ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ՊՈԼԻՏԵԽՆԻԿԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ՏԻԳՐԱՆ ՄԻՔԱՅԵԼԻ ՍԱՂԱԹԵԼՅԱՆ

ՆԵՐԿԱՅԱՑՄԱՆ ԵՎ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅԱՆ ՈՐՈՇ ՀԱՐՑԵՐ ՕՐԹՈԳՈՆԱԼ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ

Ա.01.01 - «Մաթեմատիկական անալիզ» մասնագիտությամբ

ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի

գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

Ս Ե Ղ Մ Ա Գ Ի Ր

Երևան 2018

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ АРМЕНИИ

ТИГРАН МИКАЕЛОВИЧ САГАТЕЛЯН

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И СХОДИМОСТИ В ТЕОРИИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата

физико-математических наук по специальности

01.01.01 « Математический анализ »

Ереван 2018

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Հայաստանի ազգային պոլիտեխնիկական համալսարանի գիտական խորհրդի նիստում:

Գիտական ղեկավար - ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր
Ս.Ա. Եպիսկոպոսյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ - ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր
Մ.Գ. Գրիգորյան
-ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու
Ա.Ա. Սարգսյան

Առաջատար կազմակերպություն –Հարավային Դաշնային համալսարան, Ռուսաստանի Դաշնություն:

Պաշտպանությունը կկայանա 2018թ. ապրիլի 25-ին ժամը 15.00-ին, Հայաստանի ազգային պոլիտեխնիկական համալսարանում գործող 053 մասնագիտական խորհրդի նիստում, հետևյալ հասցեով՝ Երևան, Տերյան փ. 105, 12-րդ մասնաշենք:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ՀԱՊՀ գրադարանում:

Սեղմագիրը առաքված է 2018թ. մարտի 24-ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտ. քարտուղար
ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր Ա.Հ.Բաբայան

Тема диссертации утверждена на заседании ученого совета Национального Политехнического Университета Армении.

Научный руководитель - доктор физ.-мат. наук
С. А. Епископосян

Официальные оппоненты - доктор физ.-мат. наук
М. Г. Григорян
- кандидат физ.-мат. наук
А. А. Саргсян

Ведущая организация – Южный федеральный университет, Российская Федерация.

Защита диссертации состоится 25 - го апреля 2018 года в 15.00 часов на заседании специализированного совета 053 действующего в Национальном Политехническом Университете Армении по адресу: г. Ереван, ул. Теряна 105, 12 корпус.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке НПУА. Автореферат разослан 24 марта 2018г.

Ученый секретарь специализированного совета,
доктор физ.-мат. наук А. О. Бабаян

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Возникшая еще в середине XVIII века, теория представления функций тригонометрическими рядами, была в центре внимания многих выдающихся математиков (Л.Эйлер, Ж. Фурье, П. Дирихле, Г. Риман, Н. Лузин, Д. Меньшов, П. Ульянов, А. Талалян и другие), и до сих пор остается одной из актуальных областей теории функций.

В начале XX века были введены другие ортогональные системы, ставшие в последствии классическими. К этим системам относятся: система Уолша , система Хаара, обобщенная система Уолша или система Кристенсона-Леви, система Виленкина, система Франклина, система Фабера-Шаудера и.т.д.

С проблемой представления тесно связан вопрос существования разных типов универсальных рядов относительно перечисленных систем. Понятие универсальности является одним из фундаментальных объектов рассмотрения в другом разделе математики-теории хаоса и динамических систем, которые за последние годы являются одним из самых полезных подходов к исследованию рынка. В этой теории идея универсальности тесно связана с понятием топологической транзитивности семейства отображений.

В диссертационной работе в основном рассматривается система Кристенсона-Леви [1] [2], которая служит обобщением классической системы Уолша в нумерации Пэли [3] [4]. Она находит столь же широкое , как и система Уолша, применение при цифровой обработке информации.

В диссертационной работе рассматриваются также вопросы представления функций двух переменных, двойными рядами по системе Кристенсона-Леви. Сразу же отметим, что ряд классических результатов невозможно перенести с одномерного случая на двумерный случай. В этом случае даже разные (сферические, прямоугольные, квадратные) частичные суммы резко отличаются друг от друга по своим свойствам в вопросах сходимости в L^p $,p \geq 1.$

Цель работы.

1. Исследовать вопрос возможности интегрирования и сходимости рядов по системе Кристенсона-Леви с монотонными коэффициентами.

2. Для любого счетного множества $\mathrm{E} \subset (0,1)$ исследовать поточечную и L^p-универсальность рядов Фурье по системе Кристенсона-Леви класса $L^p(0,1)$.

3. Для любого счетного множества $\mathrm{E} \subset (0,1)$ исследовать вопрос топологической транзитивности системы Кристенсона-Леви для пары

$\{L^p(0,1);\mathbb{C}^E\}$, где $\mathbb{C}^E$ множество всех функций $h(x)$ определенных на E и принимающих комплексные значения, т.е. $h(x_k)=y_k\in\mathbb{C}$, $k=1,2,\ldots$.

4. Исследовать вопрос существования универсальных (относительно знаков, перестановок и подрядов) рядов по системе Крестенсона-Леви в весовых пространствах в $L^p_\mu(0,1)$, $1\le p<\infty$.

5. Исследовать равномерную сходимость двойных рядов Фурье по системе Кристенсона-Леви (по сферическим и прямоугольным частичным суммам) после исправления значений функции на множестве малой меры, а также монотонность коэффициентов Фурье вновь полученной функции.

Методы исследования. Применяются методы теории функций и функционального анализа.

Научная новизна. Все полученные в диссертации результаты являются новыми.

Практическая и теоретическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты и разработанные методы (исследование топологической транзитивности систем, построение универсальных функций и рядов) могут найти применение при изучении аналогичных вопросов для других систем, и для других классов функций.

Апробация полученных результатов. Основные результаты диссертации докладывались на конференциях: Годичная конференция НПУА (2015, 2016, 2017), III Международной научно-практической конференции «Современные проблемы физико-математических наук» , 2017 г. Орел, Россия, XIII International conference on accomplishments in mechanical and industrial engineering, DEMI 2017, Banja Luka, а также на семинарах: факультета прикладной математики и физики НПУА (руководитель академик В.С. Закарян), кафедры высшей математики физического факультета ЕГУ (руководитель профессор М.Г. Григорян), на семинаре Mathematical Colloquium at the Faculty of Engineering and the Environment, University of Southampton , Southampton, United Kingdom" (руководитель профессор A. Bhaskar, UK).

Основные результаты диссертации опубликованы в 5-и работах, перечень которых приведен в конце автореферата (1 – 5).

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Главы разбиты на части. Некоторые части разбиты на пункты. Нумерация утверждений (теоремы и леммы) двойная: номер главы и собственный номер. Нумерация формул двойная: номер главы и собственный номер. Номера определений и теорем во введении и автореферате совпадают с их номерами в основном тексте. Общий объем работы - 106 страниц. Список литературы содержит 81 наименование.

