

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ  
ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ

**СТЕПАНЯН СЕЙРАН ПАВЛОВИЧ**

**ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗГИБА И УСТОЙЧИВОСТИ  
ОРТОТРОПНЫХ ТОНКОСТЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ  
ПРИ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧ**

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени доктора

технических наук

по специальности 01.02.04

**“Механика деформируемого твердого тела”**

Научный консультант  
доктор технических наук,  
профессор Р.М. Киракосян

ЕРЕВАН 2017

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Введение</b> .....	4
 <b>ГЛАВА I. ЗАДАЧИ ИЗГИБА ОРТОТРОПНЫХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ПРИ УЧЕТЕ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ</b>	
§1.1 К уточненной модели ортотропных круглых пластин при наличии касательных поверхностных нагрузок .....	17
§1.2 Задача изгиба ортотропной круглой пластинки под действием поверхностных касательных нагрузок при учете поперечного сдвига.....	24
§1.3 Напряженно-деформированное состояние двухслойной круглой ортотропной пластинки малой сдвиговой жесткости .....	32
 <b>ГЛАВА II. ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ БАЛОК И КРУГЛЫХ ПЛАСТИН</b>	
§2.1 К определению равнопрочной ортотропной балки минимального объема при учете касательного напряжения .....	63
§2.2 Уравнения цилиндрически-ортотропных пластин переменной толщины с учетом поперечных сдвигов .....	74
§2.3 Об ортотропной кольцевой пластинке оптимальной линейно-переменной толщины .....	80
 <b>ГЛАВА III. ПРИКЛАДНАЯ И ТЕХНИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УСТОЙЧИВОСТИ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК И КОЛОНН ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ПРИ УЧЕТЕ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА И СОБСТВЕННОГО ВЕСА</b>	
§3.1 Об устойчивости ортотропной цилиндрической оболочки линейно-переменной толщины при учете поперечного сдвига .....	89
§3.2 Об устойчивости ортотропной пластинки-полосы при учете собственного веса и поперечного сдвига .....	95
§3.3 Уточненная техническая модель ортотропных оболочек переменной толщины .....	109
§3.4 Модель устойчивости ортотропной колонны переменного поперечного сечения при учете поперечного сдвига и собственного веса .....	119

## **ГЛАВА IV. УСТОЙЧИВОСТЬ ТОНКОСТЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ НАЛИЧИИ УПРУГО-ЗАЩЕМЛЕННОЙ ОПОРЫ**

§4.1 Устойчивость стержня при наличии упруго-защемленной опоры .....	126
§4.2 Устойчивость стержня при учете уменьшения сжимающей силы упруго-защемленной опорой .....	133
§4.3 Неклассическая задача упруго-защемленной ортотропной балки переменной толщины при совместном действии сжимающих сил и поперечной нагрузки..	143

## **ГЛАВА V. НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ИЗГИБА СТЕРЖНЕЙ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ПРИ УЧЕТЕ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА**

§5.1 Задача изгиба ортотропной балки переменной толщины с упруго-защемленной опорой .....	156
§5.2 Краевая задача упруго защемленной по краю частично нагруженной круглой ортотропной пластинки .....	166
§5.3 Пластинки-полосы при наличии упруго- защемленной опоры.....	178
§5.4 Краевая задача упруго защемленной по краю ортотропной круглой пластинки опирающейся на упругом основании.....	187
§5.5 Задача изгиба ортотропной кольцевой пластинки переменной толщины с упруго-защемленной опорой .....	198

## **ГЛАВА VI. НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ-ПОЛОСЫ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ**

§6.1 Задача термоупругости ортотропной пластинки-полосы переменной толщины при учете поперечного сдвига .....	209
§6.2 Задача термоупругости ортотропной пластинки-полосы переменной толщины при наличии упруго- защемленной опоры .....	215
<b>Заключение .....</b>	<b>222</b>
<b>Литература .....</b>	<b>228</b>

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность темы.** На современном этапе развития строительства, судостроения, самолетостроения, ракетостроения, а также ядерно энергетических сооружений и др. применяемые конструктивные элементы имеют форму балок, пластин или оболочек. В зависимости от природных или ряда других условий, в которых находится рассматриваемый элемент конструкции, важное значение имеет его структура создания и полная информация о несущих способностях. Имея в виду настоящий этап развития материаловедения, можно сказать, что, в основном, эти элементы анизотропны. Для определения напряженно-деформированного состояния (НДС), деформации, прочности а также устойчивости таких конструктивных элементов, применяют разные методы исследования.

Отметим, что уравнения теории упругости позволяют исследовать НДС балок, пластин и оболочек, однако в рамках трехмерной теории упругости решение этих задач именно для конструктивных элементов из анизотропных материалов наталкивается на большие трудности. Такие исследования в пространственной постановке являются одной из сложных задач математической физики. Это означает, что построение эффективной для приложений общей теории анизотропных пластин и оболочек в рамках трехмерной теории упругости весьма сложно. Поэтому, в зависимости от физико-механических, геометрических параметров или от условий загрузки и других факторов, в основном принимают различные упрощающие предположения, с помощью которых поставленная трехмерная задача приводится к более простой задаче.

Приведение задач теории упругости к двумерным задачам для тонкостенных элементов типа балок, пластин и оболочек осуществляется разными путями. В обзорной работе И.И. Воровича [67] освещены основные результаты по этой теме. Для исследования НДС тонкостенных тел, в основном, используются следующие методы: метод гипотез, метод разложения решений уравнений теории упругости по некоторой полной системе функций, вариационный и асимптотические методы.

При сведении трехмерной задачи теории упругости к двумерной для пластин и оболочек по методу разложение решений уравнений теории упругости обычно

используются полиномы Лежандра, поскольку они образуют полную систему в пространстве  $L_2[-1,1]$ . Применение этого метода можно найти в работах [61,62,66,156] и др. Однако, применение метода разложений по некоторой полной системе функций позволяет построить теорию пластин и оболочек в различных приближениях. В связи с этим возникает вопрос дополнительного предположения, о том, сколько членов в разложениях нужно удерживать.

Для построения теории пластин и оболочек Н.А. Кильчевский [104,105] применял метод разложения основных величин по поперечной координате, а И.Н. Векуа [61,62], при разложении использовал полиномы Лежандра по поперечной координате. Можно заметить, что предложенные методы, для построения теории пластин и оболочек, по своей сути являются асимптотическими. Для решения трехмерных уравнений теории упругости пластин и оболочек, асимптотический метод применяли А.Л. Гольденвейзер [79], А.Е. Грин [205,206], И.И. Ворович [67,68], К.О. Фридрихс [215-217] и др.

Сущность асимптотического метода подробно представлена в монографиях А.Л. Гольденвейзера [81] и Л.А. Агаловяна [3,193].

В области трудов применения вариационных методов в линейной теории пластин и оболочек можно отметить монографию Л.С. Лейбензона [141]. Обобщению вариационного принципа Кастильяно на нелинейную теорию равновесия пластин и оболочек посвящены работы Алумяэ Н.А. [26] и Галимова К.З. [69,70]. В теории изотропных оболочек известные вариационные формулы обобщены Н.К. Галимовым на нелинейную теорию трехслойных оболочек.

Подход, в основе которого лежит применение разных гипотез, своего широкого применения нашел в теориях изгиба балок, пластин и оболочек.

Классическая теория пластин и оболочек была построена на основе известной гипотезы о недеформируемых нормалях Кирхгофа-Лява.

Созданию классической линейной теории и ее применению для изотропных пластин и оболочек посвящены многочисленные работы. Из них следует отметить монографии В.З. Власова [63], А.Л. Гольденвейзера [81], В.В. Новожилова [152], С.П. Тимошенко [182], А.П. Филина [185], В.Флюгге [186], К.Ф. Черных [190,191] и др.

Нелинейная теория пластин и оболочек была построена Э.И.Григолюком [86], Х.М. Муштари и К.З. Галимовым [151], М.С. Корнишиным [136] и др.

Книга С.Г. Лехницкого [142], опубликованная в 1957 г., посвящена классической теории анизотропных пластин. В ней в систематическом виде представлена теория упругости анизотропного тела. Работы Э.Г. Григолюка [87,88], В.В. Болотина [57,58], Я.М. Григоренко [89-91] и др. посвящены построению теории слоистых пластин и оболочек. Работа Василенко А.Т., Голуба Г.П, Григоренко Я. М. [59] посвящена определению НДС многослойных ортотропных оболочек переменной жесткости в уточненной постановке. В монографии Григоренко Я.М., Василенко А.Т. [92] рассматриваются теория и методы решения задач статики оболочек с переменными геометрическими и механическими параметрами при силовых и температурных воздействиях. Излагаются основные положения и уравнения теории изотропных и слоистых анизотропных оболочек переменной жесткости.

Классическая теория анизотропных слоистых оболочек построена С.А. Амбарцумяном [27,30]. Многочисленные результаты, полученные в области изучения анизотропных тел, обобщены и систематизированы со стороны ведущих армянских ученых - Багдасаряна Г.Е. [31, 39-45], Агаловяна Л.А. [3-14,193-196], Гнуни В.Ц. [76, 77], Саркисяна В.С. [161,162], Мовсисяна Л.А. [146-150], Дургарьяна С.М. [102], Саркисяна С.О. [167-173], Белубекяна М.В. [48-54,200], Киракосяна Р.М. [106-134, 210-213] и других.

Большой интерес исследователей к построению новых уточненных теорий пластин и оболочек вызван тем, что результаты, полученные по известным теориям, не всегда приемлемы при рассмотрении важных прикладных задач, связанных со специфическими особенностями механических свойств новых анизотропных материалов.

Большое распространение получила теория изгиба Рейснера Е [219,220], в которой уточнение производится путем введения функции поперечного сдвига.

Широкое распространение получила уточненная теория анизотропных пластин С.А Амбарцумяна [28,29], построенная на основе гипотез.

В научной литературе можно найти многочисленные работы, посвященные изгибу, колебаниям и устойчивости балок, пластин, стержней и оболочек [1, 2, 18, 19, 21-25, 32-36, 38-40, 44, 47, 48-55, 64, 65, 71-77, 85, 90, 93-98, 101, 107, 124, 133, 137, 139, 144, 146, 150, 151, 155,164-167, 175-180, 182, 184, 192, 214].

Основной вклад в развитие теории пластин и оболочек внесли известные ученые Тимошенко С.П., В.З. Власов, А.Л. Гольденвейзер, А.И. Лурье, В.В. Новожилов, А.С. Вольмир, С.А. Амбарцумян, а также Г.Е. Багдасарян, Л.А. Агаловян, В. Флюгге, В.С. Саркисян, С.О. Саркисян и другие.

Асимптотическая теория изотропных пластин и оболочек построена А.Л. Гольденвейзером [78-84], а для анизотропных пластин и оболочек - Л.А. Агаловяном [3,193]. Им и его учениками Р.С. Геворкяном, А.М. Хачатряном, Гулгазарян Л.Г. решено огромное количество прикладных задач по статике и вынужденным колебаниям пластин и оболочек [3-16,75,97,98,154, 188, 189, 193-196,]. Полученные результаты по статике пластин и оболочек обобщены в монографиях Л.А. Агаловяна, Л.А. Агаловяна и Р.С. Геворкяна [3, 11].

Многочисленные работы посвящены исследованию динамических процессов в средах взаимодействующих с различными физическими полями. В этом направлении большой вклад внесли ученые Армении, в частности, Г.Е. Багдасарян, В.Ц. Гнуни, М.В. Белубекян, А.С. Аветисян, З.Н. Даноян, К.Б. Казарян, С.В. Саркисян, Д.Д. Асанян, С.А. Джилаван и др.

Метод физических и геометрических малых параметров, приводящих к регулярно возмущенным уравнениям развит, В.С. Саркисяном [161].

В работах С.О. Саркисяна, на основе несимметричной теории упругости, разработана асимптотическая теория пластин и оболочек [167-173]. Им же асимптотическим методом построена двумерная теория магнитоупругости электропроводящих тонких тел [222-225].

В работе Киракосяна Р.М. [110] построена уточненная теория ортотропных пластин переменной толщины, в которой поперечные касательные напряжения представляются в виде квадратного многочлена по поперечной координате. На основе этой теории решены многочисленные прикладные задачи для ортотропных пластин по изгибу, колебаниям и устойчивости [114, 116, 118, 119, 122-128, 130-134, 175-180, 210-213, 230].

Настоящий этап развития теории пластин и оболочек, а также внедрение новых материалов явились основой для создания различных методов решения проблем оптимального проектирования являющейся одной из основных проблем механики

деформируемого твердого тела. По этой теме можно отметить работы [23, 37, 46, 55, 56, 76, 77, 117, 120, 121, 138, 145, 162, 165, 173, 174] и др.

Обеспечение равновесия устойчивости, и несущей способности тонкостенных элементов является одной из важнейших задач, решаемых при проектировании летательных аппаратов, конструкций различных машин и несущих инженерных сооружений. При расчёте таких систем возникают вопросы об их прочности и устойчивости. Большой интерес представляет исследование зависимости критических нагрузок и форм потери устойчивости от различных параметров, характеризующих геометрию пластины, либо оболочки и свойства материала тонкостенной конструкции. Такие задачи исследования устойчивости упругих тел сводятся к решению краевых задач на собственные значения. Следовательно, разработка приближенных методов решения краевых задач теории пластин и оболочек, которые при реализации довольно просты и универсальны, важна и актуальна.

Прогресс техники привел к широкому применению разнообразных тонкостенных конструкций, находящихся не только под воздействием механических нагрузок, но и под воздействием температурного поля.

Обширный библиографический материал по выводу дифференциальных уравнений термоупругости пластин и оболочек, работающих в условиях температурного поля, и по определению НДС, можно найти в работах [20, 75, 99, 100, 112, 113, 135, 155, 178, 180, 198, 199, 201, 202, 207, 208, 211, 218, 221, 227-233] и др..

Число работ, в которых выполнены расчеты на прочность и устойчивость гладких тонкостенных конструкций и конструкций переменной толщины, находящихся в температурном поле и с учетом поперечных сдвигов сравнительно мало.

В настоящее время широкое применение получили методы Ритца, Бубнова-Галеркина, конечных разностей, конечных и граничных элементов и другие. Однако помимо этих методов свое применение получил метод коллокаций. Академик Л.В. Канторович [103] в 1934 году впервые изложил сущность и методику применения коллокационного метода для решения краевых задач математической физики. В дальнейшем М.С. Корнишин [136], В.В. Рогалевич [158], [159], Г. Гомез и Л. Лоренцис [209] и другие в своих работах показали, что при решении различных задач теории пластин и оболочек весьма эффективно применять метод коллокации.



Детальный обзор развития этого метода, а также анализ математического и прикладного характера можно найти в монографии Рогалеви́ча В.В. [159], опубликованного в 2001г.

