երևում է, որ գ.դ.ն.ձ.-ի $m(k)$-ն շատ ավելի դանդաղ է աճում:

Նաև, $r \leq log_2 n - \rho(n)$ կամ $2^r - k = o(n)$ պայմանը բավական է, որ գ.դ.ն.ձ. ներկայացման երկարությունը ասիմպտոտիկ հավասարվի n-ի, որը ավելի թույլ պայման է, քան դ.ն.ձ.-ների դեպքում:

Հավանաբար, քիչ զորներով ֆունկցիաների լավ գ.դ.ն.ձ. իրականացումը կապված է այն փաստի հետ, որ գ.դ.ն.ձ.-ի երկարությունը ինվարիանտ է աֆինական ձևափոխությունների խմբի նկատմամաբ: Դա թույլ է տալիս միավորել մեծ թվով ֆունկցիաներ, որոնք տարբեր են դ.ն.ձ. իրականացման դեպքում:

Այս փաստը ավելի վառ է արտահայտվում քառակուսային ֆունկցիաների կարճագույն գ.դ.ն.ձ.-ի խնդիրը լուծելիս: Դրանք այն ֆունկցիաներն են, որոնց Ժեգալկինի բազմանդամը ունի 2 աստիճան: Գ.դ.ն.ձ.-ն ստացվում է բացահայտ տեսքով, ինչը համարվում է անհասանելի դ.ն.ձ.-ների դեպքում: Քառակուսային ֆունկցիաների դասի կարևորությունը հիմնավորված է քառակուսային բուլյան ֆունկցիաների համակարգերի լուծման ակտուալությամբ:

Քառակուսային ֆունկցիայի կարճագույն դ.ն.ձ.-ն կարող է ունենալ $\frac{(3^{\frac{n}{2}}-1)}{2}$ երկարություն իսկ գ.դ.ն.ձ. իրականացումը նույնիսկ ամենավատ դեպքում $(\frac{3}{2})^{\frac{n}{2}}$ անգամ կարճ է:

Այս օրինակները ցույց են տալիս գ.դ.ն.ձ իրականացման բացահայտ առավելությունը դ.ն.ձ-ի նկատմամբ: Դա պատահական չէ, քանի որ Շենոն-Պովարովի ինվարիանտ ձևափոխությունների խումբը շատ ավելի «աղքատ» է աֆինական ձևափոխությունների խմբից:

2. Գծայնացվող ծածկույթներ F_q^n տարածության և նրա դեկարտյան արտադրյալների ենթաբազմությունների համար

2.1 Ընդհանուր սահմանումներ և նշանակումներ

Դիցուք F_q-ն q էլեմենտ պարունակող վերջավոր դաշտն է [10], իսկ F_q^n-ը՝ F_q-ի վրա տրված n չափանի գծային տարածությունը: F_q^n-ը կարելի է ներկայացնել որպես հետևյալ վեկտորների բազմություն.

$$F_q^n = \{(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \mid \alpha_i \in F_q, i = 1,2, \ldots, n\}$$

Սահմանում 2.1.1: Դիցուք L-ը F_q^n-ի գծային ենթատարածություն է և $\alpha \in F_q^n$: $\alpha + L = \{\alpha + x \mid x \in L\}$ բազմությունը կոչվում է L գծային ենթատարածության

հարակից դաս, որի չափը սահմանվում է որպես L գծային ենթատարածության չափ (նշանակվում է $dim(L)$):

Համարժեք սահմանում. $N \subseteq F_q^n$ ենթաբազմությունը հանդիսանում է հարակից դաս, եթե N-ին պատկանող ցանկացած $x_1, x_2, \cdots, x_m$ վեկտորների համար, N-ին է պատկանում նաև նրանց ցանկացած աֆինական կոմբինացիա, այսինքն $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$ տեսքի վեկտորները ցանկացած $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m \in F_q$-ի համար, այնպես, որ $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$

Տեղի ունի հետևյալ կարևոր պնդումը:

Պնդում 2.1.2: F_q^n-ի ցանկացած k չափի հարակից դաս հանդիսանում է F_q-ի վրա տրված n փոփոխականից կախված $n-k$ ռանգ ունեցող որևէ գծային հավասարումների համակարգի լուծումների բազմություն: Եվ հակառակը. F_q-ի վրա տրված n փոփոխականից կախված, r ռանգ ունեցող ցանկացած գծային հավասարումների համակարգի լուծումների բազմությունը հանդիսանում է $n-r$ չափի հարակից դաս F_q^n-ում:

Դիցուք $N \subseteq F_q^n$:

Սահմանում 2.1.3: Եթե $H_1, H_2, \cdots, H_s$-ը հարակից դասեր են, որոնք ընկած են N-ի մեջ, ընդ որում՝ $H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_s = N$, ապա կասենք որ $\{H_1, H_2, \cdots, H_s\}$-ը հանդիսանում է N-ի գծայնացվող ծածկույթ: Ծածկույթին պատկանող հարակից դասերի քանակը՝ այսինքն s-ը, կոչվում է ծածկույթի երկարություն կամ բարդություն:

N-ի մինիմալ հնարավոր երկարության գծայնացվող ծածկույթը կոչվում է կարճագույն ծածկույթ։

Սահմանում 2.1.4: Դիցուք $L \subseteq N$ հարակից դաս է։ Կասենք, որ այն **մաքսիմալ հարակից դաս** է N-ում, եթե կամայական $H \subseteq N$ հարակից դասի համար $L \subseteq H$ ից հետևում է, որ $L = H$։ Այսինքն մաքսիմալ հարակից դասը ընկած չէ ավելի մեծ հարակից դասի մեջ։

Պարզ է, որ բազմության կամայական գծայնացվող ծածկույթ կարող ենք փոխարինել նույն երկարության ծածկույթով, որը պարունակում է միայն մաքսիմալ հարակից դասեր։

Սահմանում 2.1.5: F_q^n-ի $n-1$ չափի հարակից դասը կանվանենք **հիպերհարթություն:** Դրանք սահմանվում են n փոփոխականներով մի հավասարմամբ, որի գործակիցները F_q-ից են։

Օրինակ F_2^4-ում $x_1 + x_3 = 1$ հավասարման լուծումների բազմությունը հետևյալ հիպերհարթություն է $\{(1000), (1001), (1100), (1101), (0010), (0011), (0110), (0111)\}$։

$\dot{F}_q^n$-ով նշանակենք F_q^n-ի ոչ զրոյական վեկտորների բազմությունը։

$$\dot{F}_q^n = F_q^n \backslash \{(0, \cdots, 0)\}$$

2.2$\dot{F}_q^n$-ի գծայնացվող ծածկույթ

[11]-ում հետազոտված է $\dot{F}_q^n$-ի գծայնացվող ծածկույթի հարցը: Այնտեղ դիտարկվում է երկակի խնդիրը, որը կապված է այսպես կոչված արգելափակող բազմությունների հետ (blocking set).

Սահմանում 2.2.1: $S \subseteq F_q^n$ բազմությունը կանվանենք ***k*-արգելափակող բազմություն**, եթե այն ունի հատում F_q^n-ի կամայական k չափի հարակից դասի հետ:

Օրինակ. 1-արգելափակող բազմությունը F_2^n-ում պարունակում է առնվազն $2^n - 1$ վեկտոր, քանի որ կամայական վեկտորների զույգ 1 չափի հարակից դաս է:

Երկակի խնդիրը հետևյալն է: Գտնել մինիմալ $(n-1)$-արգելափակող բազմություն F_q^n-ում: Այսինքն՝ գտնել մինիմալ հզորության վեկտորների բազմություն, որը ունենա հատում կամայական հիպերհարթության հետ: Հիպերհարթյություններն ունեն հետևյալ տեսքը

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \gamma, \tag{2.1}$$

որտեղ f-ը ոչզրոյական գծային ֆունկցիա է F_q^n-ից F_q-ն իսկ γ-ն հաստատուն է:

$(n-1)$-արգելափակող բազմությունը պետք է պարունակի առնվազն մի լուծում կամայական (2.1) տեսքի հավասարման համար:

Օրինակ. ենթադրենք $e_1, \cdots, e_n$-ը F_q^n-ի բազիսն է: Որպես S վերցնենք հետևյալ բազմությունը

$$S = \{\lambda e_i \mid \lambda \in F_q, \mathrm{i} = 1, \cdots, n\} \tag{2.2}$$

Քանի որ նույնաբար 0-ից տարբեր կամայական գծային ֆունկցիա ընդունում է ոչզրոյական արժեք գոնե մի բազիսային վեկտորի վրա, ապա պարզ է, որ այդ տարրերը համապատասխան հաստատունով բազմապատկելու դեպքում կստանանք լուծում կամայական (2.1) հավասարման համար: Ստացվեց, որ S-ը $(n-1)$-արգելափակող բազմություն է, որը պարունակում է $n(q-1)+1$ վեկտոր: Հարց է առաջանում՝ կա արդյոք ավելի քիչ թվով վեկտորներ պարունակող $(n-1)$-արգելափակող բազմություն: Պարզվում է, որ չկա:

Թեորեմ 2.2.2 [11]: F_q^n-ում կամայական $(n-1)$-արգելափակող բազմություն պարունակում է առնվազն $n(q-1)+1$ վեկտոր:

Սահմանում 2.2.3: $x_1, \cdots x_k$ վեկտորների **գծային թաղանթ** կոչվում է նրանց բոլոր գծային կոմբինացիաների միավորումը:

Դիցուք S-ը $(n-1)$-արգելափակող բազմություն է: Նկատենք հետևյալ պարզ փաստերը: Նախ կամայական $x \to x - v$ արտապատկերում տանում է մի հիպերհարթությունը մյուսի մեջ, հետևաբար պահպանում է S-ի $(n-1)$-արգելափակող լինելու հատկությունը: Հետևաբար միշտ կարող ենք կիրառել համապատասխան արտապատկերում այնպես, որ S-ը պարունակի զրոյական վեկտորը: Այժմ, եթե S-ի տարրերի գծային թաղանթը ամբողջ F_q^n-ը չէ, ապա այն ընկած է ինչ-որ հիպերհարթության մեջ: Այդ հիպերարթության կամայական շեղում հիպերհարթություն է, որի չի հատվում S-ի հետ: Դա հակասում է S-ի $(n-1)$-արգելափակող լինելուն, հետևաբար S-ը պետք է պարունակի F_q^n-ի բազիս:

Այսքանով թեորեմը ապացուցվում է $q = 2$ դեպքի համար: Բազիսային վեկտորները և զրոյական վեկտորը կազմում են մինիմալ $(n-1)$-արգելափակող բազմություն F_2^n-ում: Տարրերի քանակը հավասար է $n(2-1)+1 = n+1$:

Հաջորդ պնդումը կապ է հաստատում արգելափակող բազմությունների և գծայնացվող ծածկույթների միջև:

Պնդում 2.2.4 [11]: F_q^n-ում մինիմալ $(n-1)$-արգելափակող բազմություն գտնելու խնդիրը համարժեք է $\dot{F}_q^n$-ի կարճագույն գծայնացվող ծածկույթ գտնելուն:

Սահմանում 2.2.5: $f(x_1, \cdots, x_n) = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$ գծային ֆունկցիաների տարածությունը, որտեղ f-ը արտապատկերում է F_q^n-ից F_q կոչվում է F_q^n-ի **երկակի տարածություն** և նշանակվում $\overline{F}_q^n$:

Դիցուք S-ը F_q^n-ի կամայական ենթաբազմություն է, որը չի պարունակում զրոյական վեկտորը: S-ի յուրաքանչյուր s տարրի համար դիտարկենք $H(s) \in \overline{F}_q^n$ բազմությունը F_q^n-ի երկակի տարածությունից:

$$H(s) = \{f \in \overline{F}_q^n \mid f(s) = 1\} \tag{2.3}$$

s-ը կարող ենք դիտարկել, որպես արտապատկերում $\overline{F}_q^n$-ից F_q, որը գործում է հետևյալ կերպ $s: f \to f(s)$: Պարզ է, որ $H(s)$-ը հիպերհարթություն է $\overline{F}_q^n$-ում և չի պարունակում նույնաբար 0 ֆունկցիան:

Այսպիսով S-ը կպարունակի կետ հետևյալ հիպերհարթությունից

$$\{x \in F_q^n | \, f(x) = 1\} \tag{2.4}$$

այն և միայն այն դեպքում, երբ f-ը պատկանի $H(s)$-ին ինչ-որ s-ի համար S-ից: Ցանկացած 0 չպարունակող հիպերհարթություն կարող ենք բերել (2.4) տեսքի՝ բաժանելով (2.1)-ը $\gamma \neq 0$ -ի, իսկ 0 պարունակողները արդեն արգելափակվում են, քանի որ S-ը պարունակում է զրոյական վեկտորը: Հետևաբար S-ը կլինի $(n-1)$-արգելափակող բազմություն F_q^n-ում այն և միայն այն դեպքում $\{H(s) \mid s \neq 0, s \in S\}$ հիպերհարթություններով ծածկույթ է $\overline{F}_q^n$-ի ոչզրոյական տարրերի համար:

F_q^n-ը և $\overline{F}_q^n$-ը n-չափի գծային տարածություններ են F_q դաշտի նկատմամբ, հետևաբար իզոմորֆ են իրար: Այսպիսով F_q^n-ի ոչզրոյական տարրերի՝ հիպերհարթություններով մինիմալ ծածկույթը պարունակում է $n(q-1)$ հիպերհարթություն:

Թեորեմ 2.2.2 կարելի է ներկայացնել համարժեք ձևակերպմամբ:

Թեորեմ 2.2.6 [11]: $\dot{F}_q^n$-ի կարճագույն գծայնացվող ծածկույթը պարունակում է $n(q-1)$ հարակից դաս:

[11]-ում ստացվել է նաև $\dot{F}_q^n$-ի կամայական ֆիքսված չափի հարակից դասերով կարճագույն ծածկույթի չափը: Այս թեորեմը 2.2.6-ի ընդհանրացումն է:

Թեորեմ 2.2.7 [11]: Դիցուք $0 < k < n$: $\dot{F}_q^n$-ի կամայական k-չափի հարակից դասերով ծածկույթ պարունակում է առնվազն $q^{n-k} - 1 + k(q-1)$ հարակից դաս, ընդ որում այդ չափի ծածկույթ միշտ գոյություն ունի:

2.3 $\dot{F}_q^n \times \dot{F}_q^m$-ի գծայնացվող ծածկույթ

Սահմանում 2.3.1 Դիցուք $a = (a_1, \cdots, a_n)$ վեկտորը պատակնում է F_q^n-ն, իսկ $b = (b_1, \cdots, b_m)$-ը F_q^m-ին: a և b վեկտորների **արտադրյալ** $(a \times b)$ կանվանենք հետևյալ վեկտորը F_q^{n+m}-ից՝ $(a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_m)$.