Содержание работы.

В 1923 г. Дж. Уолшем была введена система функций, в качестве упрощенного аналога тригонометрической системы, которая известна как система Уолша [3]. В 1932 г. Р. Пэли [4] предложил иной порядок нумерации функций, оказавшийся более удобным, и сейчас, говоря о системе функций Уолша, подразумевают именно систему Уолша–Пэли. Если тригонометрическая система функций издавна широко используется для представления аналоговых сигналов, то для представления цифровых сигналов и их анализа более удобна, в силу своих свойств, система функций Уолша. Определяется она следующим образом [3]:

Определение 1. *Возьмем*

$$W_0(x) \equiv 1 .$$

Для любого натурального числа n *такого, что*

$$n = 2^{m_1} + 2^{m_2} + \cdots + 2^{m_s} , m_1 > m_2 > \cdots > m_s \geq 0,$$

положим

$$W_n(x) = r_{m_1}(x) \cdot r_{m_2}(x) \cdot \cdots \cdot r_{m_s}(x),$$

где $\{r_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ *- система Радемахера:*

$$r_0(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \frac{1}{2}), \\ -1, & x \in [\frac{1}{2}, 1). \end{cases}$$

$$r_0(x+1) = r_0(x), \; r_k(x) = r_0(2^k x), \quad k = 0,1,2, \dots .$$

Система Кристенсона-Леви порядка a (см. [1], [2]) служит обобщением классической системы Уолша в нумерации Пэли.

Пусть $a \geq 2$ фиксированное целое число и $\omega_a = e^{\frac{2\pi}{a}i}$.

Определение 2. *Возьмем*

$$\varphi_0^{(a)}(x) = \omega_a{}^k , x \in \left[\frac{k}{a}, \frac{k+1}{a}\right), k = 0,1, \dots , a-1$$

и для $n \geq 0$ *положим*

$$\varphi_n^{(a)}(x+1) = \varphi_n^{(a)}(x) = \varphi_0^{(a)}(a^n x) .$$

Тогда Ψ_a - обобщенная система Кристенсона-Леви порядка a определяется так:

Определение 3. *Положим* $\psi_0^{(a)}(x) \equiv 1$.

Если
$n = \beta_1 a^{n_1} + \dots + \beta_s a^{n_s}$ $, n_1 > n_2 > \dots > n_s$ $, s = 1,2, \dots,$
где $0 \le \beta_j < a$, *j*= $1,2, \dots, s$ *то*

$$\psi_n^{(a)}(x) = \left(\varphi_{n_1}^{(a)}(x)\right)^{\beta_1} \cdot \dots \cdot \left(\varphi_{n_s}^{(a)}(x)\right)^{\beta_s}.$$

Отметим, что Ψ_2 является классической системой Уолша, а система Ψ_a является частным случаем системы Виленкина.

Замечание. *Система Кристенсона-Леви* Ψ_a, $a \ge 2$ *является полной ортонормированной системой в* $L^2(0,1)$ *и базисом в* $L^p(0,1)$, $p > 1$ *(см. [1]).*

Основные свойства системы Ψ_a получены Г. Кристенсоном, Р. Пэли, Ж. Файном, К. Ватари, Н. Виленкиным и другими математиками (см. [1]-[3], [5]-[7]).

В главе I диссертационной работы, рассматриваются ряды по системе Кристенсона-Леви с монотонными коэффициентами, а также вопросы сходимости и интегрируемости сумм таких рядов.

Рассмотрим ряд по системе Ψ_a $, a \ge 2$ вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n \psi_n^{(a)}(x) \ , \mathcal{B}_n \downarrow 0, \tag{1}$$

и обозначим через

$$\mathcal{S}_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{B}_k \psi_k^{(a)}(x)$$

частичную сумму ряда (1).

Применяя идею доказательства теоремы 7.1.1 (см. [8], с. 149) можно доказать следующую теорему:

Теорема (А). *Ряд вида (1) сходится на* $(0,1)$ *причем на любом интервале вида* $(\delta, 1)$, *где* $0 < \delta < 1$, *ряд сходится равномерно.*

Замечание. *Доказательство теоремы (А) для случая системы Уолша - Пэли и системы Виленкина были получены А. Шнейдером [9] и Н. Виленкиным [7].*

Отметим, что при условиях теоремы (А), сумма ряда (1) может не принадлежать $L^1(0,1)$, т.е. не быть интегрируемой по Лебегу на $(0,1)$.

А именно имеет место следующее утверждение:

Теорема (В). *Существует монотонно стремящаяся к нулю последовательность* $\{\mathcal{B}_n\}_{n=1}^{\infty}$, *такая что функция*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n \psi_n^{(a)}(x)$$

не интегрируема на интервале $(0,1)$.

Для системы Уолша-Пэли теорема (В) была доказана А.

Рубинштейном [10], а для системы Виленкина (в частности для системы Кристенсона-Леви) доказательство можно получить из результатов полученных Н. Виленкиным [7].

Таким образом чтобы ряд (1) был интегрируем, нужно наложить некоторые условия на коэффициенты ряда. Имеет место следующее утверждение:

Теорема 1.1. *Пусть последовательность* $\mathcal{B}_n$ *монотонно убывает и сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{B}_n}{n} \qquad (2)$$

тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n \psi_n^{(a)}(x)$ *сходится к суммируемой функции и является ее рядом Фурье по системе* Ψ_a *.*

Замечание. *Теорема 1.1. является обобщением теоремы 7.1.3 для случая системы Уолша - Пэли (см.* [8]*, с. 151), аналог которой для системы Уолша - Качмажа доказан Л. Балашовым* [11].

Отметим, что условие в Теореме 1.1 нельзя ослабить. Это утверждение для ортонормированных систем следует из более общих результатов А. Олевского [12], а для системы Уолша-Пэли из работы А. Рубинштейна [10]. Приведено доказательство теоремы для случая системы Ψ_a.

Имеет место следующее утверждение:

Теорема 1.2. *Существует монотонно убывающая, стремящаяся к нулю последовательность* $\{\mathcal{B}_n\}_{n=1}^{\infty}$ *такая, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{B}_n}{n} = \infty ,$$

и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n \psi_n^{(a)}(x) \qquad (3)$$

сходится всюду на $(0,1)$ и равномерно на любом интервале $(\delta, 1)$, где $0 < \delta < 1$, но не принадлежит классу $L^1(0,1)$, т.е. не является рядом Фурье по обобщенной системе Уолша некоторой функции из класса $L^1(0,1)$.