Во время сведения трехмерных уравнений теории упругости к двумерным уравнениям, при построении исходных геометрических соотношений теории пластин и оболочек, целесообразно учесть деформации поперечного сдвига по толщине пластинок и оболочек, что позволяет построить некий вариант уточненной технической теории.

При исследовании НДС стержневых систем, очень важно точное математическое моделирование краевых условий рассматриваемых задач. Обширное применение упруго-защемлённых опор в строительных сооружениях привело к практической необходимости их исследования.

Вопросам упруго-защемлённых опор тонкостенных элементов конструкций и их применениям посвящены работы [73,157,182] а также работы Киракосяна Р.М. [114,-116, 130-134], в которых чётко указывается конструкция опор, с помощью которой и определяются их условия.

Настоящая диссертационная работа посвящена изучению изгиба и устойчивости ортотропных тонкостенных элементов (балок, стержней, пластин и оболочек) при неклассической постановке. На основе полученных уравнений неклассической постановки исследован ряд практически и теоретически важных задач.

Решены оптимизационные задачи для балок и круглых пластин переменной толщины как при учете так и при пренебрежении поперечного сдвига и собственного веса.

***Целью диссертационной работы является:***

- получение выражений поправочных коэффициентов, учитывающих влияние поперечных касательных напряжений цилиндрически ортотропных круглых пластин при наличии касательных поверхностных нагрузок, и составление разрешающих уравнений и краевых условия задачи изгиба.

- исследование осесимметричной задачи изгиба ортотропной круглой пластинки постоянной толщины под действием радиально направленных поверхностных касательных нагрузок с применением сдвиговой теории первого порядка.

- исследование НДС круглой ортотропной пластинки, состоящей из двух различных цилиндрически ортотропных слоев, при учете поперечного сдвига.

-исследование оптимизации равнопрочных балок и круглых пластин переменной толщины с минимальным объемом при учете касательного напряжения.

-исследование устойчивости ортотропных оболочек и колонн переменной толщины при учете поперечного сдвига и собственного веса.

-исследование изгиба и устойчивости стержней переменной толщины и изгиба частично нагруженной круглой ортотропной пластинки.

-исследование изгиба и устойчивости балки переменной толщины при одновременном действии сжимающих сил и поперечной нагрузки.

-разработка метода исследования НДС для пластинки-полосы при наличии упруго заземленной опоры.

-исследование НДС ортотропной пластинки-полосы линейно-переменной толщины находящийся в температурном поле и с учетом поперечного сдвига.

**Научная новизна.** На основе уравнений равновесия дифференциального элемента сплошной среды получены основные уравнения и сформулированы краевые условия задачи изгиба цилиндрически ортотропных круглых пластин при наличии касательных поверхностных нагрузок. Получены выражения поправочных коэффициентов, учитывающих влияние поперечных сдвигов.

- Получены аналитически замкнутые выражения прогиба и изгибающих моментов пластинки, когда на лицевые поверхности пластинки действуют только радиально направленные касательные силы постоянной интенсивности.
- Исследована задача изгиба двухслойной ортотропной круглой пластинки под действием равномерно распределенной нормальной нагрузки с учетом поперечного сдвига.
- Решена задача определения толщины равнопрочной ортотропной балки минимального объема при учете касательного напряжения. Показано, что существует однопараметрическое бесконечное семейство равнопрочных балок, которые отличаются друг от друга лишь в участке доминирующего изгиба. В участке же доминирующего среза они совпадают и имеют постоянную толщину. В качестве оптимальной выбрана та равнопрочная балка, объем которой минимален.

- Решена задача определения оптимальной линейно-переменной толщины ортотропной кольцевой пластинки заданного объема. Задача исследована как при учете так и при пренебрежении собственного веса и влияния поперечного сдвига. В качестве критерия оптимальности принято условие наименьшего значения наибольшего прогиба пластинки.
- Исследована устойчивость ортотропной оболочки и колонны переменной толщины при учете поперечного сдвига и собственного веса.
- Решена неклассическая задача изгиба ортотропной балки прямоугольного поперечного сечения переменной толщины при действии равномерно распределенной нагрузки, когда ее один конец упруго зашпемлен.
- Решена неклассическая задача упруго зашпемленной ортотропной балки переменной толщины при совместном действии сжимающих сил и поперечной нагрузки, когда учитывается уменьшение сжимающей силы опорой вследствие трения.
- Исследована задача изгиба упруго - зашпемленной по краю частично нагруженной ортотропной круглой пластинки при учете поперечного сдвига и обжатия.
- Решен ряд задач статической устойчивости сжатого стержня при наличии упруго-зашпемленной опоры.
- Исследована задача изгиба упруго-зашпемленной пластинки-полосы переменной толщины.
- Решена осесимметричная задача изгиба упруго- зашпемленной ортотропной круглой пластинки, опирающейся на упругое основание.
- Решена осесимметричная задача изгиба ортотропной кольцевой пластинки переменной толщины, когда внутренний край пластинки упруго зашпемлен.
- Решены плоская задача и задача изгиба термоупругости ортотропной пластинки-полосы переменной толщины при учете поперечного сдвига.

**Диссертационная работа** состоит из введения, шести глав, заключения и списка литературы из 233 наименований.

**Во первой главе** исследуются осесимметричные задачи изгиба круглых ортотропных пластин.

*В первом параграфе* рассмотрена круглая ортотропная пластинка, которая изгибается под действием произвольных поверхностных нагрузок. В рамках

сдвиговой теории первого порядка составлена система разрешающих уравнений задачи изгиба. В предположении, что поперечные касательные напряжения изменяются по толщине по закону квадратной параболы и используя принцип виртуальных работ, получены выражения для поправочных коэффициентов.

*Во втором параграфе* рассматривается осесимметричная задача изгиба ортотропной круглой пластинки постоянной толщины под действием радиально направленных поверхностных касательных нагрузок. Рассматриваются случаи шарнирного опирания и защемления контура пластинки. Получены аналитически замкнутые выражения прогиба и изгибающих моментов пластинки. Полученные значения сопоставляются с соответствующими результатами классической теории. В зависимости от вида анизотропии и от краевых условий выполнен анализ полученных результатов.

*В третьем параграфе* решаются плоская задача и задача изгиба пластинки, состоящей из двух различных цилиндрически ортотропных слоев. Задача решается по уточненной теории [110], которая учитывает влияние поперечных сдвигов при наличии касательных поверхностных нагрузок. При этом гипотеза о линейном распределении радиальных перемещений по толщине принимается не для всей пластинки в целом, а для ее отдельных слоев. Рассматривается также гипотеза об одном линейном распределении радиальных перемещения для пакета в целом. Задача изгиба решается еще и по теории Рейсснера-Миндлина [60], при которой поперечные сдвиги учитываются с помощью только перерезывающих сил. Приведено сравнение результатов обеих теории и сделаны количественные и качественные заключения.

**Во второй главе** рассматриваются оптимизационные задачи балок и круглых пластин переменной толщины.

*В первом параграфе* решена задача оптимального проектирования равнопрочной ортотропной балки переменной толщины при учете касательного напряжения. Показано, что существует однопараметрическое бесконечное семейство равнопрочных балок, которые отличаются друг от друга лишь в участке доминирующего изгиба. В качестве оптимальной выбрана та равнопрочная балка, объем которой минимален. Вычислены прогибы этой балки при учете поперечного сдвига. Показано, что прогибы могут быть меньше соответствующих классических значений. Дано физическое объяснение этого факта.

*Во втором параграфе* приведены уравнения цилиндрически-ортотропных пластин переменной толщины.

*В третьем параграфе* решается задача определения оптимальной линейно-переменной толщины ортотропной кольцевой пластинки заданного объема. Сплошная пластинка получается как частный случай кольцевой пластинки, когда радиус её внутреннего контура стремится к нулю. В качестве критерия оптимальности принимается условие наименьшего значения наибольшего прогиба пластинки. Рассматривается случай действия равномерно распределенной нормальной нагрузки как при учете, так и при пренебрежении собственного веса и влияния поперечного сдвига. Для конкретности считается, что внутренний контур пластинки свободен от нагрузок, а её внешний контур шарнирно оперт. Применяемый метод решения задачи позволяет рассмотреть и другие варианты нагрузок и краевых условий.

**В третьей главе** рассматривается задача устойчивости ортотропных оболочек и колонн переменной толщины при учете поперечного сдвига и собственного веса. Решены разные задачи по этой теории.

*В первом параграфе* в рамках уточнённой теории [111] решается осесимметричная задача статической устойчивости ортотропной цилиндрической оболочки линейно-переменной толщины, которая при различных торцевых условиях сжимается вдоль образующих равномерно распределёнными силами. Определение безразмерных критических значений сжимающих сил сводится к нахождению собственных чисел системы двух однородных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Рассматривается вопрос об определении оптимальной линейно-переменной толщины оболочки по критерию устойчивости. Показывается, что при шарнирном опирании обоих торцов из множества оболочек линейно-переменной толщины одинакового объема наибольшее критическое значение сжимающих сил имеет оболочка постоянной толщины. Это заключение верно как при классической, так и при уточнённой постановках задачи.

*Во втором параграфе* методом коллокаций решается задача устойчивости ортотропной пластинки-полосы при учете собственного веса и поперечного сдвига. Применяется уточненная теория анизотропных пластин С.А. Амбарцумяна [29]. Рассматриваются два варианта краевых условий. Приводятся безразмерные

критические значения нагрузок. Проведен анализ полученных результатов и сделаны соответствующие выводы.

*В третьем параграфе* строится прикладная уточненная модель ортотропных оболочек переменной толщины. Приводится конкретный пример приложения со сравнением значений расчетных величин цилиндрической оболочки линейно-переменной толщины, полученных по предложенной теории и по общей уточненной теории [111].

*В четвертом параграфе* рассматривается устойчивость ортотропной колонны переменного прямоугольного поперечного сечения с учетом влияния собственного веса и деформации поперечного сдвига. Приводятся наиболее часто встречающиеся краевые условия.

**В четвертой главе** рассматривается задача устойчивости тонкостенных элементов при учете поперечного сдвига и при наличии упруго-защемленной опоры.

*В первом параграфе* обобщаются условия упруго защемленной опоры поперечно изгибаемой балки для задачи устойчивости сжатого стержня. С использованием этих условий решаются три задачи статической устойчивости сжатого стержня. Анализируя полученные результаты, делаются качественные заключения.

*Во втором параграфе* обобщаются условия упруго защемленной опоры, когда учитывается уменьшение сжимающей внешней силы вследствие трения краевой части стержня, вставленной в упругий массив. Предлагается способ учета силы трения, с применением которого решается задача изотропного стержня постоянного поперечного сечения, когда его один край упруго защемлен, а другой край защемлен абсолютно жестко. Рассматривается численный пример. На основе полученных безразмерных результатов делаются заключения о зависимости действительной критической силы от жесткости упруго защемленной опоры.

*В третьем параграфе* На основе уточненной теории ортотропных пластин переменной толщины [107] получаются уравнения задачи изгиба балки при одновременном действии сжимающих сил и поперечной нагрузки. Считается, что края балки имеют упруго защемленную опору и учитывается уменьшение сжимающей силы опорой вследствие трения. Переходя к безразмерным величинам решается конкретная задача. Обсуждается вопрос устойчивости балки. На основе полученных результатов делаются заключения.

**В пятой главе** исследуются неклассические задачи изгиба стержней переменной толщины.

*В первом параграфе* решается задача изгиба ортотропной балки прямоугольного поперечного сечения линейно переменной толщины. Один конец балки упруго защемлен, а другой лежит на классической шарнирной опоре. Задача решается при воздействии равномерно распределенной нагрузки. Получены безразмерные значения прогиба, поперечной силы и изгибающего момента, анализ которых привел к качественным заключениям.

Показывается, что когда один конец балки защемлен упруго, а другой конец абсолютно жестко, то при увеличении параметров упруго защемленной опоры балка постепенно стремится к консольной балке.

*Во втором параграфе* решается задача изгиба упруго-защемленной по контуру ортотропной круглой пластинки постоянной толщины при учёте влияний поперечного сдвига и обжатия, когда на центральную часть пластинки действует равномерно распределённая поперечная нагрузка. Для нагруженной части пластинки берётся известное решение С.А. Амбарцумяна ([29], стр.177,178), которое после учёта отсутствия угловой точки центра содержит две неизвестные постоянные интегрирования. Удовлетворив условиям упругого защемления контура, гладкости деформированной пластинки и неразрывности изгибающего момента  $M_r$  на границе раздела нагруженной и ненагруженной частей, получается система алгебраических уравнений относительно остальных пяти неизвестных постоянных интегрирования. Решая эту систему, определяются все расчетные величины.

*В третьем параграфе* на основе [107] приводятся разрешающие дифференциальные уравнения задачи изгиба ортотропной пластинки-полосы переменной толщины при учете влияния деформации поперечного сдвига. Приводится пример приложения. Рассмотрена ортотропная пластинка-полоса линейно переменной толщины. Задача решена по методу коллокации.

*В четвертом параграфе* рассматривается осесимметричная задача изгиба упруго защемленной ортотропной круглой пластинки, опирающейся на упругое основание. Пользуясь гипотезой Фусса-Винклера в рамках уточненной теории [29] получаются разрешающие дифференциальные уравнения задачи при учете влияний поперечного сдвига и обжатия. Задача решена по методу коллокации.

*В пятом параграфе* методом коллокаций решена неклассическая задача изгиба ортотропной кольцевой пластинки линейно переменной толщины, когда ее внутренний край упруго защемлен, а внешний край шарнирно оперт. Пластинка несет равномерно распределенную поперечную нагрузку. Показано, что ослабление упруго защемленной опоры существенно не влияет на качественный характер изменения расчетных величин пластинки по радиальной координате. При существенном ослаблении упруго защемленной опоры поперечная сила  $N_r$  и изгибающий момент  $M_r$  уменьшаются а прогиб защемленного края пластинки существенно увеличивается.

**В шестой главе** решаются задачи термоупругости ортотропной пластинки-полосы переменной толщины.

*В первом параграфе* на основе теории [112] решаются плоская задача и задача изгиба термоупругости защемленной по краям ортотропной пластинки-полосы линейно-переменной толщины при учете поперечного сдвига. Приводятся графики перемещений, усилий и изгибающего момента пластинки-полосы.

Показано, что учет сдвига приводит к уменьшению поперечной силы.

*Во втором параграфе* решается задача термоупругости ортотропной пластинки-полосы переменной толщины при наличии упруго защемленной опоры. Приведен численный пример.

*В заключении* сформулированы основные результаты, полученные в диссертационной работе.

**Практическая ценность работы.** Результаты исследований приведенных в диссертации, могут применяться в разных областях строительства, для оценки прочности и жёсткости тонкостенных элементов конструкций.

Основные результаты диссертации опубликованы в статьях [118-134, 174-180, 210-213, 230].