Սահմանում 2.3.2: Դիցուք $A \subseteq F_q^n$ և $B \subseteq F_q^m$: A և B բազմությունների **դեկարտյան արտադրյալ** $(A \times B)$ է կոչվում հետևյալ բազմությունը $A \times B = \{a \times b \mid a \in A, b \in B\}$:

Այստեղ կնկարագրենք արդյունքներ, որոնք վերաբերում են $\dot{F}_q^n \times \dot{F}_q^m$-ի կարճագույն գծայնացվող ծածկույթը գտնելու խնդրին:

Պնդում 2.3.3: Եթե $A \subseteq \dot{F}_q^n \times \dot{F}_q^m$ մաքսիմալ հարակից դաս է $\dot{F}_q^n \times \dot{F}_q^m$-ի մեջ, ապա $A = A_1 \times A_2$, որտեղ A_1-ը հարակից դաս է $\dot{F}_q^n$-ում, A_2-ը հարակից դաս է $\dot{F}_q^m$-ում, $dim(A_1) = n - 1, dim(A_2) = m - 1$:

Ապացույց: Դիցուք A'-ը A-ի բոլոր վեկտորների առաջին n կորդինատների բազմությունն է: Այն հարակից դաս է $\dot{F}_q^n$-ում, քանի որ A'-ի տարրերի ցանկացած աֆֆինական կոմբինացիա A'-ից է: Այն կարող ենք ընդլայնել A_1-ի, որը ունի $n-1$ չափ: Նման ձևով կարող ենք ստանալ A_2-ը: Պարզ է, որ $A \subseteq A_1 \times A_2$, և քանի որ A-ն մաքսիմալ հարակից դաս է, ապա $A = A_1 \times A_2$:

Այսպիսով $\dot{F}_q^n \times \dot{F}_q^m$-ի բոլոր մաքսիմալ հարակից դասերը ունեն $n+m-2$ չափ և ստացվում են որպես երկու հարակից դասերի դեկարտյան արտադրյալ, որոնցից մեկը $\dot{F}_q^n$-ից է իսկ մյուսը $\dot{F}_q^m$-ից: Քանի որ ցանկացած ծածկույթից կարող ենք ստանալ նույն երկարության մաքսիմալ հարակից դասերով ծածկույթ ապա կդիտարկենք ծածկույթներ միայն մաքսիմալ հարակից դասերով: Այդ հարակից դասերը տրվում են 2 հավասարումներով, որոնցից առաջինը առնչութոււն է $\dot{F}_q^n$-ի վրա, երկրորդը՝ $\dot{F}_q^m$-ի:

Օրինակ: $(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m)$-ով նշանակենք $\dot{F}_q^n \times \dot{F}_q^m$-ի վեկտորները: $\dot{F}_2^2 \times \dot{F}_2^3$-ում ընկած հարակից դաս է հետևյալ հավասարումների համակարգի լուծումը:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1 \end{cases}$$

Հարակից դասի չափը հավասար է $2 + 3 - 2 = 3$: Հարակից դասի վեկտորները՝ $\{(10100), (10010), (10001), (10111), (01100), (01010), (01001), (01111)\}$:

$C_{n,m,q}$-ով նշանակենք $\dot{F}_q^n \times \dot{F}_q^m$-ի կարճագույն գծայնացվող ծածկույթի երկարությունը:

Եթե A-ն $\dot{F}_q^n$-ի կարճագույն ծածկույթ է, իսկ B-ն $\dot{F}_q^m$-ի ապա վերցնելով A-ի և B-ի հարակից դասերի դեկարտյան արտադրյալները կստանանք ծածկույթ $\dot{F}_q^n \times \dot{F}_q^m$-ի համար: Ըստ Թեորեմ 2.2.6-ի՝ A-ի երկարությունը $n(q-1)$ է, իսկ B-ինը՝ $m(q-1)$: Հետևաբար $C_{n,m,q} \leq n(q-1) \times m(q-1) = nm(q-1)^2$

Պարզվում է, որ եթե $n > 1$ կամ $m > 1$, ապա $\dot{F}_q^n \times \dot{F}_q^m$-ի կարճագույն գծայնացվող ծածկույթի երկարության ավելի լավ գնահատականներ կարելի է ստանալ:

Պնդում 2.3.4: $C_{n,1,q} = n(q-1)^2$:

Ապացույց: $\dot{F}_q^n \times \dot{F}_q^1$-ի մաքսիմալ հարակից դասերը $\dot{F}_q^n$-ի $n-1$ չափի հարակից դասի ու $\dot{F}_q^1$-ից ինչ-որ տարրի դեկարտյան արտադրյալ են: Քանի որ $\dot{F}_q^1$-ից ֆիքսված տարրի համար $\dot{F}_q^n \times \dot{F}_q^1$-ի վեկտորների բազմությունները չեն հատվում և իզոմորֆ են $\dot{F}_q^n$-ին, ապա $\dot{F}_q^1$-ի յուրաքանչյուր $q-1$ տարրի համար պետք է վերցնենք $\dot{F}_q^n$-ի ծածկույթ բազմապատկած համապատասխան տարրով: Հետևաբար անհրաժեշտ է $(q-1) \times n(q-1) = n(q-1)^2$ հարակից դաս:

Պնդում 2.3.5: $C_{2n,2m,q} \leq 3C_{n,m,q}$:

Ապացույց: Դիցուք $(x_1,\cdots,x_n,x_{n+1},\cdots,x_{2n},y_1,\cdots,y_m,y_{m+1},\cdots,y_{2m})$-ը վեկտոր է $\dot{F}_q^{2n}\times\dot{F}_q^{2m}$: Մենք կբաժանենք $\dot{F}_q^{2n}\times\dot{F}_q^{2m}$-ի վեկտորները 3 խմբի (վեկտորը կանվանենք ոչզրոյական եթե նրա կորդինատներից գոնե մեկը 0 չի):

1) $(x_1,\cdots,x_n)$-ը և $(y_1,\cdots,y_m)$-ը ոչզրոյական են

2) $(x_{n+1},\cdots,x_{2n})$-ը և $(y_{m+1},\cdots,y_{2m})$-ը ոչզրոյական են

3.a) $(x_1,\cdots,x_n)$-ը և $(y_{m+1},\cdots,y_{2m})$-ը ոչզրոյական են իսկ $(x_{n+1},\cdots,x_{2n})$-ը և $(y_1,\cdots,y_m)$-ը զրոյական:

3.b) $(x_1,\cdots,x_n)$-ը և $(y_{m+1},\cdots,y_{2m})$-ը զրոյական են իսկ $(x_{n+1},\cdots,x_{2n})$-ը և $(y_1,\cdots,y_m)$-ը ոչզրոյական:

Ցույց տանք, որ երեք խմբերից յուրաքանչյուրը ծածկելը համարժեք է $\dot{F}_q^{n}\times\dot{F}_q^{m}$-ը ծածկելուն: Դիցուք L-ը $\dot{F}_q^{n}\times\dot{F}_q^{m}$-ի ծածկույթ է և հարակից դասերը բնութագրող հավասարումների մեջ փոփոխականները նշանակված են $u_1,\cdots,u_n$ և $v_1,\cdots,v_m$ տառերով:

1) դեպքում անենք հետևյալ նշանակումները $u_1=x_1,\cdots,u_n=x_n$ և $v_1=y_1,\cdots,v_m=y_m$: Եթե ստացված հավասարումները դիտարկենք որպես $\dot{F}_q^{2n}\times\dot{F}_q^{2m}$-ի հարակից դասեր ապա նրանք կծածկեն 1) խմբի վեկտորները:

2) դեպքում անենք հետևյալ նշանակումները $u_1 = x_{n+1}, \cdots, u_n = x_{2n}$ և $v_1 = y_{m+1}, \cdots, v_m = y_{2m}$: Եթե ստացված հավասարումները դիտարկենք որպես $\dot{F}_q^{2n} \times \dot{F}_q^{2m}$-ի հարակից դասեր ապա նրանք կծածկեն 2) խմբի վեկտորները:

3) դեպքում անենք հետևյալ նշանակումները $u_1 = x_1 + x_{n+1}, \cdots, u_n = x_n + x_{2n}$ և $v_1 = y_1 + y_{m+1}, \cdots, v_m = y_m + y_{2m}$: Եթե ստացված հավասարումները դիտարկենք որպես $\dot{F}_q^{2n} \times \dot{F}_q^{2m}$-ի հարակից դասեր ապա նրանք կծածկեն 3) խմբի վեկտորները:

Քանի որ յուրաքանչյուր խմբի վեկտորները ծածկելու համար օգտագործում ենք ոչ ավել քան $C_{n,m,q}$ հարակից դաս, ապա կունենանք ծածկույթ, որի երկարությունը չի գերազանցում $3C_{n,m,q}$:

Թեորեմ 2.3.6: Եթե $n \geq m$ և երկուսն էլ 2-ի աստիճան են, ապա $C_{n,m,q} \leq m^{log_2 3} \frac{n}{m}(q-1)^2$:

Ապացույց: Դիցուք $n = 2^k$ և $m = 2^t$. Եթե կիրառենք Պնդում 2.3.5-ը t անգամ, ապա կստանանք.

$$C_{n,m,q} = C_{2^k,2^t,q} \leq 3^t 2^{k-t}(q-1)^2 = 3^{log_2 m} 2^{log_2 n - log_2 m}(q-1)^2 = m^{log_2 3} \frac{n}{m}(q-1)^2$$

Եթե $n = m$ կստանանք $C_{n,n,q} \leq n^{log_2 3}(q-1)^2$

Թեորեմ 2.3.7: $C_{n,m,q} \geq n(q-1)(q - \frac{1}{q^{m-1}})$:

Ապացույց: Դիցուք A-ն գծայնացվող ծածկույթ է $\dot{F}_q^n \times \dot{F}_q^m$-ի համար: A-ի յուրաքանչյուր հարակից դաս կարող ենք փոխարինել մաքսիմալ հարակից դասով, որոնք ըստ Պնդում 2.3.3-ի ունեն հետևյալ տեսքը:

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = \alpha_0 \\ \beta_1 y_1 + \cdots + \beta_m y_m = \beta_0 \end{cases}$$

Բոլոր գործակիցները F_q-ից են: Քանի որ մենք չենք ծածկում այն վեկտորները, որոնց առաջին n կամ m վերջին կորդինատները 0 են, ապա կարող ենք համարել, որ $\alpha_0 \neq 0$ և $\beta_0 \neq 0$: Բաժանելով երկու հավասարումները համապատասխան տարրերի վրա՝ կստանանք հետևյալ տեսքի համակարգ.

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 1 \\ \beta_1 y_1 + \cdots + \beta_m y_m = 1 \end{cases}$$

Դիցուք $b = (b_1, \cdots, b_m)$-ը վեկտոր է $\dot{F}_q^m$-ից: Եթե $\beta_1 y_1 + \cdots + \beta_m y_m = 1$ հարակից դասը ծածկում է այն, ապա $\beta_1 b_1 + \cdots + \beta_m b_m = 1$, այսպիսով մաքսիմալ հարակից դասերի քանակը, որոնք ծածկում են b-ն հավասար է $\beta_1 b_1 + \cdots + \beta_m b_m = 1$ հավասարման $(\beta_1, \cdots, \beta_m)$ լուծումների քանակին: Քանի որ լուծումը $m-1$ չափի հարակից դաս է, ապա ունենք q^{m-1} մաքսիմալ հարակից դասեր, որոնք ծածկում են $\dot{F}_q^m$-ի տրված վեկտորը:

A_b-ով նշանակենք A-ի հարակից դասերի բազմությունը, որոնց երկրորդ հավասարումը $(b_1, \cdots, b_m)$-ը ծածկող q^{m-1} հավասարումներից մեկն է: Առաջին հավասարումները բնութագրում են հարակից դասեր $\dot{F}_q^n$-ում: A_b-ում ընկած հարակից դասերի այդ հավասարումները կազմում են $\dot{F}_q^n$-ի գծայնացվող ծածկույթ: Եթե $(a_1, \cdots, a_n)$-ը չի ծածկվում նրանց միջոցով, ապա $(a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_m)$-ը չի ծածկվում A-ի միջոցով: Քանի որ $\dot{F}_q^n$-ի կարճագույն ծածկույթի չափը $n(q-1)$ է, ապա $|A_b| \geq n(q-1)$.

Գումարելով անհավասարությունները ըստ բոլոր $b \in \dot{F}_q^m$՝ կստանանք.

$$\sum_{b \in \dot{F}_q^m} |A_b| \geq n(q-1)(q^m-1)$$

Քանի որ A-ի հարակից դասերի երկրորդ հավասարումներից յուրաքանչյուրը ծածկում է q^{m-1} վեկտորներ $\dot{F}_q^m$-ից, կստանանք.

$$\sum_{b \in \dot{F}_q^m} |A_b| = q^{m-1}|A|$$

$$|A| \geq n(q-1)\frac{q^m-1}{q^{m-1}} = n(q-1)(q - \frac{1}{q^{m-1}})$$

Եթե $m = 1$, այս գնահատականը համընկնում է Պնդում 2.3.4-ի արդյունքի հետ, որտեղ $C_{n,1,q} = n(q-1)^2$:

Թեորեմ 2.3.8: $C_{n,2,q} \leq 3\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil(q-1)^2$:

Ապացույց: $\dot{F}_q^n \times \dot{F}_q^2$-ի վեկտորները ունեն հետևյալ տեսքը $(x_1, \cdots, x_n, y_1, y_2)$.