И в конце главы 1 доказано следующее утверждение:

Теорема 1.3. *Если* $\mathcal{C}_n \downarrow 0$*, то функция*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}_n \psi_n^{(a)}(x) \qquad (4)$$

принадлежит пространству $L^p(0,1)$*,* $\forall\, p \in (0,1)$*, причем имеет место* *равенство*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 |S_n(x)-f(x)|^p\,dx=0$$

где $S_n(x)$ *- n-ая частичная сумма ряда (4).*

Замечание . *Теорема 1.3. является обобщением теоремы 7.1.7 для случая системы Уолша - Пэли (см.* [8]*, с. 157).*

В главе II диссертационной работы рассматриваются вопросы поточечной универсальности, а также топологической транзитивности частичных сумм рядов Фурье функций класса, $L^p(0,1)$, $p\geq 1$ по системе Кристенсона-Леви порядка $a\geq 2$. Аналогичные вопросы для класса непрерывных функций по тригонометрической системе и по системе Кристенсона-Леви $\Psi_a, a\geq 2$, рассмотрены в работах [16] - [18] Ю. Мюллером и С. Епископосяном.

Пусть $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ некоторые метрические пространства, а $\mathbb{T}_n:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$, $n\in\Lambda\subset\mathbb{N}$, некоторые непрерывные отображения.

Определение 4. *Скажем, что элемент* $x_0\in\mathbb{X}$ ***универсален*** *в* $\mathbb{Y}$ *относительно* $\mathbb{T}_n$*, если для любого открытого множества* $V\subset\mathbb{Y}$ *существует* $n_0\in\mathbb{N}$ *такое, что* $\mathbb{T}_{n_0}(x_0)\in V$ *или используя понятие метрики, для любых* $\varepsilon>0$ *и* $y\in\mathbb{Y}$ *существует последовательность* $n_k\subset\Lambda$ *такая, что* $\rho_{\mathbb{Y}}\left(\mathbb{T}_{n_k}(x_0),y\right)<\varepsilon$ *при* $k>k_0$*, т.е. множество* $\{\mathbb{T}_n\,x_0:n\in\Lambda\}$ *всюду плотно в* $\mathbb{Y}$*.*

Определение 5. *Пусть* $\mathbb{T}_n$ *отображает метрическое пространство* $\mathbb{X}$ *в метрическое пространство* $\mathbb{Y}$*,* $\mathbb{T}_n:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$*.* $\mathbb{T}_n$ *называется* ***топологически транзитивным****, если для любых непустых, открытых множеств* $U\subset\mathbb{X}$ *и* $V\subset\mathbb{Y}$ *существует некоторое целое число* $n\geq 0$ *такое, что*

$$\mathbb{T}_n(U)\cap V\neq\emptyset,$$

т.е. для любых $\varepsilon>0$*,* $x\in\mathbb{X}$ *и* $y\in\mathbb{Y}$ *существуют* $x_0\in\mathbb{X}$ *и* $n\subset\mathbb{N}$ *такие, что*

$$\rho\,(x,x_0)<\varepsilon \text{ и } \rho\,(\mathbb{T}_n(x_0),y)<\varepsilon.$$

Отметим, что понятие универсальности является одним из фундаментальных объектов рассмотрения в другом разделе математики-теории хаоса и динамических систем, которые за последние годы являются одним из самых используемых подходов к исследованию рынка. В этой теории идея универсальности тесно связана с понятием топологической транзитивности семейства отображений. Более подробно о теории хаоса можно найти в [13].

В теории хаоса и динамических систем фундаментальной является теорема транзитивности Дж. Биркхофа [14]. Перенеся этот результат на абстрактную теорию универсальных рядов, в 1987г. К. Гроссе-Эрдман сформулировал так называемый принцип универсальности [15], который по сути является необходимым и достаточным условием для того, чтобы семейство отображений обладало универсальным элементом.

Формулируется этот принцип следующим образом:

Теорема (Принцип Универсальности). *Пусть* $\mathbb{X}$ *полное метрическое пространство,* $\mathbb{Y}$ *сепарабельное метрическое пространство а* $\mathbb{T}_n:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ *,* $n\in\Lambda\subset\mathbb{N}$ *некоторое непрерывное отображение. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *Множество* $\mathbb{U}$ *универсальных элементов является остаточным в* $\mathbb{X}$*.*

(ii) *Множество* $\mathbb{U}$ *универсальных элементов плотно в* $\mathbb{X}$*.*

(iii) $\mathbb{T}_n:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ *,* $n\in\Lambda\subset\mathbb{N}$ *топологически транзитивно для пары* $(\mathbb{X},\mathbb{Y})$*.*

Если одно из этих утверждений выполняется, то множество универсальных точек $\mathbb{U}$ *является плотным* G_δ *подмножеством* $\mathbb{X}$*.*

В главе 2 диссертационной работы рассматриваются вопросы поточечной универсальности, а также топологической транзитивности частичных сумм рядов Фурье функций класса $L^p(0,1)$, $p\geq 1$ по системе Кристенсона-Леви порядка $a\geq 2$.

Пусть $E=\{x_1,x_2\cdots\}\subset(0,1)$- счетное множество, а $\Lambda\subset\mathbb{N}$ множество индексов. Обозначим через $\mathbb{C}^E$ множество всех функций $h(x)$ определенных на E и принимающих комплексные значения, т.е. $h(x_k)=y_k\in\mathbb{C}$, $x_k\in E$, $k=1,2,\dots$,.

Определение 6. *Пусть* $E\subset(0,1)$*- счетное множество. Для множества индексов* $\Lambda\subset\mathbb{N}$ *и некоторой функции* $f\in L^p(0,1)$ *скажем, что множество* $\{S_n(f,x)\}_{n\in\Lambda}$ *частичных сумм ряда фурье функции* $f(x)$ ***поточечно универсально*** *на* E*, если множество* $\{S_n(f,x)_E:\ n\in\Lambda\}$ *плотно в* $\mathbb{C}^E$ *т.е. для любых* $h:E\to\mathbb{C}$ *и* $\varepsilon>0$ *существует* $\{n_k\}\in\Lambda$ *такое, что*

$\left|S_{n_k}(f,x)-h(x)\right|<\varepsilon$ *при* $\forall\, x\in E$.

Имеет место следующее утверждение:

Теорема 2.1. *Для любого счетного множества* $E \subset (0,1)$ *существует плотное* G_δ *множество* $M \subset L^p(0,1)$ *обладающее следующим свойством: последовательность частичных сумм ряда Фурье по системе* Ψ_a *любой функции из* M *является поточечно универсальной в* $\mathbb{C}^E$.

Глава III диссертационной работы посвящена вопросам представления функций рядами по системе Кристенсона-Леви. С проблемой представления тесно связан вопрос существования так называемых разных типов универсальных рядов относительно данной системы.

Первый тип универсальности был рассмотрен еще в 1914 г. М. Фекете [19], [20]. Он в частности доказал:

Теорема (М. Фекете). *Существует вещественный степенной ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n x^n, x \in [-1,1],$$

который не только расходится в каждой точке $x \neq 0$, *но делает это наихудшим способом, а именно для любой функции* $g(x)$ *непрерывной на* $[-1,1]$ *с* $g(0) = 0$, *существует возрастающая последовательность натуральных чисел* $\{n_k\}$ *такая, что последовательность частичных сумм* $S_{n_k}(x)$ *равномерно сходится к* $g(x)$, *при* $k \to \infty$.