Автор считает своим приятным долгом выразить искреннюю признательность доктору технических наук, профессору Р.М. Киракосяну за многочисленные обсуждения работы и ценные советы.



# ГЛАВА I

## ЗАДАЧИ ИЗГИБА КРУГЛЫХ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН ПРИ УЧЕТЕ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ

### §1.1 К уточненной модели ортотропных круглых пластин при наличии касательных поверхностных нагрузок

Следуя [108], [109] получаются выражения поправочных коэффициентов, учитывающих влияние изменения поперечных касательных напряжений по толщине цилиндрически ортотропных круглых пластин при наличии касательных поверхностных нагрузок. Составляются разрешающие уравнения и формулируются основные краевые условия задачи изгиба пластин. Плоская задача не рассматривается, поскольку она ничем не отличается от соответствующей задачи классической теории пластин.

1. Если сплошное тело отнесено к цилиндрической системе координат  $r, \theta, z$ , где радиальная координат  $r$  отсчитывается в плоскости  $z = const$  от начало декартовой системы координат  $O$ , а угол  $\theta$  отсчитывается от оси  $x$  (рис.1.1.1), то в этом случае

$$u_r = u_r(r, \theta, z); u_\theta = u_\theta(r, \theta, z); u_z = u_z(r, \theta, z) \quad (1.1.1)$$

где  $u_r$  - перемещение по направлению радиальной координаты  $r$ , а  $u_\theta$  - перемещение, нормальное к координатной плоскости  $Orz$ ,  $u_z$  - перемещение по направлению координаты  $z$ , связаны с деформациям  $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \dots, \varepsilon_{r\theta}$  формулами [29]

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, & \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, & \varepsilon_{\theta z} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta}, \\ \varepsilon_{rz} &= \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}, & \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}, \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

В этом случае уравнения равновесия имеют вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R &= 0 \\
\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + \theta &= 0 \\
\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + Z &= 0
\end{aligned} \tag{1.1.3}$$

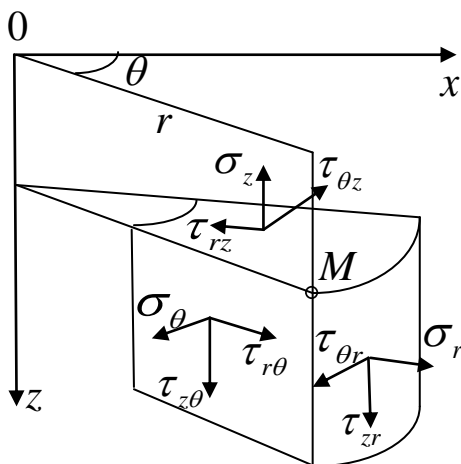


Рис.1.1.1

причем  $R = R(r, \theta, z)$ ,  $\theta = \theta(r, \theta, z)$ ,  $Z = Z(r, \theta, z)$  представляют проекции объемной силы отнесенной к единице объема на координатные направления соответственно  $r, \theta, z$ . Учитывая, что  $u_z = w(r, \theta)$  - нормальное перемещение срединной плоскости,  $u = u(r, \theta)$  и  $v = v(r, \theta)$  - тангенциальные перемещения срединной плоскости соответственно по координатам  $r$  и  $\theta$ , на основе (1.1.2) определяя деформации  $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_{r\theta}$  и подставляя в формулах обобщенного закона Гука получим выражения для напряжений  $\sigma_r, \sigma_\theta$  и  $\sigma_{\theta r}$ . В этих выражениях входят следующие величины [29]

$$B_r = \frac{E_r}{1 - \nu_r \nu_\theta}, \quad B_\theta = \frac{E_\theta}{1 - \nu_r \nu_\theta}, \quad B_k = G_{r\theta} \tag{1.1.4}$$

$$a_r = \frac{1}{B_{rz}} = \frac{1}{G_{rz}}, \quad a_\theta = \frac{1}{B_{\theta z}} = \frac{1}{G_{\theta z}}, \tag{1.1.5}$$

$$A_1 = -\frac{E_r}{E_z} \frac{\nu_{rz} + \nu_\theta \nu_{\theta z}}{1 - \nu_r \nu_\theta}, \quad A_2 = -\frac{E_\theta}{E_z} \frac{\nu_{\theta z} + \nu_r \nu_{rz}}{1 - \nu_r \nu_\theta} \tag{1.1.6}$$

$$E_r v_{r\theta} = E_\theta v_{\theta r}, \quad v_{\theta r} = v_r, \quad v_{r\theta} = v_\theta \quad (1.1.7)$$

С помощью  $T_r, T_\theta$  и  $M_r, M_\theta, H_{r\theta}$  внутренних сил и момент, из уравнений (1.1.3) получена система дифференциальных уравнений равновесия пластинки [29].

$$\frac{\partial T_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial S_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{T_r - T_\theta}{r} = 0 \quad (1.1.8)$$

$$\frac{\partial S_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r} S_{\theta r} = 0 \quad (1.1.9)$$

$$\frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} N_r = -Z_2 \quad (1.1.10)$$

$$\frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{M_r - M_\theta}{r} = N_r \quad (1.1.11)$$

$$\frac{\partial H_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r} H_{\theta r} = N_\theta \quad (1.1.12)$$

В цилиндрических координатах  $r, \theta, z$  рассмотрим ортотропную круглую пластину толщины  $h$ , находящуюся под действием произвольных поверхностных нагрузок. В рамках сдвиговой теории первого порядка имеем [108]:

$$u_r = u + z \cdot \varphi, u_\theta = v + z \cdot \psi, u_z = w \quad (1.1.13)$$

Здесь  $u_r, u_\theta$  и  $u_z$  - перемещения точек пластины по направлениям координатных линий  $r, \theta$  и  $z$  соответственно. Через  $u, v, w$  обозначены перемещения точек срединной плоскости  $z=0$ . Функции  $\varphi$  и  $\psi$  характеризуют положение первоначально нормального элемента пластины после ее деформирования. Разумеется, что этот элемент уже не нормален к срединной поверхности деформированной пластины.

Примем обозначения:

$$R_1 = \frac{R^+ - R^-}{2}, R_2 = R^+ + R^-, \theta_1 = \frac{\theta^+ - \theta^-}{2}, Z_2 = Z^+ + Z^- \quad (1.1.14)$$

Здесь  $R^-, R^+, \theta^-, \theta^+, Z^-, Z^+$  - компоненты поверхностных нагрузок по направлениям  $r, \theta, z$ . При этом знак "+" относится к поверхности  $z = +\frac{h}{2}$ , а знак "-"

к поверхности  $z = -\frac{h}{2}$ .

С учетом геометрически линейных соотношений и соотношений обобщенного закона Гука при (1.1.13) из (1.1.2) имеем [29]:

$$e_{rz} = \varphi + \frac{\partial w}{\partial r}, \quad e_{\theta z} = \psi + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (1.1.15)$$

$$\sigma_r = B_{11} \frac{\partial u}{\partial r} + B_{12} \frac{1}{r} \left( u + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + z \left[ B_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + B_{12} \frac{1}{r} \left( \varphi + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \right], \quad (1.1.16)$$

$$\sigma_\theta = B_{22} \frac{1}{r} \left( u + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + B_{12} \frac{\partial u}{\partial r} + z \left[ B_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + B_{22} \frac{1}{r} \left( \varphi + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \right], \quad (1.1.17)$$

$$\tau_{r\theta} = B_{66} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) + B_{66} z \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r} \right). \quad (1.1.18)$$

Здесь  $B_{ij}$ - параметры материала,  $e_{rz}, e_{\theta z}$ -деформации поперечных сдвигов,  $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ - основные напряжения пластины.

Для внутренних моментов с использованием выражение (1.1.16) - (1.1.18) получим:

$$M_r = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r z dz = D_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + D_{12} \frac{1}{r} \left( \varphi + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right), \quad (1.1.19)$$

$$M_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta z dz = D_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + D_{22} \frac{1}{r} \left( \varphi + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \quad (1.1.20)$$

$$M_{r\theta} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{r\theta} z dz = D_{66} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r} \right), \quad (1.1.21)$$

где  $D_{ij} = \frac{B_{ij} h^3}{12}$  - жесткости пластины.

Чтобы составить систему разрешающих уравнений задачи изгиба пластины необходимо иметь еще и выражения поперечных сил. Следуя [108] и [109] попытаемся эти выражения получить с помощью уравнения виртуальных работ [183].

Имея в виду уравнения равновесия дифференциального элемента сплошной среды [29], заключаем, что напряжениям (1.1.16) - (1.1.18) соответствуют поперечные касательные напряжения  $\tau_{rz}$  и  $\tau_{\theta z}$ , изменяющейся по толщине по закону квадратной параболы. Удовлетворив поверхностным условиям

$$\tau_{rz}^+ = R^+, \tau_{rz}^- = -R^-, \tau_{\theta z}^+ = \theta^+, \tau_{\theta z}^- = -\theta^- \quad (1.1.22)$$

и имея в виду, что  $\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{rz} dz = N_r$ ,  $\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{\theta z} dz = N_\theta$ , находим:

$$\tau_{rz} = \frac{3N_r}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) - \frac{R_1}{2} \left(1 - \frac{12z^2}{h^2}\right) + \frac{z}{h} R_2 \quad (1.1.23)$$

$$\tau_{\theta z} = \frac{3N_\theta}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) - \frac{\theta_1}{2} \left(1 - \frac{12z^2}{h^2}\right) + \frac{z}{h} \theta_2. \quad (1.1.24)$$

Наряду с пластиной, находящейся под действием действительных нагрузок, рассмотрим еще одну такую же пластину, которая при тех же краевых условиях нагружена только единичной силой, приложенной по направлению искомого прогиба действительной пластины. Согласно уравнению виртуальных работ, работа единичной силы на реальном прогибе пластины  $W$  равна работе напряжений, вызванных единичной силой, на действительных деформациях. Ради простоты рассмотрим только работы, которые совершают поперечные касательные напряжения

$$\tau_{rz}^{(1)} = \frac{3N_r^{(1)}}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right), \tau_{\theta z}^{(1)} = \frac{3N_\theta^{(1)}}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) \quad (1.1.25)$$

на соответствующих реальных деформациях

$$e_{rz} = \frac{3N_r}{2B_{55}h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) - \frac{R_1}{2B_{55}} \left(1 - \frac{12z^2}{h^2}\right) + \frac{z}{B_{55}h} R_2, \quad (1.1.26)$$

$$e_{\theta z} = \frac{3N_\theta}{2B_{44}h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) - \frac{\theta_1}{2B_{44}} \left(1 - \frac{12z^2}{h^2}\right) + \frac{z}{B_{44}h} \theta_2. \quad (1.1.27)$$

Здесь  $B_{55}$  и  $B_{44}$  – модули сдвига материала в плоскостях  $zOr$  и  $zO\theta$  соответственно.

Для этой работы можно написать:

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left\{ \frac{3N_r^{(1)}}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) \left[ \frac{3N_r}{2B_{55}h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) - \frac{R_1}{2B_{55}} \left(1 - \frac{12z^2}{h^2}\right) + \frac{z}{B_{55}h} R_2 \right] + \right. \\ & \left. + \frac{3N_\theta^{(1)}}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) \left[ \frac{3N_\theta}{2B_{44}h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) - \frac{\theta_1}{2B_{44}} \left(1 - \frac{12z^2}{h^2}\right) + \frac{z}{B_{44}h} \theta_2 \right] \right\} dv \quad (1.1.28) \end{aligned}$$

где  $V$  - объем пластины. Интегрируя по толщине пластины, выражение (1.1.28) можно привести к виду

$$\iint_S \left( \frac{N_r^{(1)} N_r}{G_{55} h} K_r + \frac{N_\theta^{(1)} N_\theta}{G_{44} h} K_\theta \right) ds. \quad (1.1.29)$$

Здесь  $S$  - площадь срединной плоскости пластины. Коэффициенты  $K_r$  и  $K_\theta$  имеют вид:

$$K_r = \frac{6}{5} - \frac{R_1 h}{5N_r}, K_\theta = \frac{6}{5} - \frac{\theta_1 h}{5N_\theta}. \quad (1.1.30)$$

Заметим, что величины  $R_2$  и  $\theta_2$  не входят в выражения  $K_r$  и  $K_\theta$ . Это и естественно, поскольку они относятся к плоской задаче пластины.

При неучете влияния распределения поперечных касательных напряжений по толщине пластины

$$K_r = K_\theta = 1 \quad (1.1.31)$$

Следовательно, коэффициенты (1.1.30) являются поправочными, т.е. учитывают отмеченное влияние.

Так как

$$e_{rz} = \varphi + \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{N_r}{B_{55} h} K_r, \quad e_{\theta z} = \psi + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{N_\theta}{B_{44} h} K_\theta, \quad (1.1.32)$$

то с учетом (1.1.30) для поперечных сил находим:

$$N_r = \frac{5B_{55} h}{6} \left( \varphi + \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{R_1 h}{6}, \quad N_\theta = \frac{5B_{44} h}{6} \left( \psi + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + \frac{\theta_1 h}{6}. \quad (1.1.33)$$

2. Система (1.1.10)-(1.1.12) разрешающих уравнений задачи изгиба пластины в усилиях и моментах принимает вид:

$$\frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} N_r = -Z_2, \quad (1.1.34)$$

$$\frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (M_r - M_\theta) = N_r - hR_1, \quad (1.1.35)$$

$$\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r} M_{r\theta} = N_\theta - h\theta_1 \quad (1.1.36)$$

Подставив значения моментов (1.1.19) - (1.1.21) и поперечных сил (1.1.33) в (1.1.34)- (1.1.36) получим систему разрешающих уравнений задачи изгиба пластины относительно функций  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $w$ :

$$\begin{aligned}
& B_{55} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) + \frac{B_{44}}{r} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \frac{B_{55}}{r} \left( \varphi + \frac{\partial w}{\partial r} \right) = \\
& \quad = -\frac{1}{5} \left( \frac{6Z_2}{h} + \frac{\partial R_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_1}{\partial \theta} + \frac{R_1}{r} \right) \\
& D_{11} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{D_{66}}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{D_{12} + D_{66}}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} + \frac{D_{11}}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{D_{22} + D_{66}}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \\
& \quad - \left( \frac{D_{22}}{r^2} + \frac{5}{6} B_{55} h \right) \varphi - \frac{5}{6} B_{55} h \frac{\partial w}{\partial r} = -\frac{5}{6} h R_1 \tag{1.1.37} \\
& \frac{D_{22}}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{D_{12} + D_{66}}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} + \frac{D_{66}}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{D_{22} + D_{66}}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \\
& \quad - \left( \frac{D_{66}}{r^2} + \frac{5}{6} B_{44} h \right) \psi - \frac{5}{6} B_{44} \frac{h}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} = -\frac{5}{6} h \theta_1
\end{aligned}$$

Система (1.1.37) имеет шестой порядок, в силу чего на каждом крае пластины необходимо иметь по три краевых условия.