Նախ ցույց տանք, որ $C_{2,2,q} \leq 3(q-1)^2$. Դիտարկենք հարակից դասերի հետևյալ բազմությունը $\dot{F}_q^2 \times \dot{F}_q^2$-ից:

Յուրաքանչյուր $a, b \in \dot{F}_q$.

$$(1)\begin{cases} x_1 = a \\ y_1 = b \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} x_2 = a \\ y_2 = b \end{cases} \qquad (3)\begin{cases} x_1 + x_2 = a \\ y_1 + y_2 = b \end{cases}$$

3 խմբերից յուրաքանչյուրում կա $(q-1)^2$ հարակից դաս: Դիտարկենք կամայական վեկտոր $\dot{F}_q^2 \times \dot{F}_q^2$-ից՝ $v = (a_1, a_2, b_1, b_2)$. Եթե a_1-ը և b_1-ը 0 չեն, ապա v-ն ծածկվում է (1) խմբի հարակից դասերց մեկով: Եթե a_2-ը և b_2-ը 0 չեն ապա v-ն ծածկվում է (2) խմբի հարակից դասերից մեկով: Եթե a_1-ից ու a_2-ից ինչ-որ մեկը 0 է և b_1-ից ու b_2-ից ինչ-որ մեկը 0 է, ապա v-ն ծածկվում է (3) խմբի հարակից դասերից մեկով: Այսպիսով ունենք $3(q-1)^2$ չափի ծածկույթ $\dot{F}_q^2 \times \dot{F}_q^2$-ի համար:

Հիմա ենթադրենք $n = 2k$ և դիտարկենք $\dot{F}_q^n \times \dot{F}_q^2$-ում հետևյալ հարակից դասերի բազմությունները: Յուրաքանչյուր $i = 1,3, \cdots ,2k-1$ և $a, b \in \dot{F}_q$.

$$(1_i)\begin{cases} x_i = a \\ y_1 = b \end{cases} \qquad (2_i)\begin{cases} x_i = a \\ y_2 = b \end{cases} \qquad (3_i)\begin{cases} x_i + x_{i+1} = a \\ y_1 + y_2 = b \end{cases}$$

Եթե $v = (a_1, a_2 \cdots, a_n, b_1, b_2) \in \dot{F}_q^n \times \dot{F}_q^2$, ապա ինչ-որ i-ի համար ($i \in \{1,3, \cdots ,2k-1\}$) (a_i, a_{i+1})-ը ոչզրոյական է: Ակնհայտ է, որ v-ն կծածկվի (1_i), (2_i) կամ (3_i) հարակից դասերից մեկով:

Եթե n-ը կենտ է որոշ հարակից դասեր պետք չեն գա: Այսպիսով ցանկացած n-ի համար $3\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil(q-1)^2$ չափի ծածկույթ գոյություն ունի:

Հետևանք: Եթե $q=2$, ապա Թեորեմներ 2.3.7 և 2.3.8-ից հետևում է որ $C_{n,2,2}=3\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$:

Երբ $n=m=2$ ունենք $2(q-1)^2\frac{q+1}{q}\leq C_{2,2,q}\leq 3(q-1)^2$: Ակնհայտ է որ $C_{n,2,2}=3$: Անհավասարություններից հետևում է, որ $11\leq C_{2,2,3}\leq 12$:

Թեորեմ 2.3.9: $C_{2,2,3}=12$

Ապացույց: Մենք պետք է գտնենք ծածկույթ հետևյալ բազմության համար:

$$\dot{F}_3^2\times\dot{F}_3^2=\begin{pmatrix}0,1\\0,2\\1,0\\1,1\\2,2\\2,0\\2,1\\2,2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0,1\\0,2\\1,0\\1,1\\2,2\\2,0\\2,1\\2,2\end{pmatrix}$$

Դիցուք A-ն գծայնացվող ծածկույթ է $\dot{F}_3^2\times\dot{F}_3^2$-ի համար: A-ի հարակից դասերը ունեն հետևյալ տեսքը.

$$\begin{cases}\alpha_1x_1+\alpha_2x_2=1\\\beta_1x_1+\beta_2x_2=1\end{cases}$$

որտեղ $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\in F_3$, α_1,α_2-ից գոնե մեկը 0 չի և β_1,β_2-ից գոնե մեկը 0 չի:

t_{ij}-ով նշանակենք A-ի հարակից դասերի քանակը, որոնց ներկայացնող համակարգի երկրորդ հավասարումը $iy_1 + jy_2 = 1$ է: A-ի հզորությունը հավասար է t_{ij}-երի գումարին, որտեղ $0 \leq i \leq 2,\ 0 \leq j \leq 2$ և $t_{00} = 0$:

Օրինակ (0,1)-վեկտորը ծածկող հարակից դասերը սրանք են՝ $y_2 = 1, y_1 + y_2 = 1$ և $2y_1 + y_2 = 1$: Օգտագործելով նույն արգումենտները ինչ Թեորեմ 2.3.7-ում՝ կստանանք $t_{01} + t_{11} + t_{21} \geq 4$. Եթե սա կիրառենք $\dot{F}_3^2$ բոլոր վեկտորների համար կստանանք հետևյալ անհավասարությունները.

$$\begin{cases} t_{01} + t_{11} + t_{21} \geq 4 \\ t_{02} + t_{12} + t_{22} \geq 4 \\ t_{10} + t_{11} + t_{12} \geq 4 \\ t_{10} + t_{01} + t_{22} \geq 4 \\ t_{10} + t_{02} + t_{21} \geq 4 \\ t_{20} + t_{21} + t_{22} \geq 4 \\ t_{20} + t_{01} + t_{12} \geq 4 \\ t_{20} + t_{02} + t_{11} \geq 4 \end{cases}$$

Կան 8 ամբողջաթիվ անհայտներ, $t_{ij} \geq 0, 0 \leq i \leq 2, 0 \leq j \leq 2, t_{00}$-ն բացակայում է: Խնդիրն է գտնել համակարգի լուծում, որի համար t_{ij}-երի գումարը ամենափոքրն է:

Ենթադրենք t_{ij}-երից մեկը 2 է (եթե կա 3, ապա նույն դատողություններով կարող ենք ապացուցել, որ անհայտների գումարը ≥ 13).

Ենթադրենք $t_{02} = 2$: Դիտարկենք հետևյալ դեպքերը՝

Եթե $t_{01} = 0$, ապա $t_{10} + t_{22} \geq 4$ և $t_{11} + t_{21} \geq 4$ և $t_{12} + t_{20} \geq 4$ այսպիսով բոլոր t_{ij}-երի գումարը $\geq 2 + 0 + 4 + 4 + 4 = 14$:

Եթե $t_{01} = 1$, ապա $t_{10} + t_{22} \geq 3$ և $t_{11} + t_{21} \geq 3$ և $t_{12} + t_{20} \geq 3$ այսպիսով բոլոր t_{ij}-երի գումարը $\geq 2 + 1 + 3 + 3 + 3 = 12$:

Եթե $t_{01} = 2$, ապա $t_{10} + t_{11} + t_{12} \geq 4$ և $t_{20} + t_{21} + t_{12} \geq 4$ այսպիսով բոլոր t_{ij}-երի գումարը $\geq 2 + 2 + 4 + 4 = 12$:

Բոլոր դեպքերի համար ստացանք, որ t_{ij}-երի գումարը ≥ 12: Դա նշանակում է, որ $\dot{F}_3^2 \times \dot{F}_3^2$-ի կարճագույն գծայնացվող ծածկույթը պարունակում է առնվազն 12 հարակից դաս:

2.4 Գծայնացվող ծածկույթ F_2 դաշտի վրա փրված հավասարման լուծումների բազմության համար:

Դիտարիենք $3n$ անհայտով հետևյալ հավասարումը F_2 դաշտի վրա:

$$x_1 x_2 \cdots x_n + x_{n+1} x_{n+2} \cdots x_{2n} + x_{2n+1} x_{2n+2} \cdots x_{3n} = 1 \tag{2.5}$$

Լուծումների բազմությունը F_2^{3n}-ի ենթատարածություն է: Անհրաժեշտ է գտնել գծայնացվող ծածկույթ այդ բազմության համար:

Դիտարկենք հետևյալ տեսքի հարակից դասը:

$$\begin{cases} x_i = 1, \quad i = 1,2,\cdots,n \\ x_{n+1} = 0 \\ x_{2n+1} = 0 \end{cases}$$

Այս տեսքի հարակից դասերը ընկած են հավասարման լուծումների բազմության մեջ: Նրանց միջոցով բազմությունը ծածկվում է հետևյալ կերպ: Հավասարման անհայտները բաժանենք 3 խմբի: Առաջին խմբում $x_1, x_2, \cdots, x_n$, երկրորդում՝ $x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{2n}$, իսկ երրորդում՝ $x_{2n+1}, x_{2n+2}, \cdots x_{3n}$: Հարակից դասեր կառուցենք այսպես: Վերցնենք 2 խմբեր և յուրաքանչյուրից մի անհայտ հավասարեցնենք 0-ի, մյուս խմբի անհայտները հավասարեցնենք 1-ի: Այսպիսով կստանանք $3n^2$ հարակից դաս, որոնք կծածկեն (2.5)-ի լուծումների բազմությունը, բացի $(1,1,\cdots,1)$ վեկտորից, որը կարող ենք ծածկել 1 տարրանոց հարակից դասով:

Ստացանք գծայնացվող ծածկույթ, որը պարունակում է $3n^2 + 1$ հարակից դաս: Պարզվում է, որ գոյություն ունի կարգով ավելի լավ ծածկույթ: Այստեղ ևս, ինչպես 2.2 գլխում կօգտագործենք գծայնացվող ծածկույթների և արգելափակող բազմությունների կապը: Կստանանք գնահատական արգելափակող բազմությունների համար, որի միջոցով կստանանք ծածկույթ հավասարման համար:

Դիցուք $e_1, \cdots, e_n$-ը F_2^n-ի ստանդարտ բազիս է: B-ով նշանակենք հետևյալ բազմությունը՝

$$B = \{0, e_1, \cdots, e_n\} \cup \{e_i + e_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$$

Ցույց տանք, որ B-ն $(n-2)$-արգելափակող բազմություն է F_2^n-ում: Պետք է ցույց տալ, որ B-ն ունի հատում ցանկացած $n-2$ չափի հարակից դասի հետ: Ենթադրենք L-ը $n-2$ չափի հարակից դաս է: Եթե այն պարունակում է զրոյական վեկտորը, ապա հատվում է B-ի հետ: Եթե չի պարունակում, ապա B-ն կարելի է ներկայացնել որպես F_2-ի վրա տրված համակարգի լուծում.

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 1 \\ \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n = 1 \end{cases}$$

Հավասարումները գծորեն անկախ են: Եթե $\alpha_i = \beta_i = 1$ ինչ-որ i-ի համար, ապա $e_i \in L$. Հակառակ դեպքում գոյություն ունի $i \neq j$ զույգ, այնպիսին, որ $\alpha_i = 1, \beta_i = 0, \alpha_j = 0, \beta_j = 1$. Այս դեպքում $e_i + e_j \in L$: Հետևաբար B-ն $(n-2)$-արգելափակող բազմություն է, որը պարունակում է $1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} + 1 = O(n^2)$:

Թեորեմ 2.4.1: $\dot{F}_2^n$-ում մինիմալ $(n-2)$-արգելափակող բազմության հզորությունը չի գերազանցում $3n^{\log_2 3}$.

Ապացույց: Կառուցնեք $3n^{\log_2 3}$ հզորության $(n-2)$-արգելափակող բազմություն $\dot{F}_2^n$-ում: Կառուցենք $F(n)$ բազությունները ռեկուրսիվ, որտեղ $F(n)$-ը $(n-2)$-արգելափակող բազմություն $\dot{F}_2^n$-ում: Պետք է ցույց տանք, որ $F(n)$-ը ունի հատում կամայական $n-2$ չափի հարակից դասի հետ, որը չի պարունակում զրոյական վեկտորը:

$F(2)$-ը սահմանենք $=\{(0,1),(1,0),(1,1)\}$: Ենթադրենք արդեն կառուցել ենք $F(n)$-ը և կառուցենք $F(2n)$-ը հետևյալ կերպ.