Пример универсального степенного ряда (или ряда Тейлора) Фекете по сути имеет два аспекта: первый это максимальная расходимость и второе существование одного элемента, который позволяет приблизить максимальный класс объектов. Это по сути и означает универсальность.

Пусть $\mu(x)$ – измеримая на $(0,1)$ положительная функция .

$$L_\mu^p(0,1) = \left\{ f(x);\ \int_0^1 |f(x)|^p \mu(x)\,dx < \infty \right\}, p \geq 1$$

-класс всех определенных на $(0,1)$ измеримых функций с нормой

$$\left(\int_0^1 |f(x)|^p \mu(x)\,dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Определение 7. *Скажем, что функциональный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x), \quad f_k \in L_\mu^p(0,1), p \geq 1 \tag{5}$$

универсален в $L_\mu^p(0,1)$ *относительно перестановок, если для любого*

$f(x) \in L^p_\mu(0,1)$ *члены ряда* (5) *можно переставить так, что вновь полученный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{\sigma(k)}(x)$$

сходится к функции $f(x)$ *по норме* $L^p_\mu(0,1)$ *.*

Определение 8. *Скажем, что ряд* (5) *универсален в* $L^p_\mu(0,1)$ *относительно знаков, если для любого* $f(x) \in L^p_\mu(0,1)$ *можно найти набор знаков* $\varepsilon_k = \pm 1$ *так, что ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k f_k(x)$$

сходится к $f(x)$ *по норме* $L^p_\mu(0,1)$*.*

Определение 9. *Скажем, что ряд* (5) *универсален в* $L^p_\mu(0,1)$ *относительно подрядов , если для любого* $f(x) \in L^p_\mu(0,1)$ *из ряда* (5) *можно выделить подряд*

$$\sum_{j=1}^{\infty} f_{k_j}(x)$$

который сходится к $f(x)$ *по норме* $L^p_\mu(0,1)$ *.*

Отметим, что вопросам существования рядов (одномерных и двумерных) универсальных в обычном смысле и относительно перестановок, подрядов, знаков в смысле сходимости почти всюду, по мере, в весовом пространстве $L^p_\mu(0,2\pi)$, $1 \le p < \infty$ посвящено много работ(см.[21]-[29]).

Первые обычные универсальные в смысле сходимости почти всюду тригонометрические ряды были построены 1945г. Д.Е. Меньшовым [21]. А именно, им был построен ряды вида

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \qquad (6)$$

такие, что для всякой измеримой на $(0,2\pi)$ функции $f(x)$ можно найти такую возрастающую последовательность натуральных чисел n_k, что у ряда (6) последовательность частичных сумм с номерами n_k сходится к $f(x)$ почти всюду на $(0,2\pi)$. (Отметим, что в этом результате , при $f \in L^1(0,2\pi)$,нельзя сходимость почти всюду заменить сходимостью в метрике $L^1(0,2\pi)$).

Этот результат был распространен А. А. Талаляном на произвольные ортонормированные полные системы (см [22]). Им же, в работе [23], установлено также, что если $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ - нормированный базис пространства $L^p(0,1), p > 1$, то существует ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\, \phi_k(x)\ , a_k \to 0 \qquad (7)$$

со свойством: для любой измеримой функции $f(x)$, члены ряда (7) можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд сходился по мере на $(0,1)$ к $f(x)$.

Следует отметить, что существование функциональных рядов, универсальных относительно перестановок в смысле сходимости почти всюду в классе почти везде конечных измеримых функций, было отмечено В. Орличем [24]. И наконец напомним, что Риман доказал, что всякий неабсолютно сходящийся числовой ряд является универсальным относительно перестановок в классе всех действительных чисел (см [25] стр. 317).

В [26] доказан следующий результат:

Теорема. *Существует тригонометрический ряд вида*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ikx}, \sum_{k=0}^{\infty} |C_k|^r < \infty, \forall\ r > 2\ C_{-k} = \overline{C_k}$$

который универсален в весовом пространстве $L^1_\mu(0,2\pi)$ *относительно подрядов, при некоторой весовой функции* $\mu(x)$, $0 < \mu(x) \le 1$.

Далее С. Епископосяном доказан следующий результат [28]:

Теорема. *Существует ряд по системе Кристенсона-Леви вида*

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k \psi_k^{(a)}(x), |C_k| \searrow 0 \text{ с } \sum_{k=0}^{\infty} |C_k|^r < \infty, \forall\ r > 2,$$

со свойством: для любого $\varepsilon > 0$ *существует измеримая функция* $\mu(x), 0 < \mu(x) < 1, mes\{x \in (0,1): \mu(x) \ne 1\} < \varepsilon$ *такая, что ряд является универсальным в* $L^1_\mu(0,1)$ *одновременно относительно перестановок и подрядов.*

В 3 главе диссертации доказывается , что существуют ряды по системе Кристенсона-Леви универсальные в $L^p_\mu(0,1)$, $1 \le p < \infty$ относительно знаков, перестановок и подрядов. Имеет место следующая теорема:

Теорема 3.2. *Существует ряд по системе Кристенсона-Леви вида*

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k \psi_k^{(a)}(x), |C_k| \searrow 0 \text{ с } \sum_{k=0}^{\infty} |C_k|^r < \infty, \forall\, r > 2,$$

со свойством: для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримая функция $\mu(x)$, $0 < \mu(x) < 1$, $mes\{x \in (0,1): \mu(x) \neq 1\} < \varepsilon$ *такая, что ряд является универсальным относительно знаков, перестановок и подрядов, во всех весовых пространствах в $L_\mu^p\ (0,1)$,* $1 < p < \infty$.

Замечание. *Отметим, что этот результат невозможно усилить в том смысле, что невозможно заменить $L_\mu^p\ (0,1)$ на $L^p\ (0,1)$ при* $1 \leq p < \infty$. Действительно, если бы существовало число $1 \leq p < \infty$ и ограниченная ортонормированная система $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0,1)$, такие что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k f_k(x)$$

являлся универсальным в $L^p\ (0,1)$ относительно частичных рядов, то для функции $(1 + |B_1|) f_1(x)$ существовала бы возрастающая подпоследовательность $s_k \nearrow \infty$, такая что

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{m} B_{s_k} f_{s_k}(x) - (1 + |B_1|) f_1(x) \right|^p dx = 0$$

откуда сразу получим

$$1 + |B_1| = \begin{cases} B_1, \text{если } s_1 = 1, \\ 0, \text{если } s_1 \neq 1 \end{cases}$$

что невозможно.

Замечание. *Теорема 3.2 для системы Уолша доказана в работе [28] М. Григоряном и З. Давтян.*

Глава 4 диссертационной работы посвящена изучению равномерной сходимости двойных рядов Фурье по системе Ψ_a после исправления функции .