Приведем некоторые, часто встречающиеся, условия для края  $r = const$

а) условия свободного опирания:

$$D_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + D_{12} \frac{1}{r} \left( \varphi + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) = 0, \quad (M_r = 0) \tag{1.1.38}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r} = 0, \quad (M_{r\theta} = 0), \tag{1.1.39}$$

$$5B_{55} \left( \varphi + \frac{\partial w}{\partial r} \right) + R_1 = 0, \quad (N_r = 0). \tag{1.1.40}$$

б) условия шарнирного опирания:

Первые два условия совпадают с условиями свободного опирания (1.1.38), (1.1.39). Взамен последнего условия (1.1.40) следует брать условие  $w = 0$ .

в) условия заделанного края:

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0, \quad w = 0 \tag{1.1.41}$$

Возможны и другие условия. Аналогично можно написать условия и для края  $\theta = const$ .

Таким образом, система уравнений (1.1.37) с соответствующими краевыми условиями позволяет учитывать влияние изменения поперечных касательных напряжений по толщине пластины при наличии поверхностных касательных нагрузок.

В заключении отметим, что теория, предложенная в [60] не обладает такой возможностью. Поскольку эта теория учитывает влияние поперечных сдвигов только посредством поперечных сил  $N_r$  и  $N_\theta$ . Вследствие чего, в случае действия только касательных поверхностных нагрузок, когда поперечные силы равны нулю, она поправок дать не может.

### **§1.2 Задача изгиба ортотропной круглой пластинки под действием поверхностных касательных нагрузок при учете поперечного сдвига**

Рассматривается осесимметричная задача изгиба ортотропной круглой пластинки постоянной толщины под действием радиально направленных поверхностных касательных нагрузок. Применяется сдвиговая теория первого порядка [108], [109], которая, в отличие от теории Рейсснера-Миндлина [60], позволяет учитывать влияние изменения поперечного касательного напряжения по толщине пластинки при отсутствии поперечного усилия.

Рассматриваются случаи шарнирного опирания и защемления контура пластинки. Получаются аналитически замкнутые выражения прогиба и изгибающих моментов пластинки.

1. Рассмотрим цилиндрически ортотропную круглую пластинку радиуса  $a$  и постоянной толщины  $h$ . Пластинку отнесем к системе цилиндрических координат  $r, \theta, z$ . Координатные оси направим по осям анизотропии материала. Плоскость  $r\theta$  совместим со срединной плоскостью пластинки, направив ось  $0z$  вертикально вниз.

Рассмотрим случай, когда на лицевых поверхностях пластинки действуют только радиально направленные касательные силы постоянной интенсивности  $\tau$ :

$$R|_{z=+h/2} = R^+ = \tau; R|_{z=-h/2} = R^- = -\tau \quad (1.2.1)$$

Будем считать, что пластинка шарнирно оперта или защемлена по всему контуру  $r = a$ . Из-за отсутствия нормальных и кольцевых касательных поверхностных нагрузок имеем



$$Z_2 = \theta_1 = 0 \quad (1.2.2)$$

а для  $R_1$ , с учетом (1.2.1), получим:

$$R_1 = \frac{R^+ - R^-}{2} = \tau : \quad (1.2.3)$$

Следовательно уравнения равновесия (1.1.34)–(1.1.36) дифференциального элемента срединной плоскости изгибаемой пластинки в усилиях и моментах принимает вид :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} N_r &= 0 \\ \frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{M_r - M_\theta}{r} &= N_r - hR_1 \\ \frac{\partial M_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{2M_{r\theta}}{r} &= N_\theta - h\theta_1 \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

Здесь  $N_r, N_\theta$  и  $M_r, M_\theta, M_{\theta r}$  - внутренние усилия и моменты пластинки.

Первое уравнение системы (1.2.4) в силу осесимметричности задачи имеет тривиальное решение

$$N_r \equiv 0, \quad (1.2.5)$$

а третье уравнение этой системы отпадает. Остается только второе уравнение, которое, с учетом (1.2.3) и (1.2.5) принимает вид:

$$\frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r - M_\theta}{r} = -h\tau \quad (1.2.6)$$

В рамках теории [108], [109] имеем:

$$N_r = \frac{5}{6} B_{55} h \left( \varphi + \frac{dw}{dr} \right) + \frac{\tau h}{6}, \quad M_r = D_{11} \frac{d\varphi}{dr} + \frac{D_{12}}{r} \varphi, \quad M_\theta = D_{12} \frac{d\varphi}{dr} + \frac{D_{22}}{r} \varphi. \quad (1.2.7)$$

Здесь  $w$ -прогиб,  $\varphi$  - функция, характеризующая положение первоначально нормального элемента пластинки после ее изгиба. Через  $B_{55}$  обозначен модуль сдвига материала в плоскости  $r\theta z$ , а  $D_{ij}$  - жесткости пластинки

$$D_{ij} = \frac{B_{ij} h^3}{12} \quad (1.2.8)$$

Параметры  $B_{11} = B_r$ ,  $B_{22} = B_\theta$ ,  $B_{12} = B_{r\theta}$  выражаются через упругие постоянные материала по известным формулам [29].

Из первого выражения (1.2.7) с учетом (1.2.5) получим:

$$\varphi = -\frac{dw}{dr} - \frac{\tau}{5B_{55}} \quad (1.2.9)$$

Уместно отметить, что в классической теории пластин

$$\varphi^{кл} = -\frac{dw}{dr} \quad (1.2.10)$$

Поскольку в рамках сдвиговой теории первого порядка радиальное перемещение  $u_r$ , возникшее изгибом пластинки, определяется формулой

$$u_r = z\varphi, \quad (1.2.11)$$

то в сечениях защемления или симметрии в место  $\frac{dw}{dr} = 0$  должно выполняться условие

$$\varphi = 0 \Rightarrow \frac{dw}{dr} = -\frac{\tau}{5B_{55}} \quad (1.2.12)$$

Следовательно, в этих сечениях происходит излом срединной плоскости пластинки. Это обстоятельство характерно всем уточненным теориям.

С учетом (1.2.9) и выражений моментов (1.2.7), уравнение (1.2.6) можно представить в виде

$$r^2 \frac{d^3 w}{dr^3} + r \frac{d^2 w}{dr^2} - k^2 \frac{dw}{dr} = \frac{\tau h r^2}{D_{11}} + \frac{k^2 \tau}{5B_{55}}, \quad (1.2.13)$$

где обозначено

$$k = \sqrt{\frac{D_{22}}{D_{11}}} = \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}} \quad (1.2.14)$$

Здесь  $E_r$  и  $E_\theta$  - модули упругости материала по радиальному и кольцевому направлениям соответственно.

Общий интеграл уравнения (1.2.13) при  $k \neq 2$  имеет вид:

$$w = c_1 + c_2 r^{1+k} + c_3 r^{1-k} + \frac{\tau h r^3}{3D_{11}(4-k^2)} - \frac{\tau r}{5B_{55}} \quad (1.2.15)$$

Здесь  $c_i$  - постоянные интегрирования.

Из ограниченности прогиба и его первого производного в центре пластинки  $r=0$  следует

$$c_3 = 0. \quad (1.2.16)$$

Таким образом общее выражение прогиба пластинки будет:

$$w = c_1 + c_2 r^{1+k} + \frac{\tau h r^3}{3D_{11}(4-k^2)} - \frac{\tau r}{5B_{55}} \quad (1.2.17)$$

Постоянные  $c_1$  и  $c_2$  должны определяться из условий на контуре пластинки  $r=a$ . После определения прогиба  $w$ , изгибающие моменты пластинки можно вычислить по формулам (1.2.7), которые с учетом (1.2.9) принимают вид:

$$M_r = -D_{11} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{D_{12}}{r} \left( \frac{dw}{dr} + \frac{\tau}{5B_{55}} \right), \quad M_\theta = -D_{12} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{D_{22}}{r} \left( \frac{dw}{dr} + \frac{\tau}{5B_{55}} \right) \quad (1.2.18)$$

отметим, что решение при  $k=2$  можно получить из окончательных выражений  $w, M_r$  и  $M_\theta$  путем предельного перехода  $k \rightarrow 2$ .

2. Рассмотрим случай шарнирного опирания вдоль всего контура  $r=a$ . Краевые условия имеют вид:

$$w|_{r=a} = M_r|_{r=a} = 0 \quad (1.2.19)$$

Используя выражения  $w$  и  $M_r$  для постоянных  $c_1$  и  $c_2$  получим:

$$c_1 = \frac{\tau a}{5B_{55}} + \frac{\tau h a^3 \left[ (6-k-k^2)D_{11} + (2-k)D_{12} \right]}{3D_{11}(1+k)(4-k^2)(kD_{11} + D_{12})} \quad (1.2.20)$$

$$c_2 = -\frac{\tau h a^{2-k} (2D_{11} + D_{12})}{(1+k)(kD_{11} + D_{12})D_{11}(4-k^2)} \quad (1.2.21)$$

Подставляя эти значения в (1.2.17) и (1.2.18) для прогиба и изгибающих моментов пластинки находим:

$$w = \frac{\tau h}{3D_{11}(1+k)(4-k^2)(kD_{11} + D_{12})} \left\{ (1+k)(kD_{11} + D_{12})r^3 + \right. \quad (1.2.22)$$

$$\left. + \left[ (6-k-k^2)D_{11} + (2-k)D_{12} \right] a^3 - 3r^{1+k} a^{2-k} (2D_{11} + D_{12}) \right\} + \frac{\tau(a-r)^3}{5B_{55}}$$

$$M_r = \frac{\tau h (2D_{11} + D_{12}) r}{D_{11} (4-k^2)} (a^{2-k} r^{k-2} - 1), \quad (1.2.23)$$

$$M_{\theta} = \frac{\tau hr}{D_{11}} \cdot \frac{a^{2-k} r^{k-2} (kD_{12} + D_{22})(2D_{11} + D_{12}) - (2D_{12} + D_{22})(kD_{11} + D_{12})}{(4 - k^2)(kD_{11} + D_{12})} \quad (1.2.24)$$

Переходя к пределу при  $k \rightarrow 2$  из (1.2.22) – (1.2.24), получим:

при  $k = 2$

$$w = \tau h \left\{ \frac{(5D_{11} + D_{12})(a^3 - r^3) - 3r^3(2D_{11} + D_{12}) \ln \frac{a}{r}}{36D_{11}(2D_{11} + D_{12})} \right\} + \frac{\tau(a - r)}{5B_{55}}, \quad (1.2.25)$$

$$M_r = \frac{\tau hr(2D_{11} + D_{12})}{4D_{11}} \ln \frac{a}{r}, \quad (1.2.26)$$

$$M_{\theta} = \frac{\tau hr}{4D_{11}} \cdot \frac{(2D_{12} + D_{22})(2D_{11} + D_{12}) \ln \frac{a}{r} + D_{11}D_{22} - D_{12}^2}{2D_{11} + D_{12}}. \quad (1.2.27)$$

Для простоты вопрос о величине поправки в значении наибольшего прогиба, вносимой учетом формы распределения поперечного касательного напряжения  $\tau_r$  по толщине пластинки, обсудим для случая  $k = 2$ , т.е. когда  $E_{\theta} = 4E_r$ .

Наибольший прогиб получается в центре пластинки  $r = 0$ . Из (1.2.25) находим:

$$w|_{r=0} = \frac{\tau ha^3(5D_{11} + D_{12})}{36D_{11}(2D_{11} + D_{12})} \left[ 1 + \frac{3}{5} \cdot \frac{(2D_{11} + D_{12})B_{11}h^2}{(5D_{11} + D_{12})B_{55}a^2} \right] \quad (1.2.28)$$

Здесь

$$w^{kl}|_{r=0} = \frac{\tau ha^3(5D_{11} + D_{12})}{36D_{11}(2D_{11} + D_{12})} \quad (1.2.29)$$

представляет собой наибольший прогиб пластинки по классической теории. Поправка составляет

$$\Delta = \frac{3}{5} \cdot \frac{(2D_{11} + D_{12})B_{11}h^2}{(5D_{11} + D_{12})B_{55}a^2} \quad (1.2.30)$$

При  $D_{12} = 0.2D_{11}$ ,  $B_{11} = 10B_{55}$ ,  $h = 0.2a$ , что вполне разумно, она равна 0.102 или 10%.

Изгибающий момент  $M_r$  в центре пластинки имеет нулевое значение. С удалением от центра его значение возрастает, при  $r = \frac{a}{e}$  становится максимальным

$$M_r^{\max} = M_r \Big|_{r=\frac{a}{e}} = \frac{\tau ha}{4eD_{11}}(2D_{11} + D_{12}) \quad (1.2.31)$$

а затем, монотонно убываясь, на контуре пластинки превращается в нуль.

Изгибающий момент  $M_\theta$  также в центре пластинки равен нулю. С удалением от центра он возрастает, в некотором сечении имеет максимум, а на контуре принимает значение:

$$M_\theta \Big|_{r=a} = \frac{\tau ha}{4D_{11}}(2D_{11} - D_{12}). \quad (1.2.32)$$

При

$$D_{22} = 4D_{11}, D_{12} = 0.3D_{11} \quad (1.2.33)$$

для безразмерных моментов из (1.2.26) и (1.2.27) получим

$$\bar{M}_r = \frac{4M_r}{\tau ha} = -2.3 \frac{r}{a} \cdot \ln \frac{r}{a}, \quad (1.2.34)$$

$$\bar{M}_\theta = \frac{4M_\theta}{\tau ha} = -4.6 \frac{r}{a} \cdot \ln \frac{r}{a} + 1.7 \frac{r}{a} \quad (1.2.35)$$

На рис. 1.2.1 представлены графики изменения  $\bar{M}_r$  и  $\bar{M}_\theta$  по радиальной координате.