Յուրաքանչյուր $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in F(n)$ առաջացնում է 3 վեկտոր $F(2n)$-ում՝ $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, $(0,\cdots,0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n,0\cdots,0)$: Հետևաբար $|F(2n)|=3|F(n)|$. Ցույց տանք, որ $F(2n)$-ը $(2n-2)$-արգելափակող բազմություն $\dot{F}_2^{2n}$-ում: Դիցուք L-ը $2n-2$ չափի հարակից դաս է $\dot{F}_2^{2n}$-ում: Դիտարկենք L-ը ներկայացնող գծային հավասարումների համակարգը:

$$\begin{cases}\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n+\alpha_{n+1}x_{n+1}+\cdots+\alpha_{2n}x_{2n}=1\\ \beta_1x_1+\beta_2x_2+\cdots+\beta_nx_n+\beta_{n+1}x_{n+1}+\cdots+\beta_{2n}x_{2n}=1\end{cases} \quad (2.6)$$

Նշանակենք $A_1=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, $A_2=(\alpha_{n+1},\cdots,\alpha_{2n})$, $B_1=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$, $B_2=(\beta_{n+1},\cdots,\beta_{2n})$: Պարզ է, որ միաժամանակ A_1-ը և A_2-ը կամ միաժամանակ B_1-ը և B_2-ը չեն կարող լինել զրոյական վեկտորներ: Դիտարկենք հետևյալ 3 դեպքերը:

1) A_1-ը և B_1-ը ոչզրոյական վեկտորներ են:

2) A_2-ը և B_2-ը ոչզրոյական վեկտորներ են:

3.a) A_1-ը և B_2-ը ոչզրոյական են, իսկ B_1-ը և A_2-ը զրոյական

3.b) A_1-ը և B_2-ը զրոյական են, իսկ B_1-ը և A_2-ը ոչզորյական

1) Դեպքում դիտարկենք հետևյալ համակարգը.

$$\begin{cases}\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n=1\\ \beta_1x_1+\cdots+\beta_nx_n=1\end{cases}$$

Համակարգի լուծումը $n-2$ չափի հարակից դաս է $\dot{F}_2^n$-ում, հետևաբար լուծումներից մեկը՝ $(x_1^0, \cdots, x_n^0)$, պատկանում է $F(n)$-ին: $(x_1^0, \cdots, x_n^0, 0, \cdots, 0)$ կլինի (2.6)-ի լուծում $F(2n)$-ից:

2) Դեպքում դիտարկենք հետևյալ համակարգը.

$$\begin{cases} \alpha_{n+1}x_1 + \cdots + \alpha_{2n}x_n = 1 \\ \beta_{n+1}x_1 + \cdots + \beta_{2n}x_n = 1 \end{cases}$$

Համակարգի լուծումը $n-2$ չափի հարակից դաս է $\dot{F}_2^n$-ում, հետևաբար լուծումներից մեկը՝ $(x_1^0, \cdots, x_n^0)$, պատկանում է $F(n)$-ին: $(0, \cdots, 0, x_1^0, \cdots, x_n^0)$ կլինի (2.6)-ի լուծում $F(2n)$-ից:

3.a) Դեպքում դիտարկենք հետևյալ համակարգը.

$$\begin{cases} \alpha_1x_1 + \cdots + \alpha_nx_n = 1 \\ \beta_{n+1}x_1 + \cdots + \beta_{2n}x_n = 1 \end{cases}$$

Համակարգի լուծումը $n-2$ չափի հարակից դաս է $\dot{F}_2^n$-ում, հետևաբար լուծումներից մեկը՝ $(x_1^0, \cdots, x_n^0)$, պատկանում է $F(n)$-ին: $(x_1^0, \cdots, x_n^0, x_1^0, \cdots, x_n^0)$ կլինի (2.6)-ի լուծում $F(2n)$-ից:

3.b) Դեպքում դիտարկենք հետևյալ համակարգը.

$$\begin{cases} \alpha_{n+1}x_1 + \cdots + \alpha_{2n}x_n = 1 \\ \beta_1x_1 + \cdots + \beta_nx_n = 1 \end{cases}$$

Համակարգի լուծումը $n-2$ չափի հարակից դաս է $\dot{F}_2^n$-ում, հետևաբար լուծումներից մեկը՝ $(x_1^0,\cdots,x_n^0)$, պատկանում է $F(n)$-ին: $(x_1^0,\cdots,x_n^0,x_1^0,\cdots,x_n^0)$ կլինի (2.6)-ի լուծում $F(2n)$-ից:

Ստացանք, որ $F(2n)$-ը $(2n-2)$-արգելափակող բազմություն է $\dot{F}_2^n$-ում:

Ունենք $|F(2)|=3$: $|F(2n)|=3|F(n)|$ հետևաբար եթե $n=2^k$, ապա $|F(n)|=3^k=3^{log_2 n}=n^{log_2 3}$

Դիտարկենք ընդհանուր դեպքը, երբ n-ը կամայական է: $\dot{F}_2^n$-ի $(n-2)$-արգելափակող բազությունների քանակի ֆունկցիան (n-ից կախված) չնվազող է, քանի որ $(n-2)$-արգելափակող բազության վեկտորներ վերջին կորդինատները դեն նետելով՝ ստանում ենք $(n-3)$-արգելափակող բազություն $\dot{F}_2^{n-1}$-ի համար: Եթե $2^k<n\leq 2^{k+1}$, ապա $\dot{F}_2^n$-ի մինիմալ $(n-2)$-արգելափակող բազության էլեմենտների քանակը մեծ չէ $\dot{F}_2^{2^{k+1}}$-ում մինիմալ $(2^{k+1}-2)$-արգելափակող բազության էլեմենտների քանակից, որը մեծ չէ 3^{k+1}-ից: Քանի որ $k<log_2 n$, ունենք $3^{k+1}<3\times 3^{log_2 n}=3n^{log_2 3}$.

Հետևանք: F_2^n-ում մինիմալ $(n-2)$-արգելափակող բազմության հզորությունը չի գերազանցում $3^{log_2 n}+1$:

Նախ մի քանի պարզ փաստեր:

Պնդում 2.4.2: Դիցուք A-ն և B-ն հարակից դասեր են համապատասխանաբար F_2^n-ում և F_2^m-ում: $A \times B$ դեկարտյան արտադրյալը հարակից դաս է F_2^{n+m}-ում, որի չափը՝ $dim(A \times B) = dim(A) + dim(B)$:

Պնդում 2.4.3: Դիցուք $L_1, \cdots, L_k$-ն հարակից դասերով ծածկյույթ է F_2^n-ի վրա տրված $x_1x_2 \cdots x_n = 0$ հավասարման համար, այնպես, որ ցանկացած երկու իրարից տարբեր լուծումներ ընկած են հարակից դասերից գոնե մեկի մեջ: Այդ դեպքում $L_1 \times L_1, L_2 \times L_2, \cdots, L_k \times L_k$-ն F_2^{2n}-ում տրված $x_1x_2 \cdots x_n + x_{n+1}x_{n+2} \cdots x_{2n} = 0$հավասարաման լուծումների բազմության գծայնացվող ծածկույթ է (բացի $(1,1,\cdots,1)$ վեկտորից):

Պնդում 2.4.4: $F_2^n/\{(1,1,\cdots,1)\}$ բազմության ցանկացած 2 վեկտորի համար գոյություն ունի հարակից դաս, որը պարունակում է դրանք, բայց չի պարունակում $(1,1,\cdots,1)$ վեկտորը:

Պնդում 2.4.5: $F_2^n/\{(1,1,\cdots,1)\}$ բազմության համար գոյություն ունի հիպերհարթություններով ծածկույթ, այնպիսին որ ցանկացած 2 վեկտոր ընկած են մի հիպերհարթության մեջ, այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի նման ծածկույթ $F_2^n/\{(0,0,\cdots,0)\}$ բազմության համար:

Ապացույց: Սա հետևում է այն փաստից, որ եթե բոլոր վեկտորներին գումարենք $(1,1,\cdots,1)$ ապա $F_2^n/\{(1,1,\cdots,1)\}$-ը կարտապատկերվի $F_2^n/\{(0,0,\cdots,0)\}$-ն և

$(1,1,\cdots,1)$ չպարունակող բոլոր հարակից դասերը չեն պարունակի $(0,0,\cdots,0)$ վեկտորը:

Հաջորդ պնդումը կապ է հաստատում ծածկույթների և $(n-2)$-արգելափակող բազմությունների մեջ:

Պնդում 2.4.6: $\dot{F}_2^n$-ի համար հիպերհարթություններով k երկարության ծածկույթի գոյությունը, այնպես որ ցանկացած 2 ոչզրոյական վեկտոր ընկած են առնվազն մի հիպերհարթության մեջ, համարժեք է $\dot{F}_2^n$-ում k երկարության $(n-2)$-արգելափակող բազմության գոյությանը:

Ապացույց: Դիցուք $H_1,\cdots,H_k$-ն $\dot{F}_2^n$-ի համար հիպերհարթություններով ծածկույթ է, այնպես որ ցանկացած 2 վեկտոր ընկած են առնվազն մի հիպերհարթության մեջ: Ենթադրենք H_i-ն սահմանված է հետևյալ հավասարումով $\alpha_1^i x_1+\cdots+\alpha_n^i x_n=1, i=1,2,\cdots,k$. Նշանակենք $H=\{(\alpha_1^i,\cdots,\alpha_n^i)|i=1,2,\cdots,k\}$. Նշանակենք $H=\{(\alpha_1^i,\cdots,\alpha_n^i)|i=1,2,\cdots,k\}$. Ցույց տանք, որ H-ը $(n-2)$-արգելափակող բազմություն է $\dot{F}_2^n$-ում: Դիցուք ունենք $n-2$ չափի հարակից դաս $\dot{F}_2^n$-ում, որը սահմանված է հետևյալ հավասարումների համակարգով.

$$\begin{cases}\beta_1 x_1+\cdots+\beta_n x_n=1\\ \gamma_1 x_1+\cdots+\gamma_n x_n=1\end{cases} \tag{2.7}$$

$(\beta_1,\cdots,\beta_n)$ և $(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)$ վեկտորների զույգի համար գոյություն ունի հիպերհարթություն, որը ծածկում է երկուսն էլ: Այսինքն ինչ-որ i-ի համար $\alpha_1^i\beta_1+\cdots+$

$\alpha_n^i\beta_n = 1$ և $\alpha_1^i\gamma_1 + \cdots + \alpha_n^i\gamma_n = 1$, այսինքն $(\alpha_1^i, \cdots, \alpha_n^i)$-ը հարակից դասի և H-ի փնտրվող ընդհանուր վեկտորն է:

Այժմ ենթադրենք $H = \{(\alpha_1^i, \cdots, \alpha_n^i) | i = 1,2, \cdots, k\}$-ը $(n-2)$-արգելափակող բազմություն է $\dot{F}_2^n$-ում: H_i-ով նշանակենք $\alpha_1^i x_1 + \cdots + \alpha_n^i x_n = 1, i = 1,2, \cdots, k$ հավասարումով որոշված հիպերհարթությունը: Ցույց տանք, որ $H_1, \cdots, H_k$-ն $\dot{F}_2^n$-ի համար հիպերհարթություններով ծածկույթ է, այնպես որ ցանկացած 2 վեկտոր ընկած են առնվազն մի հիպերհարթության մեջ: Դիցուք $(\beta_1, \cdots, \beta_n)$-ը և $(\gamma_1, \cdots, \gamma_n)$-ը երկու տարբեր վեկտորներ են $\dot{F}_2^n$-ում: Դիտարկենք (2.7) հավասարումով որոշված $n-2$ չափի հարակից դասը: Այդ հարակից դասը ունի հատում H-ի հետ: Այսինքն ինչ-որ i-ի համար ունենք $\alpha_1^i\beta_1 + \cdots + \alpha_n^i\beta_n = 1$ և $\alpha_1^i\gamma_1 + \cdots + \alpha_n^i\gamma_n = 1$: Սրանից հետևում է, որ $(\beta_1, \cdots, \beta_n)$-ը և $(\gamma_1, \cdots, \gamma_n)$-ը ծածկվում են H_i-ով:

Այժմ կարող ենք ապացուցել հիմնական թեորեմը:

Պնդում 2.4.7: (2.5) հավասարման կարճագույն գծայնացվող ծածկույթի չափը չի գերազանցում $9n^{log_2^3} + 4$:

Ապացույց: Հավասարման լուծումների բազմույունը բաժանենք 4 չհատվող ենթաբազմությունների:

$A = \{(\alpha_1, \cdots, \alpha_{3n}) \mid \alpha_1, \cdots, \alpha_n = 1, \alpha_{n+1}, \cdots, \alpha_{2n} = 0, \alpha_{2n+1}, \cdots, \alpha_{3n} = 0\}$,

$B = \{(\alpha_1, \cdots, \alpha_{3n}) \mid \alpha_1, \cdots, \alpha_n = 0, \alpha_{n+1}, \cdots, \alpha_{2n} = 1, \alpha_{2n+1}, \cdots, \alpha_{3n} = 0\}$,

$$C = \{(\alpha_1, \cdots, \alpha_{3n}) \mid \alpha_1, \cdots, \alpha_n = 0, \alpha_{n+1}, \cdots, \alpha_{2n} = 0, \alpha_{2n+1}, \cdots, \alpha_{3n} = 1\},$$

$$D = \{(1, \cdots, 1)\}$$

Ենթադրենք ունենք գծայնացվող ծածկույթ հետևյալ հավասարման համար,

$$x_1 x_2 \cdots x_n + x_{n+1} x_{n+2} \cdots x_{2n} = 0 \tag{2.7}$$

որի երկարությունը $g(n)$ է: Կառուցենք (2.5) հավասրաման ծածկույթ հետևյալ ձևով: Նախ ստանանք ծածկույթ A բազմության համար (2.7) հավասարման ծածկույթի բոլոր հարակից դասերի $2n$ երկարության վեկտորների սկզբում ավելացնելով $(1, \cdots, 1)$ վեկտորը: Նմանապես կծածկենք B և C բազմությունները $(1, \cdots, 1)$ ավելացնելով համապատասխանաբար այդ նույն հարակից դասերի վեկտորների մեջտեղում և վերջում: Վերջապես D-ն կծածկենք մի 0-չափանի հարակից դասով, որը պարունակում է $3n$ երկարության $(1, \cdots, 1)$ վեկտորը: Այսպիսով ունեցանք ծածկույթ, որի երկարությունը հավասար է $3g(n) + 1$:

Ըստ Թեորեմ 2.4.1-ի կստանանք $(n-2)$ արգելափակող բազմություն $\dot{F}_2^n$-ում, որը ունի $3n^{\log_2 3}$-ից ոչ ավելի երկարություն: Պնդում 2.4.6-ից հետևում է, որ կա նույն երկարության հիպերհարթություններով ծածկույթ $\dot{F}_2^n$-ում, անպես որ ցանկացած 2 ոչզորյական վեկտոր ծածկվում են մի հարակից դասով: Օգտագործելով Պնդում 2.4.5-ը՝ կստանանք նույն երկարության հիպերհարթություններով ծածկույթ $F_2^n / \{(1,1, \cdots, 1)\}$ բազմության համար, այնպիսին որ ցանկացած 2 վեկտոր ընկած են մի հիպերհարթության մեջ: Վերջապես օգտագործելով Պնդում 2.4.3-ը կստանանք