Пусть $G \subseteq (0,1)^2$ множество измеримое по Лебегу и пусть $L^p(G)$, $p \in (1,\infty)$ - класс всех тех измеримых функций $f(x,y)$ определенных на множестве G для которых

$$\int\int_G |f(x,y)|^p\, dxdy < \infty$$

Определение 10. *Скажем, что все ненулевые члены в последовательности $\{D_{k,s}\}_{k,s=0}^{\infty}$ расположены в убывающем порядке по всем направлениям, если из*

$$k_2 \geq k_1, \quad s_2 \geq s_1, \quad k_2 + s_2 > k_1 + s_1, \quad D_{k_2,s_2} \neq 0, D_{k_1,s_1} \neq 0,$$

следует , что $\mathcal{D}_{k_2,s_2} < \mathcal{D}_{k_1,s_1}$.

Пусть $\{w_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$, $x \in (0,1)$ - *ортонормированная система функций. Коэффициенты Фурье функции* $f(t,\tau) \in L^1(0,1)^2$ *по двойной ортонормированной системе* $\{w_k(x)w_s(y)\}_{k,s=0}^{\infty}$ *обозначим через*

$$\mathcal{C}_{k,s}(f) = \int_0^1 \int_0^1 f(t,\tau) w_k(t) w_s(\tau) dt d\tau.$$

Положим

$spec(f) = \{(k,s), \mathcal{C}_{k,s}(f) \neq 0, \quad k,s \in \mathbb{N} \cup \{0\} \}$.

Прямоугольные и сферические частичные суммы двойного ряда Фурье по двойной системе $\{w_k(x)w_s(y)\}_{k,s=0}^{\infty}$ определяются соответственно следующим образом:

$$S_{N,M}(x,y,f) = \sum_{k=0}^{N} \sum_{s=0}^{M} \mathcal{C}_{k,s}(f)\, w_k(x) w_s(y),$$

$$S_R(x,y,f) = \sum_{k^2+s^2 \le R^2} \mathcal{C}_{k,s}(f)\, w_k(x) w_s(y),$$

Определение 11. *Говорят, что двойной ряд Фурье по системе* $\{w_k(x)w_s(y)\}_{k,s=0}^{\infty}$ *сходится (равномерно, по* $L^p(G)$ *норме, почти всюду к функции* f *по прямоугольникам или по Прингсхейму, если*

$\lim_{N,M\to\infty} S_{N,M}(x,y,f) = f(x,y)$

(соответственно равномерно, по $L^p(G)$ *норме и почти всюду). Аналогичным образом определяется сходимость двойных рядов Фурье (равномерной, по* $L^p(G)$ *норме и почти всюду) в случае сферических и частичных квадратных сумм.*

Следует отметить, что идея об исправлении функции с целью улучшения ее свойств принадлежит Н. Н. Лузину [30]. Им же в 1912г. был получен следующий знаменитый результат (С- свойство Лузина):

Теорема Лузина. *Для любой измеримой, почти всюду конечной на* $(0,1)$ *функции* f *и для любого* $\varepsilon > 0$ *сущесвуют измеримое множество* E *с мерой* $|E| > 1 - \varepsilon$ *и непрерывная на* $(0,1)$ *функция* g *совпадающая с* f *на* E.

В 1939г. Д. Е. Меньшов [30] доказал , что тригонометрическая система обладает усиленным C – свойством:

Теорема (Меньшов). *Пусть* f *измеримая функция , конечная почти всюду на* $(0,2\pi)$. *Каково бы не было* $\varepsilon > 0$ *можно определить непрерывную функцию* g *, совпадающую с* f *на некотором множестве* $E, |E| > 2\pi - \varepsilon$ *и такую , что ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится равномерно на* $(0,2\pi)$.

В 1988г М.Г. Григорян [32], доказал что тригонометрическая система обладает усиленным L^1 −свойством суммируемых функций. Оно состоит в следующем:

Теорема (Григорян). *Для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset (0,1)$ с мерой $|E| > 1 - \varepsilon$, такое, что для каждой функции $f \in L^1(0,1)$ можно найти функцию $g \in L^1(0,1)$ совпадающую с f на E, ряд Фурье которой по тригонометрической системе сходится к ней по $L^1(0,1)$ норме.*

В работе [33] С. Епископосяном для одномерной системы Кристенсона-Леви получен следующий результат:

Теорема (Епископосян). *Для любых чисел $0 < \varepsilon < 1$, P$\in \mathbb{N}$ и функции $f(x) \in L^p(0,1)$, существует функция $g(x) \in L^\infty(0,1)$ с mes $\{x \in (0,1): f(x) \neq g(x)\} < \varepsilon$ такая, что ее ряд Фурье по системе Кристенсона-Леви сходится к $g(x)$ равномерно на $(0,1)$, а последовательность коэффициентов $\{|C_k(g)|, k \in spec(g)\}$ убывает.*

В Главе 4 диссертационной работы доказан двумерный аналог этой теоремы. Отметим, что ряд классических результатов (например, теоремы Л.Карлесона [34]: ряд Фурье любой функции $f \in L^2(0,2\pi)$ сходится почти всюду на $(0,2\pi)$ теорема М. Рисса [35]: ряд Фурье любой функции $f \in L^p(0,2\pi)$, $p > 1$ сходится по норме $L^p(0,2\pi)$, теорема А.М. Колмогорова [36]: ряд Фурье каждой функции $f \in L(0,2\pi)$ сходится в метрике $L^p(0,2\pi)$, $0 < p < 1$) невозможно перенести с одномерного случая на двумерный. В этом случае даже разные (сферические, прямоугольные, квадратные) частичные суммы резко отличаются друг от друга по своим свойствам в таких вопросах, как сходимость в $L^p(0,2\pi)$, $p \geq 1$ и сходимость почти всюду (см. [36] - [40]).

Подтверждением сказанного служат следующие теоремы:

Теорема (Ч.Фефферман [38]**).** Существует непрерывная на $(0,2\pi)^2$ функция, двойной ряд Фурье которой по тригонометрической системе по прямоугольникам расходится в каждой внутренней точке $(0,2\pi)^2$.

Теорема (Ч.Фефферман [39]**).** Для любого $p, p \neq 2$ существует функция $f(x) \in L^p$, двойной ряд Фурье которой по тригонометрической системе по сферам расходится в метрике L^p.

Теорема (Р.Д. Гецадзе [40]**).** Существует непрерывная функция f, прямо-угольные частичные сумм Фурье- Уолша которой расходятся почти всюду.

Естественно возникает следующий вопрос:

Существует ли измеримое множество E сколь угодно малой меры такое, что после изменения значений любой функции из класса $L^p(0,1)^2, p \geq 1$ на E:

1)Двойной ряд Фурье измененной функции по системе Ψ_a по сферам (прямоугольникам, квадратом) сходился бы к ней равномерно?