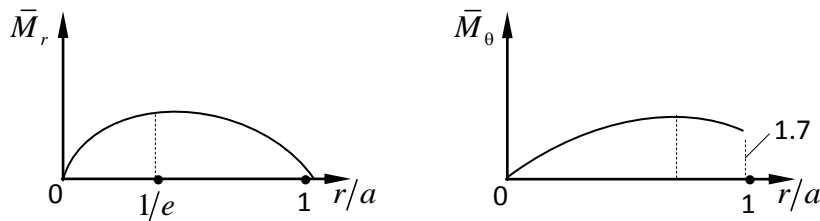


Рис.1.2.1

3. Рассмотрим случай защемления контура  $r = a$ . Краевые условия в этом случае имеют вид:

$$w \Big|_{r=a} = 0; \quad \varphi \Big|_{r=a} = - \left( \frac{dw}{dr} + \frac{\tau}{5B_{55}} \right) \Big|_{r=a} = 0; \quad (1.2.36)$$

С учетом выражения (1.2.25) из (1.2.36) для постоянных  $c_1$  и  $c_2$  получим:

$$c_1 = \frac{\tau ha^3}{3D_{11}(1+k)(2+k)} + \frac{\tau a}{5B_{55}} \quad (1.2.37)$$

$$c_2 = -\frac{\tau h a^{2-k}}{D_{11}(1+k)(4-k^2)} \quad (1.2.38)$$

Подставляя эти значения в (1.2.25) - (1.2.27) для прогиба и моментов пластинки находим:

$$w = \frac{\tau h}{3D_{11}} \cdot \frac{(1+k)r^3 + (2-k)a^3 - 3r^{1+k}a^{2-k}}{(1+k)(4-k^2)} + \frac{\tau(a-r)}{5B_{55}} \quad (1.2.39)$$

$$M_r = \tau h r \cdot \frac{r^{k-2}a^{2-k}(kD_{11} + D_{12}) - 2D_{11} - D_{12}}{D_{11}(4-k^2)} \quad (1.2.40)$$

$$M_\theta = \tau h r \cdot \frac{r^{k-2}a^{2-k}(kD_{12} + D_{22}) - 2D_{12} - D_{22}}{D_{11}(4-k^2)} \quad (1.2.41)$$

В случае  $k = 2$  предельным переходом получим:

$$w = \frac{\tau h}{36D_{11}} \left( a^3 - r^3 - 3r^3 \ln \frac{a}{r} \right) + \frac{\tau(a-r)}{5B_{55}} \quad (1.2.42)$$

$$M_r = \frac{\tau h r}{4D_{11}} \left[ (2D_{11} + D_{12}) \ln \frac{a}{r} - D_{11} \right] \quad (1.2.43)$$

$$M_\theta = \frac{\tau h r}{4D_{11}} \left[ (2D_{12} + D_{22}) \ln \frac{a}{r} - D_{12} \right] \quad (1.2.44)$$

Наибольший прогиб будет:

$$w|_{r=0} = \frac{\tau h a^3}{36D_{11}} \left[ 1 + \frac{3}{5} \cdot \frac{B_{11}h^2}{B_{55}a^2} \right] \quad (1.2.45)$$

Поправка составляет

$$\Delta = \frac{3}{5} \cdot \frac{B_{11}h^2}{B_{55}a^2} \quad (1.2.46)$$

При  $B_{11} = 10B_{55}$ ,  $h = 0.2a$  она равна 0.24, или 24%.

Изгибающие моменты в центре пластинки равны нулю. С удалением от центра они возрастают, имеют максимум, в некоторых сечениях превращаются в нуль, после чего меняют знак и возрастают по абсолютному значению. Как и следовало ожидать, при защемлении контура пластинки изгибающие моменты получаются знакопеременными.

На контуре они равны:

$$M_r|_{r=a} = -\frac{\tau ha}{4}, \quad M_\theta|_{r=a} = -\frac{\tau ha}{4} \frac{D_{12}}{D_{11}}. \quad (1.2.47)$$

При (1.2.33) безразмерные моменты имеют вид:

$$\bar{M}_r = -2.3 \frac{r}{a} \cdot \ln \frac{r}{a} - \frac{r}{a}, \quad \bar{M}_\theta = -4.6 \frac{r}{a} \cdot \ln \frac{r}{a} - 0.3 \frac{r}{a} \quad (1.2.48)$$

На рис.1.2 2 приведены графики  $\bar{M}_r$  и  $\bar{M}_\theta$ .

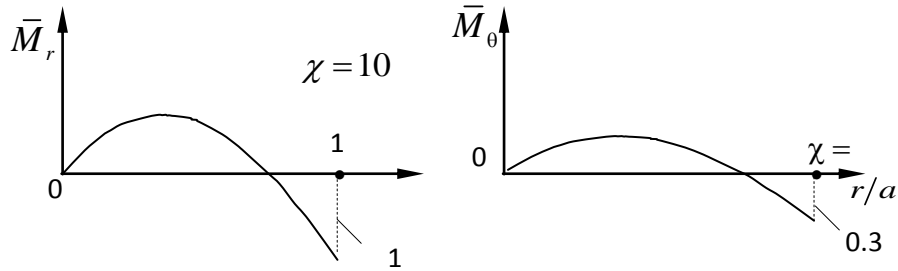


Рис.1.2.2

В заключении отметим:

а) Решения задач для изотропных пластин можно получить из найденных решений, подставляя в них  $k = 1$ .

б) Если в случае действия нормальных поверхностных нагрузок изгибающие моменты в центре пластинки при  $k < 1$  имеют особенность, при  $k = 1$  принимают одинаковые конечные значения, а при  $k > 1$  они равны нулю [142], то в случае действия только касательных поверхностных нагрузок моменты в центре пластинки независимо от характера анизотропии материала всегда равны нулю.

в) Учет поперечного сдвига в рассмотренных случаях не влияет на значения изгибающих моментов и они совпадают с соответствующими значениями классической теории пластин.

г) В рассмотренных случаях, т.е. когда  $N_r = 0$ , теория Рейсснера-Миндлина [60] для прогиба поправок не дает.

### **§1.3 Напряженно-деформированное состояние двухслойной круглой ортотропной пластинки малой сдвиговой жесткости**

Рассматриваются плоская задача и задача изгиба пластинки, состоящей из двух различных цилиндрически ортотропных круглых слоев. Задача изгиба решается по уточненной теории [110], которая учитывает влияние поперечных сдвигов при наличии касательных поверхностных нагрузок. При этом гипотеза о распределении радиальных перемещений принимается не для всей пластинки в целом, а для ее отдельных слоев, в виде различных линейных функций поперечной координаты. Мысленно разделив слои пластинки друг от друга, на поверхности контакта каждого слоя прилагаются нормальные и касательные контактные напряжения, которые представляются в виде степенных многочленов с неизвестными коэффициентами. Эти коэффициенты определяются из условий полного контакта слоев пластинки. Рассматривается конкретный пример, когда на верхней лицевой поверхности шарнирно опертой по всему нижнему контуру пластинки действует равномерно распределенная нормальная нагрузка. На основе полученных результатов, делаются количественные и качественные заключения.

Во всех работах, посвященных сдвиговой теории первого порядка, влияние поперечных сдвигов учитывается только с помощью поперечных сил. Считая, что поперечные касательные напряжения по толщине пластинки меняются по законам квадратных парабол, в некоторых работах ([91], [192] и др.) в выражениях поперечных сил вводится поправочный коэффициент, равный  $5/6$ . В работе [110] рассматривается общий случай, когда на пластинку действуют еще и касательные поверхностные нагрузки. Обобщая понятие поправочных коэффициентов, в этой работе к значению  $5/6$  добавляется еще один член, выраженный через параметры поверхностных касательных нагрузок. Это позволяет получить поправку и в тех случаях, когда поперечные касательные напряжения самоуравновешивающиеся, т.е. когда поперечные силы равны нулю. В настоящем параграфе приводится применение отмеченного обобщенного понятия поправочных коэффициентов. Роль поверхностных касательных нагрузок играют касательные контактные напряжения, действующие на соприкасающихся поверхностях слоев пластинки.



**Первый подход. 1.** Рассмотрим круглую пластинку радиуса  $a$ , состоящую из двух различных цилиндрически ортотропных слоев, полюсы анизотропии материалов которых совпадают с их центрами. Толщину и механические параметры верхнего слоя обозначим  $h$  и  $B_{ij}$ , а нижнего -  $H$  и  $B_{ij}^H$ . Слои пластинки отнесем к локальным системам цилиндрических координат  $r, \theta, z$ . Горизонтальные координатные плоскости  $rO\theta$  совместим со срединными плоскостями слоев, а оси  $Oz$  направим вертикально вниз. Будем считать, что на верхней лицевой поверхности пластинки действует только равномерно распределенная нормальная нагрузка интенсивности  $q$ , а ее нижняя лицевая поверхность свободна от нагрузок. Краевые условия произвольны.

Мысленно разделим слои пластинки друг от друга, заменив их взаимодействие действием контактных напряжений  $p$  и  $\tau$  (рис.1.3.1).

Примем обозначения:

$$\begin{aligned}
 r &= a\rho, \quad u = h\bar{u}, \quad u_r = h\bar{u}_r, \quad w = 10^{-3}h\bar{w}, \quad H = mh, \quad q = B_{11}\bar{q}, \quad p = B_{11}\bar{p}, \quad \tau = B_{11}\bar{\tau}, \\
 B_{22} &= k^2B_{11}, \quad B_{12} = \alpha_{12}B_{11}, \quad B_{11} = B_{55}\chi, \quad N_r = B_{11}h\bar{N}_r, \quad N_\theta = B_{11}h\bar{N}_\theta, \quad M_r = B_{11}h^2\bar{M}_r, \\
 M_\theta &= B_{11}h^2\bar{M}_\theta, \quad z = h\bar{z}, \quad a = hl, \quad Z_1 = B_{11}\bar{Z}_1, \quad \bar{Z}_2 = B_{11}\bar{Z}_2, \quad R_1 = B_{11}\bar{R}_1, \quad R_2 = B_{11}\bar{R}_2, \quad 1.3.1) \\
 T_r &= B_{11}h\bar{T}_r, \quad T_\theta = B_{11}h\bar{T}_\theta, \quad B_{ij}^H = \beta_{ij}B_{ij}, \quad m\beta_{11} = \beta, \quad \beta_{22}k^2/\beta_{11} = \gamma^2
 \end{aligned}$$

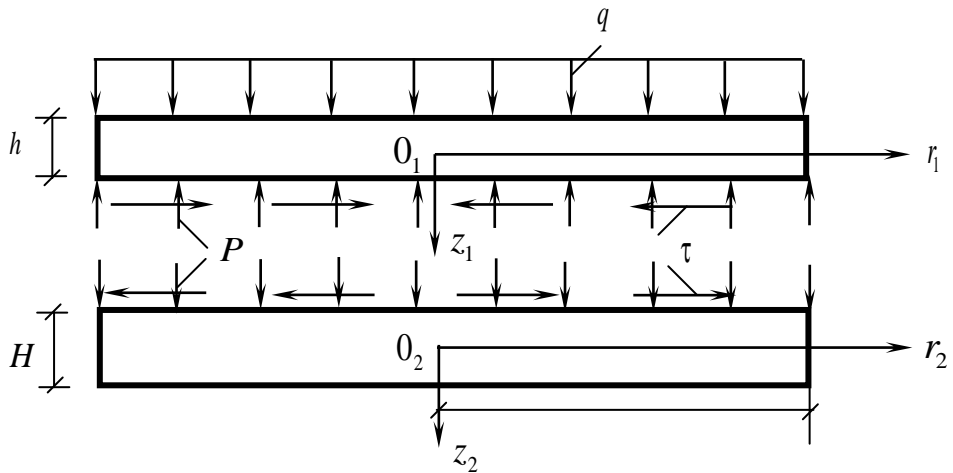


Рис.1.3.1

Здесь  $u$  и  $u_r$  – радиальные перемещения точек срединной плоскости и произвольной точки,  $w$  – прогиб,  $N_r, N_\theta$  и  $M_r, M_\theta$  – поперечные усилия и изгибающие моменты слоев пластинки соответственно.  $Z_i$  и  $R_i$  имеют вид [29]

$$Z_1 = \frac{Z^+ - Z^-}{2}; Z_2 = Z^+ + Z^-; R_1 = \frac{R^+ - R^-}{2}; R_2 = R^+ + R^- \quad (1.3.2)$$

Через  $Z^\pm$  и  $R^\pm$  обозначены интенсивности нормальных и радиальных компонент поверхностных нагрузок. При этом знак «+» относится к нижней, а знак «-» – к верхней поверхности каждого слоя пластинки.

Контактные напряжения представим в виде степенных многочленов  $n$ -ого порядка

$$\bar{p} = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \cdot \rho^i, \quad \bar{\tau} = \sum_{i=1}^n b_i \cdot \rho^i \quad (1.3.3)$$

Неизвестные коэффициенты  $a_0, a_i$  и  $b_i$  будем определять из условий полного контакта слоев, т.е. из условий равенства прогибов и радиальных перемещений точек их контактных поверхностей.

2. Рассмотрим задачу ОПНС слоев пластинки, на которую учет деформации поперечного сдвига не влияет. Величины, относящиеся к верхнему слою, обозначим дополнительным индексом «1», а нижнему слою – индексом «2».

а) задача ОПНС верхнего слоя.

С учетом (1.3.1) и (1.3.2) имеем:

$$\bar{R}_2 = -\bar{\tau} = -\sum_{i=1}^n b_i \rho^i \quad (1.3.4)$$

Уравнение осесимметричной плоской задачи в усилиях примет вид [29]:

$$\frac{d\bar{T}_{r1}}{d\rho} + \frac{\bar{T}_{r1} - \bar{T}_{\theta1}}{\rho} = l \sum_{i=1}^n b_i \rho^i \quad (1.3.5)$$

Так как

$$\bar{T}_{r1} = \frac{1}{l} \left( \frac{d\bar{u}_1}{d\rho} + \alpha_{12} \frac{\bar{u}_1}{\rho} \right), \quad \bar{T}_{\theta1} = \frac{1}{l} \left( \alpha_{12} \frac{d\bar{u}_1}{d\rho} + k^2 \frac{\bar{u}_1}{\rho} \right) \quad (1.3.6)$$

то уравнение (1.3.5) можно записать в виде

$$\rho^2 \frac{d^2 \bar{u}_1}{d\rho^2} + \rho \frac{d\bar{u}_1}{d\rho} - k^2 \bar{u}_1 = l^2 \sum_{i=1}^n b_i \rho^{i+2} \quad (1.3.7)$$

Общее решение этого уравнения, ограниченное в центре пластинки  $\rho = 0$ , будет

$$\bar{u}_1 = C_1 \rho^k + l^2 \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{(i+2)^2 - k^2} \cdot \rho^{i+2} \quad (1.3.8)$$

Здесь  $C_1$  – постоянная интегрирования, подлежащая определению из соответствующего условия края слоя ( $\rho = 1$ ). Подставляя (1.3.8) в (1.3.6), для безразмерных усилий получим:

$$\bar{T}_{r1} = \frac{1}{l} \left[ (k + \alpha_{12}) \rho^{k-1} \cdot C_1 + l^2 \sum_{i=1}^n \frac{(i+2 + \alpha_{12}) b_i}{(i+2)^2 - k^2} \cdot \rho^{i+1} \right] \quad (1.3.9)$$

$$\bar{T}_{\theta 1} = \frac{1}{l} \left[ k(k + \alpha_{12}) \rho^{k-1} \cdot C_1 + l^2 \sum_{i=1}^n \frac{(i \cdot \alpha_{12} + 2\alpha_{12} + k^2)}{(i+2)^2 - k^2} \cdot \rho^{i+1} \right] \quad (1.3.10)$$

б) Задача ОПНС нижнего слоя.