$3n^{log_2 3} + 1$ երկարության ծածկույթ $x_1 x_2 \cdots x_n + x_{n+1} x_{n+2} \cdots x_{2n} = 0$ հավասարման լուծումների բազմության համար: Քանի որ $g(n) \leq 3n^{log_2 n} + 1$ և (2.5) հավասարման համար վերը կառուցված ծածկույթը ունի ունի ոչ ավել քան $3g(n) + 1$ երկարություն, ապա կստանանք (2.5) հավասարման գծայանացվող ծածկույթ $3g(n) + 1 \leq 9n^{log_2 n} + 4$ երկարության:

3. Գծայնացվող ծածկույթներ մատրիցների համար

3.1 *Ընդհանուր սահմանումներ և նշանակումներ*

Սահմանում 3.1.1: F_q վերջավոր դաշտի վրա տրված $n \times n$ չափի մատրիցների տարածությունը նշանակենք $\boldsymbol{M_n(F_q)}$: Այն n^2 չափի տարածություն է F_q դաշտի նկատմամբ:

Այս գլխում կդիարկենք կդիտարկենք գծայնացվող ծածկույթներ $M_n(F_q)$-ի ենթաբազմությունների համար:

Սահմանում 3.1.2: $m \in M_n(F_q)$ մատրիցը կոչվում է **վերասերված**, եթե մատրիցի դետերմինանտը 0 է ($det(m) = 0$):

Սահմանում 3.1.3: $m \in M_n(F_q)$ մատրիցը կոչվում է **չվերասերված**, եթե մատրիցի դետերմինանտը 0 չէ ($det(m) \neq 0$):

$M_n(F_q)$-ի չվերասերված մատրիցների բազմությունը բազմապատկման նկատմամբ կազմում է խումբ և նշանակվում է $GL_n(F_q)$ (General Linear Group):

Հայտնի է, որ F_q^n-ում k չափի գծային ենթատարածությունների քանակը հավասար է $(0 < k \le n)$ [15]

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q^{n-k+1}-1)}{(q^k-1)(q^{k-1}-1)\cdots(q-1)}$$

$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ թիվը կոչվում է Գաուսի գործակից և նրա համար տեղի ունեն հետևյալ առնչությունները՝ $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_q = 1, \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}_q$:

3.2 Կարճագույն գծայնացվող ծածկույթ վերասերված մատրիցների բազմության համար:

Վերասերված մատրիցների բազմությունը նշանակենք $M_n(F_q)\backslash GL_n(F_q)$-ով:

$$det\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = 0 \qquad (3.1)$$

(3.1) հավասարումը կարելի է դիտարկել, որպես F_q դաշտում որոշված n^2 անհայտներից կախված բազմանդամային հավասարում:

Այդ դասի մաքսիմալ հարակից դասերը հետազոտված ու դասակարգված են [12,13,14]-ում: Հեշտ է նկատել, որ կան $n^2 - n$ չափի հարակից դասեր $M_n(F_q)\backslash GL_n(F_q)$-ում: Այդպիսի հարակից դաս կարելի է ստանալ վերցնելով մատրիցները, որոնց տողերը կամ սյուները գծորեն կախված են: Օրինակներ.

1) Մատրիցները, որոնց առաջին տողը զրոներ են այդպիսի հարակից դաս է:
2) Մատրիցները, որոնց առաջին և երկրորդ սյուների գումարը (որպես վեկտորներ) հավասար է երրորդ սյանը:

Թեորեմ 3.2.1[14]: Դիցուք W-ն գծային ենթատարածություն է $M_n(F_q)$-ում, r-ը ամբողջ թիվ է և $dim(W) > rn$, ապա W-ն պարունակում է մատրից, որի ռանգը մեծ է r-ից:

Եթե վերցնենք $r = n - 1$ ապա այս թեորեմից կհետևի հետևյալը: Եթե W ենթատարածության չափը մեծ է $n^2 - n$-ից, ապա այն պարունակում է մատրից, որի ռանգը մեծ է $n - 1$: Քանի որ $n - 1$-ից մեծ ռանգ ունեցող մատրիցը չվերասերված է, ապա վերասերված մատրիցների դասում մաքսիմալ ենթատարածությունը ունի $n^2 - n$ չափ:

[12,13]-ում ընդհանրացվում է այս արդյունքը ոչ միայն ենթատարածությունների այլ նաև վերասերված մատրիցներով հարակից դասերի վրա: Տրվում է այդ հարակից դասերի նկարագրությունը:

Սահմանում 3.2.2: Դիցուք x-ը և y-ը վեկտորներ են F_q^n-ում: $x \otimes y \in M_n(F_q)$-ով նշանակվում է x և y վեկտորների **Կրոնեկերի արտադրյալը**: Այն մատրից է և որոշվում է այսպես: Եթե $x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n)$, ապա

$$x \otimes y = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \cdots & x_1 y_n \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & \cdots & x_2 y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n y_1 & x_n y_2 & \cdots & x_n y_n \end{pmatrix}$$

$A, B \subseteq F_q^n$ բազմությունների համար $A \otimes B$-ով նշանակենք հետևյալ բազմության գծային թաղանթը $\{x \otimes y | x \in A, y \in B\}$

Այս թեորեմը տալիս է $M_n(F_q) \backslash GL_n(F_q)$-ում մաքսիմալ հարակից դասերի նկարագրությունը:

Թեորեմ 3.2.3[12,13] Դիցուք $W \subseteq M_n(F_q)$-ն հարակից դաս է այնպես որ ցանկացած $m \in M_n(F_q)$-ի համար $det(m) = 0$: Այդ դեպքում $dim(W) \leq n(n-1)$:

Եթե $dim(W) = n(n-1)$, ապա կամ $W = E \otimes F_q^n$ կամ $W = F_q^n \otimes E$, որտեղ E-ն ինչ-որ $n-1$ չափանի ենթատարածություն է F_q^n-ում:

Թեորեմից հետևում է, որ F_q^n-ի յուրաքանչյուր $n-1$ չափի ենթատարածության համապատասխանում է $M_n(F_q) \backslash GL_n(F_q)$-ում ընկած 2 մաքսիմալ հարակից դասեր: F_q^n-ի $n-1$ չափի ենթատարածությունները որոշվում են որպես համասեռ գծային հավասարման լուծումների բազմություն՝ $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$, որտեղ $\alpha_1, \cdots \alpha_n \in F_q$ և ոչ բոլորն են զրոյական: Երկու հարակից դասերը որոշվում են հետևյալ կերպ.

մեկում գծային առնչությունը դրվում է մատրիցի տողերի վրա (այն կանվանենք տողային հարակից դաս), իսկ մյուսում մատրիցի սյուների (այն կանվանենք սյունային հարակից դաս): Սյունային հարակից դասի մատրիցների տրանսպոնացված մատրիցները կազմում են տողային հարակից դաս:

Օրինակ. $n = 3, q = 3$ դեպքում $x_1 + 2x_3 = 0$ հավասարումով որոշված հարակից դասերը կորոշվեն այսպես:

Տողային մատրիցը (առաջին տող գումարած երկու անգամ երրորդ տող հավասար է 0)՝

$$\begin{cases} x_{11} + 2x_{31} = 0 \\ x_{12} + 2x_{32} = 0 \\ x_{13} + 2x_{33} = 0 \end{cases}$$

Սյունային մատրիցը (առաջին սյուն գումարած երկու անգամ երրորդ սյուն հավասար 0)՝

$$\begin{cases} x_{11} + 2x_{13} = 0 \\ x_{21} + 2x_{23} = 0 \\ x_{31} + 2x_{33} = 0 \end{cases}$$

Քանի որ F_q^n-ի $n-1$ չափի ենթատարածությունների քանակը հավասար է $\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix}_q = \frac{q^{n-1}}{q-1}$, ապա կան $\frac{q^{n-1}}{q-1}$ տողային հարակից դասեր և $\frac{q^{n-1}}{q-1}$ սյունային հարակից դասեր:

Հեշտ է տեսնել, որ միայն տողային հարակից դասերը կամ միայն սյունային հարակից դասերը ծածկում են $M_n(F_q)\backslash GL_n(F_q)$: Դա հետևում է այն փաստից, որ ցանկացած վերասերված մատրից ունի գծորեն կախված տողեր և ունի գծորեն կախված սյուներ: Հաջորդ թեորեմը պնդում է, որ այդ երկու ծածկույթները կարճագույն են: Այսինքն հնարավոր չէ կառուցել գծայնացվող ծածկույթ $M_n(F_q)\backslash GL_n(F_q)$-ի համար՝ վերցնելով և տողային հարակից դասեր և սյունային՝ օգտագործելով ավելի քիչ թվով հարակից դասեր:

Թեորեմ 3.2.4: $M_n(F_q)$-ի վերասերված մատրիցների բազմության գծայնացվող ծածկույթը պարունակում է բոլոր տողային հարակից դասերը կամ բոլոր սյունային հարակից դասերը:

Ապացույց: Դիցուք L-ը $M_n(F_q)\backslash GL_n(F_q)$-ի համար գծայնացվող ծածկույթ է և այն չի պարունակում առնվազն մի տողային հարակից դաս (նշանակենք R-ով) և առնվազն մի սյունային հարակից դաս (նշանակենք C-ով): Ցույց տանք, որ գոյություն ունի վերասերված մատրից, որը չի ծածկվում L-ի միջոցով:

Քանի որ R-ը տողային հարակից դաս է, ապա գոյություն ունի գծային առնչություն R-ի մատրցիների տողերի վրա: Դա նշանակում է, որ գոյություն ունի տող, որը գծորեն կախված է մնացած տողերից: Նույն կերպ գոյություն ունի սյուն, որը գծորեն կախված է մնացած սյուներից C-ի մատրիցների վրա: Ապացույցի պարզության համար ենթադրենք, որ առաջին տողը կախված է մնացած տողերից և առաջին սյունը կախված է մնացած սյուներից:

Դա նշանակում է, որ տեղի ունեն հետևյալ գծային առնչությունները:

- $r_1 = \alpha_2 r_2 + \cdots + \alpha_n r_n$
- $c_1 = \beta_2 c_2 + \cdots + \beta_n c_n$,

որտեղ $r_1, \cdots, r_n$-ը տողային վեկտորներ են, իսկ $c_1, \cdots, c_n$-ը՝ սյունային: Կառուցենք m մատրիցը հետևյալ ձևով:

$$m = \begin{pmatrix} \beta_2\alpha_2 + \cdots + \beta_n\alpha_n & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \beta_2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_n & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Ենթամատրիցը, որտեղ առաջին տողը և առաջին սյունը բացակայում են $(n-1) \times (n-1)$ չափի միավոր մատրիցն է:

Հեշտ է տեսնել, որ m-ի վրա բավարարված են երկու գծային առնչությունները, հետևաբար այն ունի հետևյալ հատկությունները՝

- $m \in R$
- $m \in C$
- m-ը չի պատկանում այլ տողային հարակից դասի
- m-ը չի պատկանում այլ սյունային հարակից դասի

Վերջին երկու հատկությունները հետևում են այն փաստից, որ m-ի բոլոր տողերը, բացի առաջինից և m-ի բոլոր սյուները, բացի առաջինից գծորեն անկախ են:

Քանի որ L-ը չի պարունակում R-ը և C-ն, ապա այն չի ծածկում m-ը, հետևաբար չի կարող լինել $M_n(F_q)\backslash GL_n(F_q)$-ի գծայնացվող ծածկույթ:

Թեորեմ 3.2.4-ից հետևում է հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 3.2.5: $M_n(F_q)\backslash GL_n(F_q)$-ի կարճագույն գծայնացվող ծածկույթի երկարությունը հավասար է $\frac{q^n-1}{q-1} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}$:

3.3 Կարճագույն գծայնացվող ծածկույթ չվերասերված մատրիցների բազմության համար

Չվերասերված մատրիցների դասը կազմում է խումբ բազմապատկման նկատմամբ և նշանակվում է $GL_n(F_q)$: Այստեղ կնկարագրենք կարճագույն գծայնացվող ծածկույթ այդ բազմության համար:

$GL_n(F_q)$-ի մաքսիմալ հարակից դասերը նկարագրված են [16]-ում: Դիցուք $V \subseteq GL_n(F_q)$ հարակից դաս է, ընտրենք $p \in V$. Ունենք $p^{-1}V$-ն նույնպես ընկած է $GL_n(F_q)$, պարունակում է միավոր մատրիցը՝ I_n-ը և ունի նույն չափը ինչ V-ն: Նրան համապատասխան գծային տարածությունը նշանակենք H-ով: Նկատենք, որ

$$I_n - \lambda m \in GL_n(F_q), \tag{3.2}$$

ցանկացած $\lambda \in F_q$ և $m \in H$: Այստեղից հետևում է, որ H-ի ցանկացած մատրից չունի 0-ից տարբեր սեփական արժեք: Իրոք, ենթադրենք $\lambda \neq 0$-ն m-ի սեփական արժեք է: Այսինքն $det(m - \lambda I_n) = 0$: Եթե բազմապատկենք $-\frac{1}{\lambda}$-ով կստանանք $\det(I_n - \lambda m) = 0$, որը հակասում է (3.2)-ին:

Սահմանում 3.3.1: $m \in M_n(F_q)$ մատրիցի սեփական արժեքների բազմությունը կոչվում է մատրիցի **սպեկտր:** Նշանակվում է $Sp(m)$:

Սահմանում 3.3.2: $M_n(F_q)$-ի H գծային ենթատարածությունը կանվանենք **տրիվիալ սպեկտրով**, եթե ցանկացած $m \in H$-ը մատրիցի համար $Sp(m) \subseteq \{0\}$: Այնիքն H-ի մատրիցները 0-ից տարբեր սեփական արժեքներ չունեն:

Նկատենք, որ ցանկացած տրիվիալ սպեկտրով $H \subseteq M_n(F_q)$ ենթատարածության համար $I_n + H$-ը հարակից դաս է $GL_n(F_q)$-ում: Օրինակ. $NT_n(F_q)$-ով նշանակենք $M_n(F_q)$-ի խիստ վերին եռանկյունաձև մատրիցների բազմությունը: Պարզ է, որ այն ենթատարածություն է և $I_n + NT_n(F_q)$-ն չվերասերված մատրիցներով հարակից դաս է, որի չափը $\binom{n}{2}$ է:

Հետևաբար $GL_n(F_q)$-ում հարակից դասերի դասակարգումը համարժեք է $M_n(F_q)$-ում տրիվիալ սպեկտրով ենթատարածությունների դասակարգմանը: Հետևյալ թեորեմը տալիս է $GL_n(F_q)$-ում մաքսիմալ հարակից դասերի չափը:

Թեորեմ 3.3.3[16]: Դիցուք $V \subseteq M_n(F_q)$ գծային ենթատարածություն է տրիվիալ սպեկտրով: $dim(V) \leq \binom{n}{2}$:

Հետևաբար մաքսիմալ հարակից դասերը $GL_n(F_q)$-ում նույնպես ունեն $\binom{n}{2}$ չափ: Կառուցենք $GL_n(F_q)$-ի գծայնացվող ծածկույթ՝ օգտագործելով մաքսիմալ հարակից դասեր:

Թեորեմ 3.3.4: $GL_n(F_q)$-ի կարճագույն գծայնացվող ծածկույթի երկարությունը հավասար է $(q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \cdots (q - 1)$:

Ապացույց: Դիտարկենք $I_n + NT_n(F_q)$ հարակից դասը: Այստեղ խիստ վերին եռանկյունաձև մատրիցներն են՝ գումարած միավոր մատրիցը:

$$I_n + NT_n(F_q) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{n-1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Այն ունի $\binom{n}{2}$ հետևաբար $I_n + NT_n(F_q)$-ում ընկած մատրիցների քանակը $q^{\binom{n}{2}}$ է:

Հեշտ է տեսնել, որ $I_n + NT_n(F_q)$-ը $GL_n(F_q)$-ի ենթախումբ է ըստ բազմապատկման: Դիտարկենք այդ ենթախմբի ձախ հարակից դասերը: Դրանցից յուրաքանչյուրն ունի հետևյալ տեսքը $p\left(I_n + NT_n(F_q)\right) = p + pNT_n(F_q)$, որտեղ p-ն չվերասերվող մատրից է: Քանի որ $NT_n(F_q)$-ը ենթատարածություն է $M_n(F_q)$-ում ապա $pNT_n(F_q)$-ը նույնպես ենթատարածություն է և $p + pNT_n(F_q)$-ը $pNT_n(F_q)$ գծային ենթատարածության հարակից դաս է: Հետևաբար ցանկացած $p\left(I_n + NT_n(F_q)\right)$ ձախ հարակից դաս ըստ բազմապատկման, գծային տարածության հարակից դաս է $GL_n(F_q)$-ում: Ձախ հարակից դասերը չեն հատվում և ակնհայտորեն կազմում են կարճագույն գծայնացվող ծածկույթ $GL_n(F_q)$-ի համար:

$GL_n(F_q)$-ի կարգը հայտնի է, որ հավասար է $(q^n-1)(q^n-q)(q^n-q^2)\cdots(q^n-q^{n-1})$: Ծածկույթի երկարությունը հավասար է $I_n + NT_n(F_q)$-ի ինդեքսին, որը հավասար է $\frac{(q^n-1)(q^n-q)(q^n-q^2)\cdots(q^n-q^{n-1})}{q^{\binom{n}{2}}} = (q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q-1)$:

4. Աֆինական ձևափոխությունների խմբի գործողությունը վերջավոր դաշտերի ենթաբազմությունների վրա

4.1 Խմբի գործողությունը բազմանդամային հավասարումների լուծումների բազմությունների վրա: Համարժեքության դասերի քանակը:

Շենոնը [17] և Պովարովը [18] ներկայացրել են բուլյան ֆունկցիաների դասեր՝ կապված ֆունկցիաները ֆունկցիոնալ տարրերի սխեմաների միջոցով սինթեզի հետ: n փոփոխականից կախված երկու բուլյան ֆունկցիաները համարվում են համարժեք, եթե նրանցից մեկը ստացվում է մյուսից n չափանի խորանարդի գագաթների իզոմետրիկ տեղափոխությամբ: Գագաթների իզոմետրիկ տեղափոխությունները խումբ են կազմում, ծնված հետևյալ գործողություններով՝ փոփոխականները տեղերով փոխել և փոփոխականները ժխտել:

Հեշտ է տեսնել, որ համարժեք բուլյան ֆունկցիաները՝ դիզյունկտիվ նորմալ ձևերի (դ.ն.ձ) և ֆունկցիոնալ տարրերի սխեմաների սինթեզի տեսանկյունից ունեն նույն բարդությունը: Շենոն-Պովարովի կողմից բուլյան ֆունցիաների համարժեք դասերի աղուսյակների տեսքով ներկայացումը, դ.ն.ձ-ների և ֆունկցոնալ տարերի սինթեզի խնդիրը բերում է համապատասխան աղյուսակում համարժեք ֆունկցիան գտնելուն:

Ինչպես նշվել է ներածությունում, գծայնացվող ֆունկցիաների տեսությունը ներկայացված է որպես դ.ն.ձ.-ների տեսության բնական ընդհանրացում: Հիմնական խնդիրը հետևյալն է: Դիցուք $f(x_1,\cdots,x_n)$-ը բազմանդամ է՝ որոշված F_q^n-ում: Անհրաժեշտ է $f(x_1,\cdots,x_n)=0$ հավասարման լուծումների բազմությունը ծածկել մինիմալ թվով հարակից դասերով: Այս խնդրի համար Շենոն-Պովարովի բուլյան ֆունկցիաների համարժեքության համապատասխան համարժեքությունը ստացվում է երբ F_q^n-ի ենթաբազմություններ վրա գործում է աֆինական ձևափոխությունների խումբը: Այն տանում է հարակից դասերը նույն չափի այլ հարակից դասերի մեջ: Ստորև կապացուցենք ըստ այդ այդ խմբի՝ բազամանդամային ֆունկցիաների համարժեքության դասերի քանակի ասիմպտոտիկ գնահատական:

Դիցուք $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $f(x)$-ը և $g(x)$-ը n փոփոխականից կախված բազմանդամներ են F_q-ում որոշված: $L_f \subseteq F_q^n$ -ով նշանակենք $f(x_1, \cdots, x_n) = 0$ հավասարման լուծումների բազմությունը: f և g ֆունկցիաները կանվանենք համարժեք, եթե գոյություն ունի չվերասերված մատրից A և վեկտոր b, այնպես որ L_f-ը արտապատկերվում է L_g-ին հետևյալ ձևով՝ $L_f = xA + b$, որտեղ $x \in L_g$:

Այսպիսով $xA + b$ տեսքի աֆինական ձևափոխությունների խումբը գործում է F_q^n-ի ենթաբազմությունների վրա: Մեզ հետաքրքրում է գտնել համարժեքության դասերի քանակը:

F_q^n-ի ենթաբազմությունների քանակը հավասար է 2^{q^n}: Կան $(q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{n-1})$ չվերասերված մատրիցներ և q^n վեկտորներ: Այսպիսով G_n խմբի տարրերի քանակը կլինի $A_n = (q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{n-1})\, q^n$: Եթե q^n-ը դուրս հանենք բոլոր փակագծերից, ապա կստանանք

$$A_n = q^{n^2+n}\left(1 - \frac{1}{q^n}\right)\left(1 - \frac{1}{q^{n-1}}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{q}\right) \approx q^{n^2+n}:$$

$a(n) \approx b(n)$ նշանակում է $a(n)$-ը և $b(n)$-ը ունեն նույն կարգը, երբ n-ը ձգտում է անվերջության:

M_n-ով նշանակենք համարժեքության դասերի քանակը:

Թեորեմ 4.1.1: F_q^n-ում համարժեքության դասերի ասիմպտոտիկ քանակը, երբ գործում է աֆինական ձևափոխությունների խումբը, հավասար է

$$M_n \approx \frac{2^{q^n}}{A_n}$$

Ապացույց: Յուրաքանչյուր ուղեծիր կարող է ունենալ ամենաշատը A_n ենթաբազմություն: Հետևաբար՝

$$M_n \geq \frac{2^{q^n}}{A_n}:$$

Այսպիսով ներքևից գնահատականը ստացանք: M_n-ը վերևից գնահատելու համար օգտագործենք Բեռնսայդի լեմման:

$$M_n = \frac{1}{|G_n|} \sum_{g \in G_n} \psi(g)$$

Այստեղ $\psi(g)$-ն այն ենթաբազմությունների քանակն է, որոնք չեն փոխվում, երբ g-ն գործում է նրանց վրա:

$\psi(e)$-ն կլինի 2^{q^n}: G_n-ի հաջորդ տարրը, որը առավել շատ թվով ենթաբազմություններ է անշարժ թողնում դա մատրիցն է, որը տեղերով փոխում է վեկտորի 2 կորդինատները: Նշանակենք այդ մատրիցը σ-ով: Այժմ կհաշվենք ենթաբազմությունների քանակը, որոնց σ-ն թողնում է անշարժ: Երբ $i \neq j$ կասենք, որ $(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-2}, i, j)$ վեկտորի զույգը $(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-2}, j, i)$ վեկտորն է:

Որպեսզի ստանանք ենթաբազմություն, որը ինվարիանտ է σ-ի նկատմամբ, պետք է վերցնենք հետևյալ վեկտորները՝

1) Վեկտորները, որոնց վերջին 2 կորդինատները նույնն են:

2) Այն վեկտորների բազմությունից, որոնց վերջին 2 կորդինատները տարբեր են պետք է վենցնել վեկտորը և իր զույգը միաժամանակ:

Վեկտորների քանակը, որոնց վերջին 2 կորդինատները նույնն են q^{n-1} է: Այսպիսով 1) բազմության ենթաբազմությունների քանակը $2^{q^{n-1}}$ է: Մնացած բազմության վեկտորների քանակը $q^n - q^{n-1}$ է: Քանի որ վեկտորները վերցնում ենք զույգերով, կստանանք $2^{(q^n - q^{n-1})/2}$ ենթաբազմություններ 2) բազմության մեջ:

Կան $\binom{n}{2}$ խմբի տարրեր, որոնք տեղերով փոխում են վեկտորների 2 կորդինատներ: Այսպիսով ենթաբազմությունների քանակը, որոնք ինվարիանտ են նրանց նկատմամբ հավասար է $\binom{n}{2} 2^{q^{n-1}} \cdot 2^{(q^n - q^{n-1})/2} = \binom{n}{2} 2^{(q^n + q^{n-1})/2}$:

Խմբի հաջորդ տարրը, որը պահպանում է շատ տարրեր անշարժ դա վեկտորի գումարումն է: Ֆիքսենք α վեկտորը: Որպեսզի ստանանք ենթաբազմություններ, որոնք ինվարիանտ են, երբ α-ն գործում է նրանց վրա, նորից պետք է վերցնենք վեկտորները զույգերով: u վեկտորի զույգը այս անգամ կլինի $u + \alpha$ վեկտորը: Այսպիսով կստանանք $2^{q^n/2}$ վեկտորներ, որոնք ինվարիանտ են α-ի նկատմամբ և $q^n 2^{q^n/2}$ ենթաբազմություններ, որոնք ինվարիանտ են մի վեկտորի գումարման գործողության նկատմամաբ:

Եթե ստացված արժեքները տեղադրենք Բեռնսայդի լեմմայի բանաձևի մեջ, կստացվի՝

$$M_n = \frac{1}{A_n}(2^{q^n} + \binom{n}{2}2^{\frac{q^n+q^{n-1}}{2}} + q^n 2^{\frac{q^n}{2}} + B_n),$$

որտեղ B_n-ը ենթաբազմությունների գումարն է, որոնք չեն փոխվում, երբ գործում են խմբի մնացած տարրերը:

Կարող ենք ցույց տալ, որ՝

$$A_n \binom{n}{2} 2^{\frac{q^n+q^{n-1}}{2}} = o(2^{q^n})$$

$$A_n q^n 2^{\frac{q^n}{2}} = o(2^{q^n})$$

$$A_n B_n = o\left(2^{q^n}\right)$$

Այսպիսով, ցանկացած $\epsilon > 0$ և բավականաչափ մեծ n-ի համար (կախված ϵ-ից) ստացանք՝

$$M_n < \frac{2^{q^n}}{A_n}(1+\epsilon):$$

Ստացվեց, որ ստորին և վերին գնահատականները կարգով նույնն են: Թեորեմից հետևում է, որ համարյա բոլոր ուղեծրերը ունեն մաքսիմալ A_n չափ:

4.2 Վերին գնահատական գծայնացվող ծածկույթների բարդության համար

Դիտարենք $y = xA + b$ աֆինական ձևափոխությունները F_q^n-ում, որտեղ x, y և $b \in F_q^n$, իսկ A-ն $n \times n$ չափի չվերասերվող մատրից է, որի տարրերը F_q-ից են: Այն կնշանակենք որպես (A, b) զույգ: Աֆինական ձևափոխությունների խումբը գործում է F_q^n-ի, F_q^n-ի ենթաբազմությունների, և F_q^n-ում ընկած հարակից դասերի վրա, ընդ որում հարակից դասերի չափերը մնում են անփոփոխ գործողության ժամանակ: Այսպիսով, եթե երկու ենթաբազմություններ՝ N_1-ը և N_2-ը ընկած են նույն ուղեծրի մեջ, ապա մեկի հարակից դասերով ծածկույթից կարող ենք ստանալ նույն բարդության ծածկույթ մյուսի համար՝ օգտագործելով համապատասխան աֆինական ձևափոխություն: Հետևաբար հարակից դասերով ծածկույթների հատկությունները մնում են անփոփոխ աֆինական ձևափոխությունների արդյունքում:

Սահմանում 4.2.1: Աֆինական ձևափոխությունների T բազմությունը հարակից դաս է, եթե ցանկացած (A_1, b_1), $(A_2, b_2), \cdots, (A_m, b_m)$ ձևափոխությունների համար T-ից, $(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i A_i, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i) \in T$, ցանկացած $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in F_q$, այնպես որ $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$:

Տրված աֆինական ձևափոխությունների բազմության համար դիտարկենք հարակից դասերով ծածկույթներ և կարճագույն ծածկույթներ:

Սահմանում 4.2.2: Դիցուք G-ն աֆինական ձևափոխությունների խմբում ենթախումբ է: G-ի կարճագույն գծայնացվող ծածկույթի երկարությունը նշանակենք $CR(G)$ –ով (Coset Rank):

Դիցուք $N \subseteq F_q^n$ և $Stab(N)$-ը N-ի ստաբիլ խումբն է, երբ գործում է աֆինական ձևափոխությունների խումբը: $Stab(N)$-ի ցանկացած ենթախումբ բաժանում է այն չհատվող ուղեծրերի: Ուղեծրերի քանակը նշանակենք $\#orb_G(N)$:

Թեորեմ 4.2.3: Ցանկացած $N \subseteq F_q^n$ բազմության կարճագույն գծայնացվող ծածկույթի երկարությունը չի գերազանցում $CR(G) \times \#orb_G(N)$ թիվը՝ $Stab(N)$-ի ցանկացած G ենթախմբի համար: Վերին սահմանը հասանելի է և չի կարող լավացվել:

Ապացույց: Դիտարկենք $x \in N$ տարրի ուղեծիրը՝ $orb_G(x) = \{xA + b \mid (A, b) \in G\}$: Դիցուք L-ը G-ի հարակից դասերով կարճագույն ծածկույթն է և $C \in L$ -ը աֆինական ձևափոխությունների հարակից դաս է: $M(x, C)$-ով նշանակենք $\{xA + b \mid (A, b) \in C\}$ բազմությունը: Հեշտ է նկատել, որ $M(x, C)$-ը հարակից դաս է N-ում: Վերցնենք $\gamma_1, \cdots, \gamma_n \in F_q$, այնպես որ $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$, կամայական $xA_1 + b_1, xA_2 + b_2, \cdots, xA_m + b_m \in M(x, C)$-ի համար ունենք

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, (xA_i + b_i) = \sum_{i=1}^{m} x\lambda_i \, A_i + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, b_i = x \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, A_i + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, b_i$$

Ակնհայտորեն $(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, A_i, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, b_i) \in C$ և $x \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, A_i + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, b_i \in M(x, C)$-ն հարակից դաս է N-ում: Հետևաբար $orb_G(x) = \cup_{C \in L} M(x, C)$ հարակից դասերով ծածկույթ է $orb_G(x)$-ի համար, որի երկարությունը $CR(G)$ է: Եթե նույնը կիրառենք N-ի յուրաքանչյուր ուղեծրի համար կստանանք N-ի հարակից դասերով ծածկույթ $CR(G) \times \ orb_G(x)$ երկարությամբ: Որը ապացուցում է թեորեմը:

Այժմ ցույց տանք, որ Թեորեմ 4.2.3-ի գնահատականը հասանելի է: Դիցուք $f(\theta) = \alpha_0 + \alpha_1\theta + \cdots + \alpha_{n-1}\theta^{n-1} + \theta^n$-ը նորմալ պրիմիտիվ բազմանդամ է, որի $deg(f) = n$, իսկ գործակիցները F_q-ից են:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

$f(\theta)$-ի ուղեկից մատրիցն է: Ակնհայտ է, $\alpha_0 \neq 0$ և $det(A) = (-1)^n\alpha_0$. Ինչպես հայտնի է հանրահաշվից (տես՝ [10]), $F_{q^n}^*$-ը՝ F_{q^n} դաշտի ոչ զրոյական տարրերի բազմությունը, կազմում է ցիկլիկ խումբ, որի տարրերը կարելի է ներկայացնել A-ի աստիճաններով: Այսինքն $F_{q^n}^* = \{E, A, A^2, \cdots, A^{q^n-2}\}$: F_{q^n}-ի տարրերը կարելի է ներկայացնել որպես A-ից կախված բազմանդամներ, որոնց կարգը փոքր է n-ից և գործակիցները F_q-ից են: Դա նշանակում է, որ F_{q^n}-ի յուրաքանչյուր տարր ներկայացվում է, $\beta_0E + \beta_1A + \cdots + \beta_{n-1}A^{n-1}, \beta_i \in F_q, i = 1,2, \cdots, n$: F_{q^n}-ը կարող ենք դիտարկել որպես n չափի գծային տարածություն F_q-ի նկատմամբ, այսինքն՝ F_q^n:

Այժմ վերցնենք $N = F_q^n \backslash \{0\}$ և $G = F_{q^n}^* = \{E, A, A^2, \cdots, A^{q^n-2}\}$: Պարզ է, որ G-ն ենթախումբ է Աֆինական ձևափոխությունների խմբում, նաև ենթախումբ է N-ի ստաբիլ խմբում՝$stab(N)$: [11]-ում ապացուցված է, որ $F_q^n \backslash \{0\} = F_{q^n}^*$-ի մինիմալ գծայնացվող ծածկյույթի երկարությունը հավասար է $n(q-1)$ և այն կարելի է ընտրել՝ օգտագործելով հիպերհարթություններ: Հետևաբար $CR(G) = n(q-1)$ և N-ի կարճագույն գծայնացվող ծածկույթի երկարությունը նույնպես $n(q-1)$ է: Իրականում N-ի բոլոր տարրերը ընկած են մի ուղեծրի մեջ՝ G-ի գործողության ժամանակ: A մատրիցի միջոցով սահմանված աֆինական ձևափոխությունը արտապատկերում է $(\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_{n-1}) \in N$ վեկտորը $(\gamma_1, \cdots, \gamma_{n-1}, \gamma_n = -\alpha_0\gamma_0 - \alpha_1\gamma_1 - \cdots - \alpha_{n-1}\gamma_{n-1})$: Սա նշանակում է, որ ոչզրոյական $(\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_{n-1})$ վեկտորի ուղեծիրը համնկնում է Linear Feedback Shift Register-ի վիճակների բազմության հետ, որը գեներացնում է ցիկլիկ հաջորդականություն: Ռեգիստրի բնութագրիչ բազմանդամը $g(\theta) = 1 + \alpha_{n-1}\theta + \alpha_{n-2}\theta^2 + \cdots + \alpha_1\theta^{n-1} + \alpha_0\theta^n$ է, իսկ $(\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_{n-1})$-ն՝ սկզբնական վիճակը ([10]): Բայց $g(\theta) = \theta^n f\left(\frac{1}{\theta}\right)$ և $g(\theta)$-ն $f(\theta)$-ի փոխադարձ բազմանդամն է (reciprocal polynomial), որը նշանակում է, որ երկու բազմանդամներն էլ ունեն նույն պարբերությունը՝ $q^n - 1$ և վերը սահմանած Linear Feedback Shift Register-ը գեներացնում է՝ $q^n - 1$ մաքսիմալ երկարության հաջորդականություն: Հետևաբար ուղեծրի երկարությունը հավասար է $q^n - 1$ և այն պարունակում է F_q^n-ի բոլոր ոչզրոյական տարրերը, այսինքն համընկնում է N-ի հետ: Ըստ Թեորեմ 4.2.3-ի N-ի մինիմալ գծայնացվող ծածկույթի երկարությունը չի գերազանցում $CR(G) \times orb_G(N) = n(q-1) \times 1 = n(q-1)$, բայց ինչպես նշվեց այն հավասար է ճիշտ $n(q-1)$ և այսպիսով թեորեմի վերին գնահատականը հասանելի է:

Եթե վերցնենք $N = F_q^n \backslash \{0\}$ և G-ն հավասար $GL_n(F_q)$ ապա կունենանք, որ G-ն $Stab(N)$-ի ենթախումբ է: Ակնհայտորեն N-ի բոլոր վեկտորները ընկած են մի ուղեծրի մեջ, հետևաբար, ըստ Թեորեմ 4.2.3-ի N-ի կարճագույն գծայնացվող ծածկույթի երկարությունը չի գերազանցում $CR(GL_n(F_q)) \times 1$: Հետևաբար $CR(GL_n(F_q)) \geq n(q-1)$:

Ինչպես արդեն ցույց ենք տվել Թեորեմ 3.3.4-ում այդ թիվը հավասար է $(q^n - 1)(q^{n-1} - 1)(q^{n-2} - 1) \cdots (q-1)$:

5. Հարակից դասերի երկու ներկայացումներ և ալգորիթմներ մեկից մյուսը անցնելու համար

5.1 Հարակից դասերի երկու ներկայացումների մասին

Այս գլխում կնկարագրենք հարակից դասերի երկու ներկայացումներ և կառաջարկենք ալգորիթմներ, թե ինչպես մի ներկայացումից անցնել մյուսին: Ներկայացումներից մեկի մասին արդեն նշել ենք (2.1 Գլխում), դա գծային հավասարումների համակարգն է:

F_q^n-ում ցանկացած k չափի հարակից դաս ներկայացվում է որպես F_q-ի վրա տրված $n-k$ ռանգի գծային հավասարումների համակարգի լուծում և հակառակը:

$$
\begin{cases}
\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\
\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\
\vdots \\
\alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \cdots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m
\end{cases} \tag{5.1}
$$

Եթե համակարգի ռանգը $n-k$ է և այն ունի առնվազն 1 լուծում, ապա լուծումների բազմությունը կազմում է k-չափի հարակից դաս: Հարակից դասին համապատասխան գծային ենթատարածությունը կստանանք, եթե դիտարկենք համապատասխան համասեռ համակարգը:

Հարակից դասի մյուս ներկայացումը տրված է [11]-ում: Վերջավոր F_{q^n} դաշտը կարելի է ներկայացնել որպես n չափանի վեկտորական տարածություն F_q-ի նկատամամբ (F_q^n): Դիցուք $\{\beta, \beta^q, \beta^{q^2}, \cdots, \beta^{q^{n-1}}\}$-ը նորմալ բազիս է F_{q^n}-ում: [10]-ում նկարագրված է նորմալ բազիս գտնելու ալգորիթմ: Այսպիսով ունենք $1-1$ համապատասխանություն F_q^n-ի և F_{q^n}-ի միջև, որը տրվում է հետևյալ բանաձևով:

$$
v = (v_1, \cdots, v_n) \in F_q^n \leftrightarrow v_1\beta + v_2\beta^q + \cdots + v_n\beta^{q^{n-1}} \tag{5.2}
$$

Մենք ստանդարտ բազիսի փոխարեն կօգտագործենք նորմալ բազիս, քանի որ այստեղ նկարագրված ալգորիթմները օգտագործում են դաշտի տարրի q-րդ աստիճան բարձրացնելու գործողությունը: Այդ գործողությունը (նաև q^m աստիճան բարձրացնելու գործողությունը) նորմալ բազիսի դեպքում վեկտորի գործակիցների ցիկլիկ տեղաշարժ է, քանի որ

$$
v^q = v_n\beta + v_1\beta^q + v_2\beta^{q^2} + \cdots + v_{n-1}\beta^{q^{n-1}} = (v_n, v_1, \cdots, v_{n-1}):
$$

Սահմանում 5.1.1: F_q^n-ի յուրաքանչյուր L հարակից դասին համապատասխանեցնենք բազմանադամ,

$$P_L(x) = \prod_{a \in L}(x - a), \tag{5.3}$$

որը կոչվում է L հարակից դասի **արմատ բազմանդամ**:

Արմատ բազմանդամների բնույթը հասկանալու համար դիտարկենք F_{q^n}-ի ավտոմորֆիզմները: Ինչպես հայտնի է [10] դրանք ունեն հետևյալ տեսքը՝

$$\phi_m : x \to x^{q^m},$$

որտեղ $0 \le m \le n - 1$. Այս n ավտոմորֆիզմների F_{q^n}-ից գործակիցներով ցանկացած գծային կոմբինացիա կարելի է դիտարկել որպես բազմանդամ F_{q^n}-ի վրա, որի ամենամեծ աստիճանը q^{n-1} է: Այդպիսի բազմանադամները հայտնի են որպես Օրեի բազմանդամներ: Յուրաքանչյունր Օրեի բազմանդամ $p(x)$ առաջացնում է գծային օպերատոր F_q^n-ի վրա: Հակառակն էլ է ճիշտ: F_q^n-ի վրա տրված յուրաքանչյուր գծային օպրերատորի համապատասխանում է Օրեի բազմանդամ: Պարզ հաշվարկը ցույց է տալիս, որ կան $(q^n)^n$ Օրեի բազմանդամներ: Ճիշտ նույնքան, ինչքան F_q դաշտի վրա տրված $n \times n$ մատրիցները:

Պնդում 5.1.2[11]: k չափի գծային տարածության արմատ բազմանդամը Օրեի բազմանդամ է, որի ավագ անդամի աստիճանը q^k:

Պնդում 5.1.3[11]: k չափի հարակից դասի արմատ բազմանդամի ցանկացած ոչզրոյական անդամ ունի 0 կամ q^m աստիճան, որտեղ $0 \leq m \leq k$:

Եթե L-ը ենթատարածություն է և $C = v + L$ հարակից դաս է, ապա $p_C(x) = p_L(x - v) = p_L(x) - p_L(v)$: Սա նշանակում է, որ հարակից դասի արմատ բազմանդամը Օրեի բազմանդամ է, գումարած հաստատուն անդամ:

Այժմ կներկայացնենք ալգորիթմներ, որոնցով հարակից դասի մի ներկայացումից կստանանք մյուսը:

5.2 Հավասարումների համակարգից արմատ բազմանդամի կառուցում

Դիցուք (5.1) տեսքի հավասարումների համակարգը ներկայացնում է k-չափի հարակից դաս F_q^n-ում: Արմատ բազմանդամը կարող ենք գտնել հետևյալ ձևով՝ լուծենք հավասարումների համակարգը, գտնենք բոլոր q^k լուծումները և բազմապատկենք (5.3) բանաձևի բոլոր անդամները: Այս ալգորիթմը աշխատատար է և մեծ հարակից դասերի դեպքում անիրագործելի:

Մյուս մոտեցումն է անորոշ գործակիցների մեթոդը: Արմատ բազմանդամի գործակիցները հաշվվում են օգտագործելով նրա հատկությունները:

$$p(z) = z^{q^k} + A_1 z^{q^{k-1}} + \cdots + A_k z + A_{k+1}$$

$p'(z)$-ով նշանակենք բազմանդամի համասեռ մասը:

$$p'(z) = z^{q^k} + A_1 z^{q^{k-1}} + \cdots + A_k z$$

Ինչպես արդեն նշել ենք այն Օրեի բազմանդամ է, որի արժեքը 0 է հարակից դասի ենթատարածության տարրերի վրա: Դիցուք $e_1, \cdots, e_k$-ն (5.1) համակարգի ֆունդամենտալ լուծումների բազմությունն է, իսկ b-ն անհամասեռ համակարգի լուծումներից մեկը: Սրանք կարող ենք գտնել Գաուսի արտաքսման ալգորիթմով: $e_1, \cdots, e_k$-ն և b-ն վեկտորներ են F_q^n-ում: Մենք սրանց դիտարկում ենք որպես դաշտի տարրեր՝ օգտագործելով (5.2) առնչությունը: Տեղի ունի հետևյալ գծային հավասարումների համակարգը՝

$$\begin{cases} p'(e_1) = {e_1}^{q^k} + A_1 {e_1}^{q^{k-1}} + \cdots + A_k e_1 = 0 \\ p'(e_2) = {e_2}^{q^k} + A_1 {e_2}^{q^{k-1}} + \cdots + A_k e_2 = 0 \\ \vdots \\ p'(e_k) = {e_k}^{q^k} + A_1 {e_k}^{q^{k-1}} + \cdots + A_k e_k = 0 \end{cases}$$

Համակարգը ունի միակ լուծում քանի որ ռանգը k է, հակակառակ դեպքում $e_1, \cdots, e_k$-ն բազիս չէր լինի: $A_1, \cdots, A_k$-ն կարող ենք հաշվել Գաուսի արտաքսման ալգորիթմով: A_{k+1}-ը կհաշվենք օգտագործելով հետևյալ փաստը՝

$$p(b) = b^{q^k} + A_1 b^{q^{k-1}} + \cdots + A_k b + A_{k+1} = 0$$

Դիտարկենք օրինակ, երբ $n = 3$ և դաշտը F_2-ն է: F_2^3-ը կարելի է կառուցել օգտագործելով F_2-ում անվերածելի հետևյալ բազմանդամը $f(x) = x^3 + x + 1$: Դաշտի տարրերը կլինեն՝ $\{0, 1, \alpha, \alpha+1, \alpha^2, \alpha^2+1, \alpha^2+\alpha, \alpha^2+\alpha+1\}$, որտեղ α-ն $f(\alpha) = 0$ -ի արմատն է:

Վերցնենք $x_2 = 1$ հարակից դասը և նրա համապատասխան հավասարման համար կառուցենք արմատ բազմանդամ: Լուծումների ֆունդամենտալ համախումբը կլինի՝ $a_1 = (1,0,0) = 1, a_2 = (0,0,1) = \alpha^2$, իսկ լուծումներից մեկը $b = (0,1,0) = \alpha$: Արմատ բազմանդամի ընդհանուր տեսքը կլինի $p(z) = z^4 + Az^2 + Bz + C$: Վերցնենք համապատասխան Օրեի բազմանդամը և այն հավասարացնենք 0-ի ֆունդամենտալ համախմբի վեկտորներ վրա: $p'(z) = z^4 + Az^2 + Bz$: Կստանանք հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} p'(1) = 1 + A + B = 0 \\ p'(\alpha^2) = \alpha^8 + A\alpha^4 + B\alpha = 0 \end{cases}$$

Համակարգը լուծելով՝ կստանանք $A = \alpha + 1, B = \alpha$: C-ի արժեքը կգտնենք $L(b) = 0$ առնչությունից: $C = \alpha^4 + (\alpha + 1)\alpha^2 + \alpha^2 = \alpha^2 + 1$: Այսպիսով $x_2 = 1$ հավասարումով որոշված հարակից դասի համապատասխան արմատ բազմանդամը կլինի՝

$$p(z) = z^4 + (\alpha + 1)z^2 + \alpha z + \alpha^2 + 1$$

5.3 Արմատ բազմանդամից հավասարումների համակարգի կառուցում

Դիցուք ունենք արմատ բազմանդամը՝ $p(z) = z^{q^k} + A_1 z^{q^{k-1}} + \cdots + A_k z + A_{k+1}$: $p(z) = 0$ հավասարման լուծումների բազմությունը k չափի հարակից դաս է F_q^n-ում:

Պահանջվում է գտնել (5.1) տեսքի հավասարումների համակարգ, որը ներկայացնում է այդ հարակից դասը:

Կօգտագործենք այն փաստը, որ արմատ բազմանադմի համասեռ մասը $p'(z) = z^{q^k} + A_1 z^{q^{k-1}} + \cdots + A_k z$ Օրեի բազմանդամ է [19], որը $n-k$ ռանգի գծային օպերատոր է F_q^n-ի վրա: Պարզ է, որ օպերատորի միջուկը հարակից դասի ենթատարածությունն է:

Օգտագործենք գծային օպերատորի մատրիցային ներկայացումը: Դիցուք $\{\beta, \beta^q, \beta^{q^2}, \cdots, \beta^{q^{n-1}}\}$-ը նորմալ բազիս է F_{q^n}-ում: (5.2) առնչության միջոցով կարող ենք դաշտի տարրերի համապատասխան վեկտորները ստանալ: Նախ հաշվենք օպերատորի արժեքները բազիսային տարրերի վրա:

$$
\begin{gathered}
p'(\beta) = (\beta_{11}, \cdots, \beta_{1n}) \\
p'(\beta^q) = (\beta_{21}, \cdots, \beta_{2n}) \\
\vdots \\
p'\left(\beta^{q^{n-1}}\right) = (\beta_{n1}, \cdots, \beta_{nn})
\end{gathered}
$$

Այժմ օպերատորի արժեքը ցանկացած $(x_1, \cdots, x_n)$ վեկտորի վրա կարող ենք հաշվել հետևյալ ձևով՝ $p'(x_1, \cdots, x_n) = p'\left(x_1\beta + x_2\beta^q + \cdots + x_n\beta^{q^{n-1}}\right) = x_1 p'(\beta) + x_2 p'(\beta^q) + \cdots + x_n p'\left(\beta^{q^n}\right)$: p' օպերատորի մատրիցային տեսքի կլինի հետևյալը՝

$$
p'(x_1, \cdots, x_n) = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} & \cdots & \beta_{n1} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{1n} & \beta_{2n} & \cdots & \beta_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
$$

Եթե $A_{k+1} = (\gamma_1, \cdots, \gamma_n)$ ապա $p(x_1, \cdots, x_n) = p'(x_1, \cdots, x_n) + (\gamma_1, \cdots, \gamma_n)$:

Ստացանք հետևյալը՝

$$p(x_1, \cdots, x_n) = 0 \leftrightarrow p'(x_1, \cdots, x_n) = -(\gamma_1, \cdots, \gamma_n)$$

Այսպիսով հարակից դասին համապատասխանող հավասարումների համակարգի մատրիցային տեսքը կլինի հետևյալը՝

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{n1} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{1n} & \beta_{2n} & \cdots & \beta_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix},$$

որը համակարգի տեսքով՝

$$\begin{cases} \beta_{11}x_1 + \beta_{21}x_2 + \cdots + \beta_{n1}x_n = -\gamma_1 \\ \beta_{12}x_1 + \beta_{22}x_2 + \cdots + \beta_{n2}x_n = -\gamma_2 \\ \vdots \\ \beta_{1n}x_1 + \beta_{2n}x_2 + \cdots + \beta_{nn}x_n = -\gamma_n \end{cases}$$

ԵԶՐԱԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆ

Աշխատանքում ուսումնասիրվել են վերջավոր դաշտերի ենթաբազմությունների կարճագույն գծայնացվող ծածկույթներ: Նկարագրվել են դասեր, որոնց համար լուծելի է կարճագույն գծայնացվող ծածկույթի կառուցման խնդիրը: Դիտարկվել է վերջավոր դաշտից տարրերով մատրիցների գծայնացվող ծածկույթներ: Հետազոտվել է ընդհանուր աֆինական խմբի գործողությունը վերջավոր դաշտերի ենթաբազմությունների վրա և դրա կապը գծայնացվող ծածկույթների բարդության հետ:

Աշխատանքի հիմնական արդյունքներն են՝

- Ստացվել են վերին և ստորին գնահատականներ $\dot{F}_q^n \times \dot{F}_q^m$ բազմության կարճագույն գծայնացվող ծածկույթի համար:
- Ստացվել է, որ F_2 դաշտի վրա տրված $x_1x_2\cdots x_n + x_{n+1}x_{n+2}\cdots x_{2n} + x_{2n+1}x_{2n+2}\cdots x_{3n} = 1$ հավասարման լուծումների բազմության կարճագույն գծայնացվող ծածկույթի երկարությունը չի գերազանցում $9n^{log_2 3} + 4$:
- Ստացվել է կարճագույն գծայանացվող ծածկույթ F_q դաշտի վրա տրված $n \times n$ չափի վերասերված մատրիցների դասի համար: Այն հավասար է $\frac{q^n-1}{q-1}$:

- Ստացվել է կարճագույն գծայանացվող ծածկույթ F_q դաշտի վրա տրված $n \times n$ չափի չվերասերված մատրիցների դասի համար: Այն հավասար է $(q^n - 1)(q^{n-1} - 1)(q^{n-2} - 1) \cdots (q - 1)$:

- Ուսումնասիրվել է Աֆինական ձևափոխությունների խմբի գործողությունը F_q^n-ի ենթատարածությունների վրա: Ստացվել է, որ համարժեքության դասերի քանակը կարգով հավասար է $\frac{2^{q^n}}{A_n}$, որտեղ $A_n \approx q^{n^2+n}$ խմբի տարրերի քանակն է:
- Ստացվել է վերին գնահատական F_q^n-ի ենթատարածությունների գծայնացվող ծածկույթների համար, որը արտահայտվում է Աֆինական ձևափոխությունների խմբի տերմիններով:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Алексанян А., Дизъюнктивные нормальные формы над линейными функциями (Теория и приложения), Ереванский государственный университет 1990.
2. Алексанян А., Реализация булевых функций дизъюнкциями произведений линейных форм, Докл.АН СССР , т. 304, 4, 1989, стр.781-784.
3. Алексанян А., О реализации квадратичных булевых функций системами линейных уравнений, “Кибернетика”, 1, 1989, стр.9-14.
4. Алексанян А., Серобян Р., Покрытия, связянные с квадратичными над конечным полем уравнениями, Докл.АН Арм.ССР , т. 93, 1, 1992, стр.6-10.
5. Aleksanyan and M. Papikian, On Coset Coverings of Solutions of Homogeneous Cubic Equations over Finite Fields, The Electronic Journal of Combinatorics, 8 (2001), R22, pp. 1-9.
6. Alexanian A., Gabrielyan V., Coverings of Symmetric Subsets in Finite Fields with Cosets of Linear Subspaces, Algebra, Geometry & Their Applications, Seminar Proceedings, vol. 3-4, 2004, Yerevan State University, pp. 110-124.
7. Габриелян В., О метрических характеристиках, связанных с покрытиями подмножеств конечных полей смежными классами линейных подпространств, Институт проблем информатики и автоматизации, Препринт НАН РА 04-0602, Ереван, 2004 .

8. Габриелян В., О сложности покрытия системой смежных классов одного уравнения над конечным полемметрических характеристиках, связанных с покрытиями подмножеств конечных полей смежными классами линейных подпространств", Институт проблем информатики и автоматизации, Препринт НАН РА 04-0603, Ереван, 2004 .
9. H. Nurijanyan - On the Number of Irreducible Linearised Coverings for Subsets in Finite Fields 2010
10. Лидл Р., Нидеррайтер Г., Конечные поля, (в двух томах), М., Мир, 1988.
11. Jamison R. Covering finite fields with cosets of subspaces, J. Combin. Theory Ser. A22 (1977), 253-266.
12. Dieudonne J. Sur une generalisation du groupe orthogonal a quatre variables, Arch.Math. 1 (1949) 282-287.
13. Clement de Seguins Pazzis. The affine preservers of non-singular matrices. Arch. Math.95 (2010), 333342
14. Meshulam R. On the maximal rank in a subspace of matrices, 4 Jul 1984
15. Айгнер М., Комбинаторная теория, М., Мир, 1982.
16. Clement de Seguins Pazzis. Large affine spaces of non-singular matrices September 24,2013
17. Shannon C. The synthesis of two-terminal switching circuits. BSTJ, 28v. No. 1, 1949, 59_98.

18. Поваров Г. Н., Математическая теория синтеза контактных (1,k)-полюсников. ДАН СССР, 100 N5, 1995, 909-912

19. 0. ORE, On a special class of polynomials, Trans. Amer. Math. Sot. 35 (1933), 559-584.