2) Все ненулевые члены в последовательности коэффициентов Фурье вновь полученной функции по двойной системе Ψ_a по модулю были бы расположены в убывающем порядке по всем направлениям?

3)Исправленная функция имела бы заданные модули коэффициентов Фурье по системе Ψ_a?

4)Зависит ли исключительное множество E , на котором происходит изменение от исправленной функции $f(x)$, или оно универсально–обслуживает целый функциональный класс?

Имеет место следующая теорема.

Теорема 4.1. Для любого $\varepsilon > 0$ и для каждой функции $f \in L^0(0,1)^2$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^\infty(0,1)^2$, mes $\{f \neq \tilde{f}\} < \varepsilon$ такую, что ее ряд Фурье по двойной системе Ψ_a по сферам сходится к ней равномерно на $(0,1)$, и все ненулевые члены в последовательности коэффициентов Фурье по двойной системе Ψ_a вновь полученной функции по модулю расположены в убывающем порядке по всем направлениям.

Теорема 4.2. *Для любого $\varepsilon > 0$ и для каждой функции $f \in L^0(0,1)^2$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^\infty(0,1)^2$, mes $\{f \neq \tilde{f}\} < \varepsilon$ такую , что ее ряд Фурье по двойной системе Ψ_a по прямоугольникам сходится к ней равномерно на $(0,1)$, и все ненулевые члены в последовательности коэффициентов Фурье по двойной системе Ψ_a вновь полученной функции по модулю расположены в убывающем порядке по всем направлениям.*

Теоремы 4.1 и 4.2 следуют из более общей теоремы. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 4.3. *Существует ряд по двойной системе Кристенсона-Леви вида*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \mathcal{D}_{k,s}\psi_k^{(a)}(x)\psi_s^{(a)}(y), \qquad \text{с} \sum_{k,s}\left|\mathcal{D}_{k,s}\right|^{2+\delta} < \infty, \ \forall\, \delta > 0$$

со свойством:

1) все ненулевые члены в последовательности $\{|\mathcal{D}_{k,s}|\}$ расположены в убывающем порядке по всем направлениям,

2) для любого $\varepsilon > 0$ и для каждой функции $f \in L^0(0,1)^2$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^\infty(0,1)^2$, $mes\,\{f \neq \tilde{f}\} < \varepsilon$ такую,что ее ряд Фурье по двойной системе Кристенсона-Леви как по сферам, так и по прямоугольникам сходится к ней равномерно на $(0,1)^2$ и

$\mathcal{C}_{k,s}(\tilde{f}) = \mathcal{D}_{k,s}, \quad \forall (k,s) \in spec(\tilde{f}).$

Замечание. Теорема 4.3 для системы Уолша, когда $a = 2$ доказана в работе [41] М. Григоряном и А. Минасяном.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Chrestenson H.E. A class of generalized Walsh functions, Pacific J. Math., 45 (1955), 17-31.

[2] Levy P. Sur une generalisation des fonctions orthogonales de Rademacher, Comment. math. helv., 16 (1944), 146-152.

[3] Walsh J. L. A closed set of normal orthogonal functions. Amer. J. Math. 1923. V.45. P. 5–24.

[4] Paley, R. E. A. C. A Remarkable Series of Orthogonal Functions. I, II // Proc. Lond. Math. Soc. 1932. V. 34. P. 241–279.

[5] Fine J. The generalized Walsh functions, Trans. Amer. Math. Soc., 69 (1950), 66-77.

[6] Watari C. On generalized Walsh-Fourier series, Proc. Japan Acad., 33 (1957), 435-438.

[7] Vilenkin N. On a class of complete orthonormal systems, Izv. Math. 28 (1963), 1-35.

[8] Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. *Ряды и преобразования Уолша, теория и применения*, Москва , 1987.

[9] Shneider A.A. On series with respect to Walsh functions with monotone coefficients, Известия А.Н. СССР, сер. мат. 12 (1948), 179-192.

[10] Rubenstein A.I. The A - integral and series in the Walsh system, Успехи мат. наук, 18 (1963), 191-197.

[11] Balashov L.A. On series with respect to a Walsh system with monotone coefficients, Сибирский мат. журнал, 12 (1970), 25-39,

[12] Olevskii A.M. Order growth of the Lebesque functions of bounded orthonormal systems, Докл. А.Н. СССР, 176 (1967), 1247-1250.

[13] Grosse-Erdmann K.G. Manguillot A.P., *Linear Chaos*, Springer, 2011.

[14] Birkhoff G.D. *Démonstration d'un théoréme élémentaire sur les fonctions entières*, C. R. Acad. Sci. Paris, 1929, 189, 473 - 475.

[15]Grosse-Erdmann K. *Holomorphe Monster und universelle Funktionen*, Mitt.Math. Sem. Giessen ,1987, v.176, p.1 - 81 .

[16] Müller J., *Continuous functions with universally divergent Fourier series on small subsets of the circle*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 2010, v. 348, p.1155-1158.

[17] Episkoposian S.A., Muller J., Universality properties of Walsh-Fourier series, Monatshefte fur Mathematik, Springer, (2014) 175, p. 511–518.

[18] Епископосян С.А., Мюллер Ю. , О поточечной универсальности частичных сумм рядов Фурье по обобщенной системе Уолша, Известия вузов. Математика, 2016, №3, с. 1–10.

[19] Fekete M., *Untersuchungen über absolut Reihen, mit Anwendung auf dirichletsche und Fouriersche Reihen*, Math. És. Termész. Ért., 1914, V.32 , p. 389 - 425.