Для этого слоя имеем:

$$\bar{R}_2 = \bar{\tau} = \sum_{i=1}^n b_i \cdot \rho^i \quad (1.3.11)$$

Не вдаваясь в подробности, приведем решение плоской задачи этого слоя.

$$\bar{u}_2 = B_1 \rho^\gamma - \frac{l^2}{\beta} \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{(i+2)^2 - \gamma^2} \cdot \rho^{i+2} \quad (1.3.12)$$

$$\bar{T}_{r2} = \frac{m}{l} \left[ B_1 \cdot (\beta_{11} \gamma + \alpha_{12} \beta_{12}) \rho^{\gamma-1} - \frac{l^2}{\beta} \sum_{i=1}^n \frac{(i\beta_{11} + 2\beta_{11} + \alpha_{12} \beta_{12}) b_i \rho^{i+1}}{(i+2)^2 - \gamma^2} \right] \quad (1.3.13)$$

$$\bar{T}_{\theta 2} = \frac{m}{l} \left[ \beta_1 \cdot \gamma (\beta_{11} \gamma + \alpha_{12} \beta_{12}) \rho^{\gamma-1} - \frac{l^2}{\beta} \sum_{i=1}^n \frac{(i \cdot \alpha_{12} \beta_{12} + 2\alpha_{12} \beta_{12} + \beta_{11} \gamma^2) b_i \rho^{i+1}}{(i+2)^2 - \gamma^2} \right] \quad (1.3.14)$$

Здесь  $B_1$  – постоянная интегрирования, определяемая из условия края слоя ( $\rho = 1$ ).

**3.** Рассмотрим задачи изгиба слоев пластинки. Эти задачи будем решать в рамках уточненной теории [110]. В основе этой теории лежит допущение о линейном

распределении тангенциальных перемещений по толщине пластинки. В осесимметричном случае это допущение для однослойной пластинки имеет вид:

$$u_r = u + z\varphi; u_z = w \quad (1.3.15)$$

функция  $\varphi$  – угол поворота нормального элемента пластинки в плоскости  $rOz$ . В классической теории пластин, состоящих из слоев постоянной толщины, гипотеза о недеформируемых нормалях принимается для всего пакета в целом, поскольку элемент, нормальный к срединной плоскости любого слоя, одновременно нормален к срединным поверхностям всех слоев как до, так и после их деформирования. В случае же учета поперечных сдвигов нормальный элемент после деформирования пластинки перестает быть нормальным к срединной поверхности и составляет с ней некоторый угол. И поскольку величина этого угла зависит еще и от сдвиговых свойств материала, а материалы разных слоев обладают различными сдвиговыми свойствами, то в сдвиговой теории первого порядка обязательно нужно для изменения тангенциальных перемещений по толщине разных слоев пластинки принимать различные линейные законы аппроксимации. По этой причине в рассматриваемом случае допущение (1.3.15) будем принимать не для всей пластинки в целом, а для каждого слоя в отдельности.

Рассмотрим задачи изгиба слоев пластинки.

а) Задача изгиба верхнего слоя.

Поскольку

$$\bar{Z}_2 = \bar{q} - a_0 - \sum_{i=1}^n a_i \cdot \rho^i; \bar{R}_1 = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n b_i \cdot \rho^i \quad (1.3.16)$$

То уравнения задачи изгиба этого слоя примут вид:

$$\frac{d\bar{N}_{r1}}{d\rho} + \frac{\bar{N}_{r1}}{\rho} = -l\bar{q} + la_0 + l \sum_{i=1}^n a_i \cdot \rho^i \quad (1.3.17)$$

$$\frac{d\bar{M}_{r1}}{d\rho} + \frac{\bar{M}_{r1} - \bar{M}_{\theta1}}{\rho} = l\bar{N}_{r1} + \frac{l}{2} \sum_{i=1}^n b_i \cdot \rho^i \quad (1.3.18)$$

Решение уравнения (1.3.17), ограниченное в центре пластинки  $\rho = 0$ , будет:

$$\bar{N}_{r1} = -\frac{\bar{q}l}{2} \rho + \frac{la_0\rho}{2} + l \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{i+2} \rho^{i+1}$$

Для компактности записи целесообразно член  $l a_0 \rho / 2$  ввести под знак суммы, начиная суммирование от  $i = 0$ . Таким образом,

$$\bar{N}_{r1} = -\frac{\bar{q}l}{2} \rho + l \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{i+2} \rho^{i+1} \quad (1.3.19)$$

Аналогично поступим и в формулах других расчетных величин.

С учетом (1.3.16) в рамках [116] имеем:

$$\bar{N}_{r1} = \frac{5}{6\chi} \left( \varphi_1 + \frac{1}{l} \frac{d\bar{w}_1}{d\rho} \right) - \frac{1}{12} \sum_{i=1}^n b_i \cdot \rho^i \quad (1.3.20)$$

Из (1.3.20) с учетом (1.3.19) для  $\varphi_1$  получим:

$$\varphi_1 = -\frac{1}{l} \frac{d\bar{w}_1}{d\rho} + \frac{\chi}{10} \left( \sum_{i=1}^n b_i \cdot \rho^i + 12l \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{i+2} \rho^{i+1} - 6\bar{q}l\rho \right) \quad (1.3.21)$$

Изгибающие моменты по теории [119] имеют безразмерные выражения:

$$\bar{M}_{r1} = \frac{1}{12l} \left( \frac{d\varphi_1}{d\rho} + \alpha_{12} \frac{\varphi_1}{\rho} \right), \quad \bar{M}_{\theta 1} = \frac{1}{12l} \left( \alpha_{12} \frac{d\varphi_1}{d\rho} + k^2 \frac{\varphi_1}{\rho} \right) \quad (1.3.22)$$

Учитывая (1.3.19), (1.3.20) и (1.3.22), уравнение (1.3.18) можно привести к виду:

$$\begin{aligned} \rho^2 \frac{d^3 \bar{w}_1}{d\rho^3} + \rho \frac{d^2 \bar{w}_1}{d\rho^2} - k^2 \frac{d^2 \bar{w}_1}{d\rho} &= \frac{3\bar{q}l^2 \rho}{5} [10l^2 \rho^2 - \chi(1-k^2)] - \\ &- \frac{6l^2}{5} \sum_{i=0}^n [10l^2 \rho^2 - \chi(i^2 + 2i + 1 - k^2)] \frac{a_i \cdot \rho^{i+1}}{i+2} - \\ &- \frac{l}{10} \sum_{i=1}^n [60l^2 \rho^2 - \chi(i^2 - k^2)] b_i \cdot \rho^i \end{aligned} \quad (1.3.23)$$

Общее решение (1.3.23), ограниченное в центре пластинки  $\rho = 0$ , имеет вид:

$$\begin{aligned} \bar{w}_1 = C_2 + C_3 \rho^{1+k} + \frac{3\bar{q}l^2 \rho^2}{10} \cdot \frac{5l^2 \rho^2 - \chi(9-k^2)}{9-k^2} - \\ - \frac{6l^2}{5} \sum_{i=0}^n \frac{a_i \cdot \rho^{i+2}}{i+2} \left\{ \frac{10l^2 \rho^2}{(i+4)[(i+3)^2 - k^2]} - \frac{\chi}{i+2} \right\} - \frac{l}{10} \sum_{i=1}^n b_i \times \\ \times \rho^{i+1} \left\{ \frac{60l^2 \rho^2}{(i+3)[(i+2)^2 - k^2]} - \frac{\chi}{i+1} \right\}. \end{aligned} \quad (1.3.24)$$

Здесь  $C_2$  и  $C_3$  постоянные интегрирования.

Подставляя (1.3.24) в (1.3.22), для изгибающих моментов получим:

$$\begin{aligned} \bar{M}_{r1} = & -\frac{C_3(1+k)(k+\alpha_{12})}{12l^2} \cdot \rho^{k-1} - \frac{\bar{q}l^2\rho^2(3+\alpha_{12})}{2(9-k^2)} + \\ & + l^2 \sum_{i=0}^n \frac{a_i \cdot \rho^{i+2} \cdot (i+3+\alpha_{12})}{(i+2)[(i+3)^2-k^2]} + \frac{l}{2} \sum_{i=1}^n b_i \cdot \rho^{i+1} \cdot \frac{i+2+\alpha_{12}}{(i+2)^2-k^2} \end{aligned} \quad (1.3.25)$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_{\theta 1} = & -\frac{C_3 k(1+k)(k+\alpha_{12})}{12l^2} \cdot \rho^{k-1} - \frac{\bar{q}l^2\rho^2(3\alpha_{12}+k^2)}{2(9-k^2)} + \\ & + l^2 \sum_{i=0}^n a_i \cdot \rho^{i+2} \cdot \frac{i \cdot \alpha_{12} + 3\alpha_{12} + k^2}{(i+2)[(i+3)^2-k^2]} + \frac{l}{2} \sum_{i=1}^n b_i \cdot \rho^{i+1} \cdot \frac{i \cdot \alpha_{12} + 2\alpha_{12} + k^2}{(i+2)^2-k^2} \end{aligned} \quad (1.3.26)$$

С учетом (1.3.24) из (1.3.21) следует:

$$\varphi_1 = -\frac{C_3}{l}(1+k)\rho^k - \frac{6\bar{q}l^3\rho^3}{9-k^2} + 12l^3 \sum_{i=0}^n \frac{a_i \cdot \rho^{i+3}}{(i+2)[(i+3)^2-k^2]} + 6l^2 \sum_{i=1}^n \frac{b_i \cdot \rho^{i+2}}{(i+2)^2-k^2} \quad (1.3.27)$$

б) Задача изгиба нижнего слоя.

Для этого слоя имеем:

$$\bar{Z}_2 = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \cdot \rho^i, \quad \bar{R}_1 = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n b_i \cdot \rho^i \quad (1.3.28)$$

Поступая аналогично, для решения задачи изгиба нижнего слоя с учетом (1.3.28) получим:

$$\begin{aligned} \bar{N}_{r2} = & -l \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{i+2} \rho^{i+1} \quad (1.3.29) \\ \bar{w}_2 = & B_2 + B_3 \rho^{1+\gamma} + \frac{6l^2}{5m} \sum_{i=0}^n \frac{a_i \cdot \rho^{i+2}}{i+2} \left\{ \frac{10l^2\rho^2}{(i+4)[(i+3)^2-\gamma^2] \beta m} - \frac{\chi}{\beta_{55}(i+2)} \right\} - \\ & - \frac{l}{10} \sum_{i=1}^n b_i \cdot \rho^{i+1} \left\{ \frac{60l^2\rho^2}{(i+3)[(i+2)^2-\gamma^2] \beta m} - \frac{\chi}{\beta_{55}(i+1)} \right\} \quad (1.3.30) \\ \bar{M}_{r2} = & -\frac{B_3 m^3}{12l^2} (1+\gamma)(\gamma\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12}) \rho^{\gamma-1} - \frac{ml^2}{\beta} \sum_{i=0}^n a_i \cdot \rho^{i+2} \cdot \frac{i\beta_{11} + 3\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12}}{(i+2)[(i+3)^2-\gamma^2]} + \end{aligned}$$

$$+\frac{m^2 l}{2\beta} \sum_{i=1}^n b_i \cdot \rho^{i+1} \frac{i\beta_{11} + 2\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12}}{(i+2)^2 - \gamma^2} \quad (1.3.31)$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_{\theta 2} = & -\frac{B_3 m^3}{12l^2} \gamma(1+\gamma)(\alpha_{12}\beta_{12} + \gamma\beta_{11})\rho^{\gamma-1} - \frac{ml^2}{\beta} \sum_{i=0}^n a_i \cdot \rho^{i+2} \frac{i \cdot \alpha_{12}\beta_{12} + 3\alpha_{12}\beta_{12} + \beta_{11}\gamma^2}{(i+2)[(i+3)^2 - \gamma^2]} + \\ & + \frac{m^2 l}{2\beta} \sum_{i=1}^n b_i \cdot \rho^{i+1} \cdot \frac{i \cdot \alpha_{12}\beta_{12} + 2\alpha_{12}\beta_{12} + \beta_{11}\gamma^2}{(i+2)^2 - \gamma^2} \end{aligned} \quad (1.3.32)$$

$$\varphi_2 = -\frac{B_3}{l}(1+\gamma)\rho^\gamma - \frac{12l^3}{\beta m^2} \sum_{i=0}^n \frac{a_i \cdot \rho^{i+3}}{(i+2)[(i+3)^2 - \gamma^2]} + \frac{6l^2}{\beta m} \sum_{i=1}^n \frac{b_i \cdot \rho^{i+2}}{(i+2)^2 - \gamma^2}. \quad (1.3.33)$$

Здесь  $B_2$  и  $B_3$  – постоянные интегрирования.

4. Рассмотрим случай, когда нижний слой по всему контуру  $z = H/2$ ,  $r = a$  оперт на подвижных шарнирных опорах. Верхний же слой по всей лицевой поверхности соединен с нижним слоем. Краевые условия имеют вид:

для верхнего слоя –

$$\bar{T}_{r1}|_{\rho=1} = \bar{w}_1|_{\rho=1} = \bar{M}_{r1}|_{\rho=1} = 0 \quad (1.3.34)$$

для нижнего слоя –

$$\bar{T}_{r2}|_{\rho=1} = \bar{w}_2|_{\rho=1} = \bar{M}_{r2}|_{\rho=1} = 0 \quad (1.3.35)$$

Удовлетворив этим условиям и подставив найденные значения постоянных интегрирования в соответствующие формулы, в рамках теории [110] находим:

$$\bar{u}_1 = l^2 \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{(i+2)^2 - k^2} \left( \rho^{i+2} - \frac{i+2+\alpha_{12}}{k+\alpha_{12}} \rho^k \right) \quad (1.3.36)$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 = & \frac{6\bar{q}l^3}{(k+\alpha_{12})(9-k^2)} [(3+\alpha_{12})\rho^k - (k+\alpha_{12})\rho^3] + \\ & + 12l^3 \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{(i+2)[(i+3)^2 - k^2]} \left( \rho^{i+3} - \frac{i+3+\alpha_{12}}{k+\alpha_{12}} \rho^k \right) + \\ & + 6l^2 \sum_{i=0}^n \frac{b_i}{(i+2)^2 - k^2} \left( \rho^{i+2} - \frac{i+2+\alpha_{12}}{k+\alpha_{12}} \rho^k \right); \end{aligned} \quad (1.3.37)$$

$$\begin{aligned}
\bar{w}_1 = & 3\bar{q}l^2 \left[ \frac{2(3 + \alpha_{12})l^2}{(1+k)(k + \alpha_{12})(9 - k^2)} (1 - \rho^{1+k}) - \frac{l^2(1 - \rho^4)}{2(9 - k^2)} + \frac{\chi(1 - \rho^2)}{10} \right] \\
& + \frac{6l^2}{5} \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{i+2} \times \\
& \times \left\{ \frac{10l^2(1 - \rho^{i+4})}{(i+4)[(i+3)^2 - k^2]} - \frac{\chi}{i+2} (1 - \rho^{i+2}) - \frac{10l^2(i+3 + \alpha_{12})}{(1+k)(k + \alpha_{12})[(i+3)^2 - k^2]} (1 - \rho^{1+k}) \right\} + \\
& + \frac{l}{10} \sum_{i=1}^n b_i \left\{ \frac{60l^2(1 - \rho^{i+3})}{(i+3)[(i+2)^2 - k^2]} - \frac{60l^2(i+2 + \alpha_{12})(1 - \rho^{i+k})}{(1+k)(k + \alpha_{12})[(i+2)^2 - k^2]} - \frac{\chi(1 - \rho^{i+1})}{i+1} \right\} \tag{1.3.38}
\end{aligned}$$

$$\bar{u}_2 = \frac{l^2}{\beta} \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{(i+2)^2 - \gamma^2} \left( \frac{i\beta_{11} + 2\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12}}{\gamma\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12}} \rho^\gamma - \rho^{i+2} \right) \tag{1.3.39}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_2 = & \frac{12l^3}{\beta m^2} \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{(i+2)[(i+3)^2 - \gamma^2]} \left( \frac{i\beta_{11} + 3\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12}}{\gamma\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12}} \rho^\gamma - \rho^{i+3} \right) - \\
& - \frac{6l^2}{\beta m} \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{(i+2)^2 - \gamma^2} \left( \frac{i\beta_{11} + 2\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12}}{\gamma\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12}} \rho^\gamma - \rho^{i+2} \right) \tag{1.3.40}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{w}_2 = & -\frac{6l^2}{5m} \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{i+2} \left\{ \frac{10l^2(1 - \rho^{i+4})}{\beta m(i+4)[(i+3)^2 - \gamma^2]} - \frac{\chi(1 - \rho^{i+2})}{\beta_{55}(i+2)} - \right. \\
& \left. - \frac{10l^2(i\beta_{11} + 3\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12})}{\beta m(1 + \gamma)(\beta_{11}\gamma + \alpha_{12}\beta_{12})[(i+3)^2 - \gamma^2]} (1 - \rho^{1+\gamma}) \right\} + \\
& + \frac{l}{10} \sum_{i=1}^n b_i \left\{ \frac{60l^2(1 - \rho^{i+3})}{\beta m(i+3)[(i+2)^2 - \gamma^2]} - \frac{\chi(1 - \rho^{i+1})}{\beta_{55}(i+1)} - \right. \\
& \left. - \frac{60l^2(i\beta_{11} + 2\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12})}{\beta m(1 + \gamma)(\gamma\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12})[(i+2)^2 - \gamma^2]} (1 - \rho^{1+\gamma}) \right\} \tag{1.3.41}
\end{aligned}$$



Отметим, что решения при  $k = 3, \gamma = 3$  можно получить путем предельного перехода.

5. Неизвестные коэффициенты  $a_i$  и  $b_i$  определяются из условий полного контакта слоев пластинки, т.е. из условий равенства прогибов и радиальных перемещений точек поверхностей  $z_1 = h/2, z_2 = -H/2$ . В безразмерной форме эти условия имеют вид:

$$\bar{w}_1 = \bar{w}_2; 2\bar{u}_1 + \varphi_1 = 2\bar{u}_2 - m\varphi_2. \quad (1.3.42)$$

Используя (1.3.36)–(1.3.41), условия (1.3.42) в рамках теории [144] можно привести к виду:

$$\begin{aligned} & 12l \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{i+2} \left\{ \frac{10l^2 (1-\rho^{i+4})}{i+4} \left[ \frac{1}{(i+3)^2 - k^2} + \frac{1}{\beta m^2 [(i+3)^2 - \gamma^2]} \right] - \right. \\ & \left. - \frac{\chi(1-\rho^{i+2})}{m\beta_{55}(i+2)} (1+m\beta_{55}) - 10l^2 \left[ \frac{(i+3+\alpha_{12})(1-\rho^{1+k})}{(1+k)(k+\alpha_{12})[(i+3)^2 - k^2]} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{(i\beta_{11} + 3\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12})(1-\rho^{1+\gamma})}{\beta m^2 (1+\gamma)(\gamma\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12})[(i+3)^2 - \gamma^2]} \right] \right\} + \sum_{i=1}^n b_i \left\{ \frac{60l^2 (1-\rho^{i+3})}{i+3} \times \right. \\ & \left. \times \left[ \frac{1}{(i+2)^2 - k^2} - \frac{1}{\beta m [(i+2)^2 - \gamma^2]} \right] - \frac{\chi(1-\rho^{i+1})}{\beta_{55}(i+1)} (\beta_{55} - 1) - \right. \\ & \left. - 60l^2 \left[ \frac{(i+2+\alpha_{12})(1-\rho^{1+k})}{(1+k)(k+\alpha_{12})[(i+2)^2 - k^2]} - \frac{(i\beta_{11} + 2\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12})(1-\rho^{1+\gamma})}{\beta m (1+\gamma)(\gamma\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12})[(i+2)^2 - \gamma^2]} \right] \right\} = \\ & = 30\bar{q}l \left[ \frac{l^2 (1-\rho^4)}{2(9-k^2)} - \frac{2l^2 (3+\alpha_{12})(1-\rho^{1+k})}{(1+k)(k+\alpha_{12})(9-k^2)} - \frac{\chi(1-\rho^2)}{10} \right]; \quad (1.3.43) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 6l \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{i+2} \left[ \frac{1}{(i+3)^2 - k^2} \left( \rho^{i+3} - \frac{i+3+\alpha_{12}}{k+\alpha_{12}} \cdot \rho^k \right) - \frac{1}{\beta m [(i+3)^2 - \gamma^2]} \times \right. \\ & \left. \times \left( \rho^{i+3} - \frac{i\beta_{11} + 3\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12}}{\gamma\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12}} \cdot \rho^\gamma \right) \right] + 4 \sum_{i=1}^n b_i \left\{ \frac{1}{(i+2)^2 - k^2} \times \right. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} & \times \left( \rho^{i+2} - \frac{i+2+\alpha_{12}}{k+\alpha_{12}} \cdot \rho^k \right) + \frac{1}{\beta \left[ (i+2)^2 - \gamma^2 \right]} \left( \rho^{i+2} - \right. \\ & \left. - \frac{i\beta_{11} + 2\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12}}{\gamma\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12}} \rho^\gamma \right) \Bigg\} = \frac{3\bar{q}l}{(k+\alpha_{12})(9-k^2)} \left[ (k+\alpha_{12})\rho^3 - (3+\alpha_{12})\rho^k \right] \quad (1.3.44) \end{aligned}$$

(1.3.43) и (1.3.44) образуют систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $a_i$  и  $b_i$ .

Заметим, что свободный член  $a_0$  представляет собой значение безразмерного контактного напряжения  $\bar{p}$  в центре слоев пластинки  $\rho=0$ . Отделив из систем уравнений члены с индексом  $i=0$  и подставив в этих уравнениях  $\rho=0$ , можно определить значение  $a_0$ . Остальные коэффициенты  $a_i$  и  $b_i$  можно определить решением систем соответствующих алгебраических уравнений при  $i=1, 2, 3, \dots$ . Члены же с найденным коэффициентом  $a_0$  следует перенести в правые части уравнений.

После нахождения значений  $a_i$  и  $b_i$  можно по соответствующим формулам вычислить значения всех расчетных величин.

**6. Пусть:**

$$\begin{aligned} \bar{q} &= 1; \beta_{11} = 2; \beta_{12} = 0,8; \alpha_{12} = 0,2; k = 0,5; \\ \gamma &= 0,5; \beta_{55} = 1 (\beta_{22} = 2); m = 2; \beta = 4; l = 8. \end{aligned}$$

Имея решение при  $\bar{q}=1$ , благодаря физической и геометрической линейности задачи, можно получить решение для каждого конкретного случая, для чего достаточно значения расчетных величин умножить на  $q/B_{11}$ .

В таблице 1.3.1 представлены некоторые значения  $\bar{p}$ ,  $\bar{\tau}$  и  $\bar{w}$ , полученные при  $n=10$  и  $n=12$ , по классической ( $\chi=0$ ) и уточненной теориям.

Нетрудно заметить, что безразмерные значения расчетных величин  $\bar{w}$ ,  $\bar{p}$ ,  $\bar{\tau}$ , при числах членов их выражений  $n=10$  и  $n=12$  практически не отличаются друг от друга, что свидетельствует о сходимости процесса вычислений и о высокой достоверности полученных результатов.

Таблица 1.3.1

$\rho$
--------

			0	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9	0,95	1	
$\chi = 0$ $m = 1$ $l = 5$	$\bar{w}$	$n$	10	116,86	105,55	85,08	59,28	30,26	15,16	7,57	0
			12	116,86	105,55	85,08	59,28	30,26	15,16	7,57	0
	$\bar{p}$	$n$	10	0,629	0,547	0,546	0,546	0,553	0,512	-0,04	-2,209
			12	0,629	0,546	0,545	0,545	0,552	0,576	0,001	-3,809
	$\bar{\tau}$	$n$	10	0	0,364	0,727	1,091	1,454	1,638	1,779	2,091
			12	0	0,364	0,727	1,091	1,455	1,634	1,765	2,158
$\chi = 10$ $m = 1$ $l = 5$	$\bar{w}$	$n$	10	149,98	137,32	112,86	80,43	42,13	21,41	10,77	0
			12	149,98	137,32	112,86	80,43	42,13	21,41	10,77	0
	$\bar{p}$	$n$	10	0,620	0,547	0,537	0,528	0,510	0,498	0,487	0,449
			12	0,620	0,548	0,537	0,528	0,510	0,497	0,489	0,431
	$\bar{\tau}$	$n$	10	0	0,359	0,727	1,096	1,469	1,663	1,777	1,933
			12	0	0,359	0,727	1,096	1,469	1,661	1,774	1,953
$\chi = 0$ $m = 2$ $l = 8$	$\bar{w}$	$n$	10	221,41	200,01	161,26	112,41	57,42	28,78	14,37	0
			12	221,41	200,01	161,26	112,41	57,42	28,77	14,37	0
	$\bar{p}$	$n$	10	0,931	0,789	0,788	0,788	0,795	0,720	0,224	-1,492
			12	0,931	0,788	0,787	0,787	0,786	0,779	0,232	-2,810
	$\bar{\tau}$	$n$	10	0	0,298	0,597	0,895	1,193	1,353	1,591	2,366
			12	0	0,298	0,597	0,895	1,195	1,340	1,549	2,573
$\chi = 10$ $m = 2$ $l = 8$	$\bar{w}$	$n$	10	282,86	258,72	212,43	151,20	79,05	40,10	20,16	0
			12	282,83	258,72	212,43	151,20	79,05	40,10	20,15	0
	$\bar{p}$	$n$	10	0,923	0,799	0,779	0,763	0,729	0,705	0,679	0,537
			12	0,923	0,799	0,779	0,763	0,729	0,702	0,685	0,525
	$\bar{\tau}$	$n$	10	0	0,261	0,579	0,906	1,259	1,473	1,636	1,945
			12	0	0,261	0,579	0,906	1,259	1,475	1,641	1,951

По данным этой таблицы на рисунках (1.3.2-1.3.4) представлены графики ( $\chi = 0$ , пунктирная линия) и уточненных ( $\chi = 10$ , сплошная линия) безразмерных значений прогиба  $\bar{w}$  и контактных напряжений  $\bar{p}$ ,  $\bar{\tau}$  при  $m = 2$ .

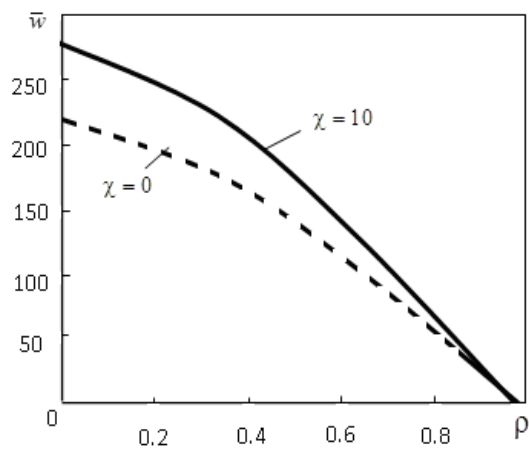


Рис.1.3.2

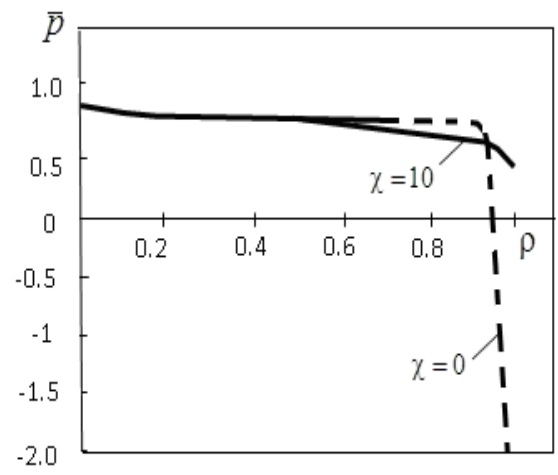


Рис. 1.3.3

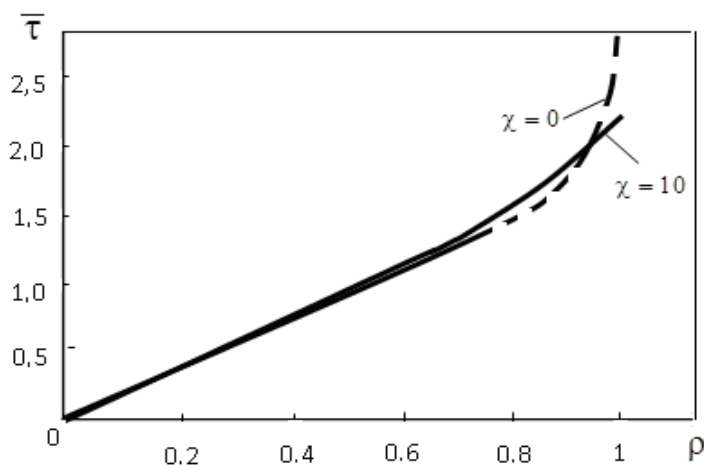


Рис.1.3.4

В таблице 1.3.2 приводятся безразмерные значения нормального контактного напряжения  $\bar{\rho}$  на краю  $\rho = 1$  при некоторых значениях числа членов разложений  $n$ , соответствующие классической теории пластин.