[20] Pal J., *Zwei kleine Bemerkungen*, Tôhoku Math. J., 1914, V. , p. 42 - 43.
[21] Меньшов Д.Е., Об универсальных тригонометрических рядах, Доклады АН СССР, 1945, т.49, стр. 79 - 82.
[22]Талалян А.А. , *О сходимости почти всюду подпоследовательностей частных сумм общих ортогональных рядов*, Известия Акда. наук Арм. ССР, сер. Математика, 1957, т. 10, н. 3, стр. 17- 34.
[23]Талалян А.А., *О рядах универсальных относительно перестановок*, Известия Акда. наук Арм. ССР, сер. Математика, 1960, т. 24, стр. 567- 604.
[24]Orlicz W., *Über die unabhängig von der Anordnung fast überall konvergenten Reihen*, Bull de l' Academie Polonaise des Sciences, 1927, v.81, p. 117 - 125.
[25]Фихтенгольц Г.М., *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, 1996, М., Наука, т. II.
[26] Grigorian M.G., Episkoposian S.A.,*On universal trigonometric series in weighted spaces* $L^1_\mu(0,2\pi)$, East J. Approx., 1999, v.5 , n.4, 483-492.
[27] Геворкян Г. Г. , Навасардян К. А. , *О рядах Уолша с монотонными коэффи-циентами, Изв. РАН. Сер. матем.*, 1999, т. 63, т.1, стр. 41–60.
[28] Episkoposian S.A., On the existence of universal series by the generalized Walsh system, Banach J. Math. Anal. v. 10, n. 2 (2016), 415-429
[29] Grigorian M.G., Davtyan Z., Universal Walsh series with monotone coefficients in weighted L^p spaces, British Journal of Mathematics & Computer Science, 2013, v.7, n. 2, p. 99-108.
[29] Лузин Н.Н., *К основной теореме интегрального исчисления* , Матем. сб., 1912, Т. 28, н.2, стр. 266 - 294.
[30] Menchoff D.E., *Sur la convergence uniforme des series de Fourier*, Матем. сб., 1942, т.11, н.1 - 2, стр.67 - 96.
[31] Grigorian M.G., *On the convergence of Fourier series in the metric of* L^1, Analysis Math., 1991, v.17, n. 3, p. 211 - 237.
[32] Енископосян С.А., *О равномерной сходимости жадного алгоритма по обобщенной системе Уолша*, Сиб. матем. журн., 54:5 (2013), стр. 1015-1022.
[33] Carleson L. *On convergence and growth of partial sums of Fourier series*, Acta Math. 1966, v. 116, p. 135 - 157.
[34] Riesz M. *Sur les functions conjugees*, Math. Zeit., 1927, v.. 27., p. 218 - 244.
[35] Kolmogorof A.N. *Sur les fonction harmoniques conjugees et les de Fourier*, Fund. Math., 1925, 7, p. 23 - 28.
[36] Жижиашвили Л.В. *О некоторых вопросах из теории простых и кратных тригонометрических и ортогональных рядов*, УМН, 1973, Т.28, вып. 2, стр. 65 - 119.
[37] Дьяченко М.И. *Некоторые проблемы теории кратных тригонометрических рядов*, УМН, 1992, Т.47, вып. 5(287), стр. 97 - 162.

[38] Fefferman C. *On the divergence of multiple Fourier series*, Bulletin of the American Math. Soc., 1971, v.94, n 2, p.191 -196.
[39] Fefferman C. *The multiply problem for the ball*, Anal. of Math. , 1971, v. 94, n 2, p. 330 - 336.
[40] Гецадзе Р.Д. *О расходимости по мере общих кратных ортогональных рядов Фурье*, Тр. МИАН СССР, 1989, т.190, стр.75 - 87.
[41] Grigorian M.G., Minasyan A. Representation of Functions in weighted spaces by series with monotone coefficients in the Walsh genrealized system. Applied Mathematics. 2013;4(11):6-12.

Работы автора по теме диссертации

1. **С.А.Епископосян, Т.М.Сагателян**, *Ряды по обобщенной системе Уолша с монотонными коэффициентами в* $L^p[0,1), p \in (0,1)$, Մաթեմատիկան բարձրագույն դպրոցում, 2014, հատոր 10, թիվ 2., էջ. 21 - 25.
2. **Епископосян С.А., Сагателян Т.М.**, *О существовании универсальных рядов по системе Кристенсона-Леви в весовых пространствах* $L^p[0,1),\ p \geq 1$, ՀԱՊՀ, Լրաբեր, 2017թ., մաս 1, էջ 23-27.
3. **Episkoposian S.A., Saghatelyan T.M.**, *Convergence and integrability of series with monotone decreasing coe_cients by Chrestenson - Levy systems*, Journal of the Indian Math. Soc. , 2017, vol. 84, n. 3-4, p. 182 - 190.
4. **Сагателян Т.М.,** *О равномерной сходимости двойных рядов по системе Кристенсона - Леви*, Материалы III Международной научно-практической конференции « Современные проблемы физико-математических наук » , 2017, стр. г. Орел, Россия.
5. **Saghatelyan T. M.**, *On the pointwise universality of the partial sums of Fourier series of* $L^p[0,1),\ p \geq 1$ *class by Chrestenson - Levy system*, Mathematica Montisigri, mathematics, 2017, Vol XL , p. 24 - 35.

SUMMARY

1. The questions of integration and convergence of series with monotonic coefficients by the Chrestenson-Levy systems were investigated. In particular, the following results were obtained:

a) Let

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{B}_n}{n} < \infty, \text{where } \mathcal{B}_n \downarrow 0,$$

then the series

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n \psi_n^{(a)}(x)$$

converges on interval (0; 1) to an integrable function and is its Fourier series by Chrestenson -Levy systems.

b) There exists monotone decreasing, tending to zero sequence $\{\mathcal{B}_n\}_{n=1}^{\infty}$ such that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{B}_n}{n} = \infty$$

and the sum of the series $\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n \psi_n^{(a)}(x)$ doesn't belong to $L^1(0,1)$.

c) If $\mathcal{C}_n \downarrow 0$, then the function

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}_n \psi_n^{(a)}(x)$$

belongs to $L^p(0,1)$, $\forall p \in (0,1)$, and satisfy

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 | \mathcal{S}_n(x) - f(x) |^p \, dx = 0$$

equality, where $\mathcal{S}_n(x)$ is the partial sums of the series.

2. For every countable set $E \subset (0,1)$ pointwise and L^p universality of Fourier series by the Chrestenson-Levy system of class $L^p(0,1)$, and the topological transitivity of the Chrestenson-Levy system for the pair $\{L^p(0,1); \mathbb{C}^E\}$, where $\mathbb{C}^E$ is the set of all functions $h(x)$ defined on E and taking complex values, i.e. $h(x_k) = y_k \in \mathbb{C}, k = 1,2, \ldots$ are established. The following statements are proved:

a) there exists a dense G_δ set $M \subset L^p(0,1)$ possessing the following property: the sequence of partial sums of the Fourier series with respect to the system Ψ_a of any function from M is pointwise universal in $\mathbb{C}^E$.

b) the Chrestenson-Levy system is topological transitive for the pair $\{L^p(0,1)\,;\mathbb{C}^E\}$.

3. The question of the existence of universal (with respect to signs, permutations and subseries) series in the Christenson-Levy system in weighted spaces in $L^p_\mu(0,1)$, $1 \le p < \infty$ was considered. The following assertion is proved:

a) *There exists a series in the Chrestenson-Levy system of the form*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \psi_k^{(a)}(x)\,,\,|c_k| \searrow 0 \; c \; \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^r < \infty\,,\forall\; r > 2\,,$$

with the property: for any $\varepsilon > 0$ *there exists a measurable function* $\mu(x)\,, 0 < \mu(x) \le 1\,, mes\{x \in (0,1) : \mu(x) \ne 1\} < \varepsilon$ *so that the series is universal with respect to signs, permutations, and subseries, in all weighted spaces in* $L^p_\mu(0,1), 1 \le p < \infty$.

4. The question of the uniform convergence of double Fourier series by the Chrestenson-Levy system (with respect to spherical and rectangular partial sums) was studied after correcting the values of the function on a set of small measure, and also the monotonicity of the Fourier coefficients of the newly obtained function.

The following assertion is proved:

There exists a series by the double Chrestenson-Levy system of the form

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \mathcal{D}_{k,s}\psi_k^{(a)}(x)\psi_s^{(a)}(y), \qquad \sum_{k,s}^{\infty} |\mathcal{D}_{k,s}|^{2+\delta} < \infty, \qquad \forall\, \delta > 0$$

with the property:

1) all nonzero terms in the sequence $\{|\mathcal{D}_{k,s}|\}$ are arranged in descending order in all directions,

2) for any $\varepsilon > 0$ and for each function $f \in L^0(0,1)^2$ we can find a function $\tilde{f} \in L^\infty(0,1)^2\,, mes\,\{f \ne \tilde{f}\} < \varepsilon$ *such* that its Fourier series by the dual

Chrestenson-Levy system, both in spheres and in rectangles, converges to it uniformly on $(0,1)^2$ $\mathcal{C}_{k,s}(f) = \mathcal{D}_{k,s}$, $\forall (k,s) \in spec(f)$.

Ամփոփում

Ատենախոսությունում ստացվել են հետևյալ հիմնական արդյունքները՝

- *Դիցուք* $\mathcal{B}_n \downarrow 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{B}_n}{n} < \infty$ *, այդ դեպքում* $\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n \psi_n^{(a)}(x)$ *շարքը զուգամիտում է ինտեգրելի ֆունկցիայի և հանդիսանում է նրա Ֆուրիեի շարքը Կրիստենսոն - Լևիի համակարգով:*
- *Գոյություն ունի մոնոտոն նվազող և զրոյին ձգտող այնպիսի հաջորդա-կանություն՝* $\{\mathcal{B}_n\}_{n=1}^{\infty}$ *, որ* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{B}_n}{n} = \infty$ *, իսկ* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n \psi_n^{(a)}(x)$ *շարքի գումարը չի պատկանում* $L^1(0,1)$ *դասին:*
- *Եթե* $\mathcal{C}_n \downarrow 0$, *ապա* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}_n \psi_n^{(a)}(x)$ *ֆունկցիան պատկանում է* $L^p(0,1)$, $\forall p \in (0,1)$ *տարածությանը, ընդ որում տեղի ունի հետևյալ հավասարումը՝*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |\mathcal{S}_n(x) - f(x)|^p \, dx = 0,$$

որտեղ $\mathcal{S}_n(x)$ *-ը շարքի n-րդ մասնակի գումարն է:*

- Ցանկացած հաշվելի $E \subset (0,1)$ բազմության համար ապացուցվել է, որ *գոյություն ունի խիտ* G_δ *բազմություն* $M \subset L^p(0,1)$, *որը օժտված է հետևյալ հատկությամբ՝* M *բազմության յուրաքանչյուր ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքի մասնակի գումարը, ըստ Կրիստենսոն-Լևիի համակարգի, հանդիսանում է կետային ունիվերսալ* $\mathbb{C}^E$ *դասի համար, որտեղ* $\mathbb{C}^E$ *-ն բոլոր այն* $h(x)$ *ֆունկցիաների բազմությունն է, որոնք որոշված են* E*-ի վրա և ընդունում են կոմպլեքս արժեքներ:*

- *Ցանկացած հաշվելի $E \subset (0,1)$ բազմության համար Կրիսպենսոն-Լևիի համակարգը տոպոլոգիապես պրանզիտիվ է $\{L^p(0,1) ; \mathbb{C}^E\}$ զույգի համար:*
- *Գոյություն ունի Կրիսպենսոն - Լևիի համակարգով շարք՝*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \psi_k^{(a)}(x), |c_k| \searrow 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^r < \infty, \forall\ r > 2,$$

հետևյալ հատկությամբ՝ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի չափելի ֆուկցիա $\mu(x)$, $0 < \mu(x) \leq 1$, $mes\{x \in (0,1): \mu(x) \neq 1\} < \varepsilon$ այնպես, որ շարքը ունիվերսալ է միաժամանակ նշանների, տեղափոխությունների և ենթաշարքերի նկատմամբ, բոլոր $L_\mu^p(0,1)$, $1 \leq p < \infty$ կշռային տարածություններում:
- *Ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվի և յուրաքանչյուր $f \in L^0(0,1)^2$ ֆունկցիայի համար կարելի է գտնել ֆունկցիա՝ $\tilde{f} \in L^\infty(0,1)^2$, $mes\{f \neq \tilde{f}\} < \varepsilon$ այնպես, որ նրա Ֆուրիեի շարքը Կրիսպենսոն - Լևիի կրկնակի համակարգով զուգամիտում է հավասարաչափ $(0,1)^2$-ում սֆերիկ մասնակի գումարներով, իսկ ֆուրիեի ոչ զրոյական գործակիցները, բացարձակ արժեքներով, դասավորված են բոլոր ուղղություններով նվազման կարգով:*
- *Ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվի և յուրաքանչյուր $f \in L^0(0,1)^2$ ֆունկցիայի համար կարելի է գտնել ֆունկցիա՝ $\tilde{f} \in L^\infty(0,1)^2$, $mes\{f \neq \tilde{f}\} < \varepsilon$ այնպես, որ նրա Ֆուրիեի շարքը Կրիսպենսոն - Լևիի կրկնակի համակարգով զուգամիտում է հավասարաչափ $(0,1)^2$-ում ուղղանկյուն մասնակի գումարներով, իսկ ֆուրիեի ոչ զրոյական գործակիցները, բացարձակ արժեքներով, դասավորված են բոլոր ուղղություններով նվազման կարգով:*
- *Գոյություն ունի Կրիսպենսոն-Լևիի կրկնակի համակարգով շարք՝*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \mathcal{D}_{k,s}\psi_k^{(a)}(x)\psi_s^{(a)}(y), \quad \sum_{k,s} |\mathcal{D}_{k,s}|^{2+\delta} < \infty, \quad \forall\, \delta > 0,$$

օժտված հետևյալ հատկությամբ՝

1) $\{|\mathcal{D}_{k,s}|\}$ հաջորդականության բոլոր ոչ զրոյական անդամները դասավորված են բոլոր ուղղություններով նվազման կարգով,

2) ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվի և յուրաքանչյուր $f \in L^0(0,1)^2$ ֆունկցիայի համար կարելի է գտնել ֆունկցիա՝ $\tilde{f} \in L^\infty(0,1)^2$, $mes\{f \neq \tilde{f}\} < \varepsilon$ այնպես, որ նրա Ֆուրիեի շարքը Կրիստենսոն-Լևիի կրկնակի համակարգով զուգամիտում է հավասարաչափ $(0,1)^2$-ում ինչպես սֆերիկ, այնպես էլ ուղղանկյուն մասնակի գումարներով և $\mathcal{C}_{k,s}(\tilde{f}) = \mathcal{D}_{k,s}$, $\forall (k,s) \in spec(f)$.