Таблица 1.3.2

	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$	$n = 10$	$n = 12$
$m = 1, l = 5$	-0,061	-0,213	-0,701	-1,026	-2,209	-3,809
$m = 2, l = 8$	0,353	0,156	-0,113	-0,517	-1,492	-2,810

Данные таблиц и графики приводят к следующим заключениям:

1. Как и следовало ожидать, в рамках классической теории ( $\chi = 0$ ) с приближением к краю слоев пластинки сходимость разложений (1.3.3) ухудшается. В случае, когда слои пластинки изготовлены из различных ортотропных материалов, с увеличением числа членов  $n$  нормальное контактное напряжение  $\bar{\rho}$  вблизи края  $\rho = 1$  становится отрицательным и увеличивается по модулю. Отрицательность нормального напряжения означает, что вблизи контура  $\rho = 1$  слои пластинки стремятся отрываться друг от друга. Увеличение же модуля этого напряжения означает, что на контуре  $\rho = 1$  имеется концентрация напряжения  $\bar{\rho}$ . Эти аномалии являются следствием того, что классическая теория пластинок не учитывает эффекты ни плоского и ни антиплоского погранслоя.

2. При учете влияния деформации поперечного сдвига ( $\chi=10$ ), отмеченные аномалии исчезают. Это объясняется тем, что учетом поперечного сдвига фактически учитывается эффект антиплоского погранслоя.

Числовые результаты представим для случая жесткого закрепления краевых ( $\rho=1$ ) сечений слоев пластинки. Краевые условия в этом случае имеют вид

$$\bar{w}_1 = \bar{w}_2 = 0, \bar{u}_1 = \bar{u}_2 = 0, \bar{\varphi}_1 = \bar{\varphi}_2 = 0.$$

В табл. 1.3.3 приведены безразмерные значения прогиба  $\bar{w}$  и контактных напряжений  $\bar{p}$ ,  $\bar{\tau}$  для различных значений механических и геометрических параметров  $\chi$ ,  $m$ ,  $l$ .

На рис. 1.3.5-1.3.7 показаны графики изменения  $\bar{w}$ ,  $\bar{p}$  и  $\bar{\tau}$  в рамках классической теории пластин ( $\chi=0$ ) и при учете влияния поперечного сдвига ( $\chi=5$ ).

Таблица 1.3.3

$\chi$ , $m, l$	$\bar{w}$ , $\bar{p}, \bar{\tau}$	$n$	$\rho$							
			0	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9	0,95	1
0,2, 8	$\bar{w}$	8	75,067	71,007	57,673	35,736	11,972	3,338	0,826	0
		10	75,326	71,122	57,776	35,816	12,020	3,396	0,858	0
	$\bar{p}$	8	0,941	0,913	1,151	1,414	1,997	0,682	-1,640	-3,343
		10	0,941	0,925	1,312	1,504	1,683	1,687	-2,574	-13,68
	$\bar{\tau}$	8	0	3,042	1,085	-0,764	-2,570	-3,97	-2,382	5,435
		10	0	2,856	1,079	-0,696	-2,376	-4,15	-3,329	9,191
5,2, 8	$\bar{w}$	8	108,29	104,96	88,417	59,387	24,972	9,986	3,991	0
		10	108,51	104,95	88,424	59,396	24,971	10,04	4,099	0
	$\bar{p}$	8	0,913	0,718	1,139	1,172	0,755	-0,01	-0,068	1,446
		10	0,913	0,735	1,154	1,186	0,767	0,014	-0,284	1,767
	$\bar{\tau}$	8	0	2,012	0,736	-0,616	-1,488	-1,32	-0,911	-0,299
		10	0	1,982	0,730	-0,615	-1,472	-1,35	-0,95	-0,30

Данные табл. (1.3.3) и рис. (1.3.5-1.3.7) приводят к заключениям: 1) учет поперечного сдвига и в случае закрепления приводит к увеличению прогиба пластинки; 2) в отличие от классической теории, при учете поперечного сдвига с приближением к заземленному краю пластинки контактные напряжения вместо резкого возрастания изменяются умеренно, причем нормальное напряжение  $\bar{p}$  мало изменяется, а касательное напряжение  $\bar{\tau}$  – заметно уменьшается.

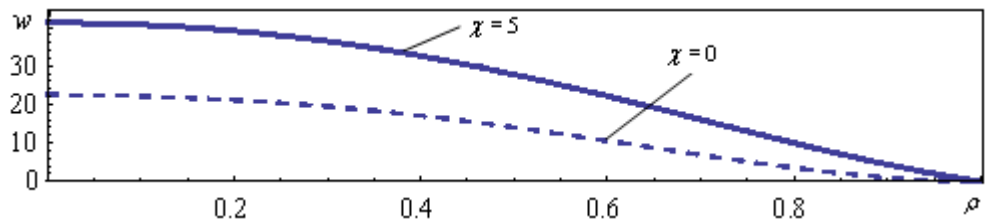


Рис. 1.3.5

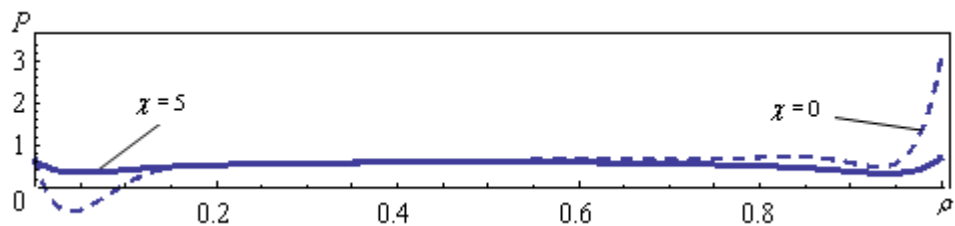


Рис. 1.3.6

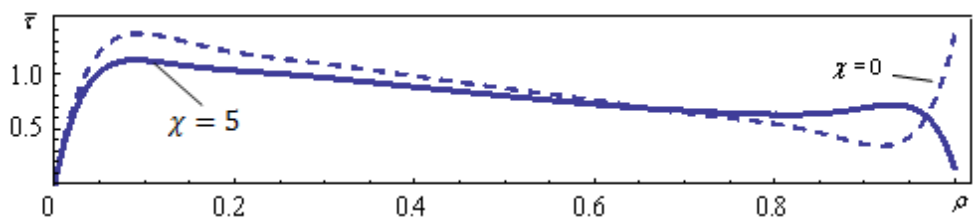


Рис. 1.3.7

### Заключение.

Обобщение поправочных коэффициентов уточненной теории пластин при наличии касательных поверхностных нагрузок значительно приближает результаты двумерной теории пластин к соответствующим результатам трехмерной теории упругости. Это

наглядно иллюстрируется, например; уточнением характера изменения касательных контактных напряжений вблизи края рассмотренной составной круглой пластинки.

7. В работах [109] и [116] показано, что в случае действия **только касательной поверхностной нагрузки**, когда **поперечное усилие отсутствует**, в рамках теории [60] деформация поперечного сдвига поправки не дает, а теория [119] приводит к ощутимой поправке.

Например, поправка к максимальному значению прогиба шарнирно опертой по контуру пластинки составляет [119]:

$$\Delta = \frac{3}{5} \cdot \frac{(2B_{11} + B_{12})B_{11}h^2}{(5B_{11} + B_{12})B_{55}a^2}$$

При  $B_{12} = 0.2B_{11}$ ,  $B_{11} = 20B_{55}$ ,  $h = 0.2a$ , что вполне разумно [29], величина этой поправки равна 0,204 или 20%. В случае же защемления контура пластинки поправка к значению максимального прогиба составляет [119]

$$\Delta = \frac{3}{5} \cdot \frac{B_{11}h^2}{B_{55}a^2}$$

При  $B_{11} = 10B_{55}$ ,  $h = 0.2a$  величина этой поправки равна 0,24, или 24%.

Разумеется, результаты теорий [60] и [119] будут значительно отличаться друг от друга еще и в тех случаях, когда внешняя нагрузка произвольная, но ее касательная составляющая является доминирующей, а нормальная – ничтожной.

**Второй подход.** Теперь снова рассмотрим ту же задачу, однако, в отличие от предыдущего случая, при решении принимается гипотеза об одном линейном распределении тангенциального перемещения для пакета в целом. Подход решения задачи остается те же, слои пластинки мысленно разделяются друг от друга и их взаимодействие представляется касательными и нормальными контактными напряжениями. Неизвестные коэффициенты, входящие в выражениях этих напряжений, определяются из условий полного контакта слоев пластинки.

Отметим, что решение плоских задач, для верхнего и нижнего слоев пластинки в рассматриваемом случае не изменяются и сохраняют вид (1.3.8)-(1.3.10) и (1.3.12)-(1.3.14)

Рассмотрим задачу изгиба пластинки.



а) задача изгиба верхнего слоя.

В рамках уточненной теории [110] примем допущение о едином линейном распределении тангенциальных перемещений по толщине для всей пластинки в целом:

$$u_r = u + z\varphi; u_z = w \quad (1.3.45)$$

Здесь  $\varphi$  - угол поворота нормального элемента пластинки в плоскости  $rOz$ .

Для верхнего слоя с учетом (1.3.16) -(1.3.20), получим формула для  $\varphi$ , аналогичная формуле (1.3.21)

$$\varphi = -\frac{1}{l} \frac{d\bar{w}_1}{d\rho} - \frac{3\chi ql\rho}{5(1+m\beta_{55})} + \frac{\chi(1+m)}{10(1+m\beta_{55})} \sum_{i=1}^n b_i \cdot \rho^i \quad (1.3.46)$$

Безразмерные выражения для изгибающих моментов по теории [110] с учетом (1.3.46) примут вид:

$$\bar{M}_{r1} = -\frac{1}{12l^2} \left[ \frac{d^2\bar{w}_1}{d\rho^2} + \frac{\alpha_{12}}{\rho} \cdot \frac{d\bar{w}_1}{d\rho} + \frac{3\chi\bar{q}l^2(1+\alpha_{12})}{5(1+m\beta_{55})} - \frac{\chi(1+m)l}{10(1+m\beta_{55})} \sum_{i=1}^n b_i \cdot (i+\alpha_{12})\rho^{i-1} \right], \quad (1.3.47)$$

$$\bar{M}_{\theta 1} = -\frac{1}{12l^2} \left[ \alpha_{12} \frac{d^2\bar{w}_1}{d\rho^2} + \frac{k^2}{\rho} \cdot \frac{d\bar{w}_1}{d\rho} + \frac{3\chi\bar{q}l^2(\alpha_{12}+k^2)}{5(1+m\beta_{55})} - \frac{\chi(1+m)l}{10(1+m\beta_{55})} \sum_{i=1}^n b_i \cdot (i \cdot \alpha_{12} + k^2)\rho^{i-1} \right] \quad (1.3.48)$$

Подставляя эти выражения в (1.3.18) получим:

$$\begin{aligned} \rho^2 \frac{d^3\bar{w}_1}{d\rho^3} + \rho \frac{d^2\bar{w}_1}{d\rho^2} - k^2 \frac{d\bar{w}_1}{d\rho} = 6\bar{q}l^4 \rho^3 - 12l^4 \sum_{i=0}^n \frac{a_i \cdot \rho^{i+3}}{i+2} - 6l^3 \sum_{i=1}^n b_i \cdot \rho^{i+2} - \\ - \frac{3\chi\bar{q}l^2(1-k^2)}{5(1+m\beta_{55})} \rho + \frac{\chi(1+m)l}{10(1+m\beta_{55})} \sum_{i=1}^n b_i (i^2 - k^2) \rho^i \end{aligned} \quad (1.3.49)$$

Общий интеграл уравнения (1.3.49), с ограниченной производной в центре пластинки  $\rho = 0$ , имеет вид:

$$\begin{aligned} \bar{w}_1 = C_2 + C_3 \rho^{1+k} + \frac{3\bar{q}l^4 \rho^4}{2(9-k^2)} - 12l^4 \sum_{i=0}^n \frac{a_i \cdot \rho^{i+4}}{(i+2)(i+4)((i+3)^2 - k^2)} - \\ - 6l^3 \sum_{i=1}^n \frac{b_i \cdot \rho^{i+3}}{(i+3)((i+2)^2 - k^2)} - \frac{3\chi\bar{q}l^2 \rho^2}{10(1+m\beta_{55})} + \frac{\chi(1+m)l}{10(1+m\beta_{55})} \sum_{i=1}^n \frac{b_i \cdot \rho^{i+1}}{(i+1)} \end{aligned} \quad (1.3.50)$$

Здесь  $C_2$  и  $C_3$  постоянные интегрирования.

С учетом (1.3.50) из (1.3.47) -(1.3.48) можно получить соответствующие выражения для изгибающих моментов, выраженных через  $a_i$  и  $b_i$ .

б) Задача изгиба нижнего слоя.

Учитывая, что для этого слоя

$$\bar{Z}_2 = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \cdot \rho^i, \bar{R}_1 = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n b_i \cdot \rho^i, \quad (1.3.51)$$

и имея в виду, что  $\varphi$  определяется по формуле (1.3.46) для  $\bar{N}_{r_2}$ ,  $\bar{M}_{r_2}$  и  $\bar{M}_{\theta_2}$  получим

$$\bar{N}_{r_2} = -l \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{i+2} \rho^{i+1}, \quad (1.3.52)$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_{r_2} = & \frac{-m^3}{12l^2} \left[ \beta_{11} \frac{d^2 \bar{w}_2}{d\rho^2} + \frac{\alpha_{12} \beta_{12}}{\rho} \frac{d\bar{w}_2}{d\rho} + \frac{3\chi \bar{q} l^2 (\beta_{11} + \alpha_{12} \beta_{12})}{5(1+m\beta_{55})} \right] + \\ & + \frac{m^3}{12l^2} \cdot \frac{\chi(1+m)l}{10(1+m\beta_{55})} \sum_{i=1}^n b_i \cdot (i \cdot \beta_{11} + \alpha_{12} \beta_{12}) \rho^{i-1}, \end{aligned} \quad (1.3.53)$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_{\theta_2} = & \frac{-m^3}{12l^2} \left[ \alpha_{12} \beta_{12} \frac{d^2 \bar{w}_2}{d\rho^2} + \frac{\beta_{11} \gamma^2}{\rho^2} \frac{d\bar{w}_2}{d\rho} + \frac{3\chi \bar{q} l^2 (\alpha_{12} \beta_{12} + \beta_{11} \gamma^2)}{5(1+m\beta_{55})} \right] + \\ & + \frac{m^3}{12l^2} \frac{\chi(1+m)l}{10(1+m\beta_{55})} \sum_{i=1}^n b_i \cdot (i \cdot \alpha_{12} \beta_{12} + \beta_{11} \gamma^2) \rho^{i-1}, \end{aligned} \quad (1.3.54)$$

Поступая аналогично, для решения задачи изгиба нижнего слоя с учетом (1.3.51) из уравнение (1.3.48) получим

$$\begin{aligned} \rho^2 \frac{d^3 \bar{w}_2}{d\rho^3} + \rho \frac{d^2 \bar{w}_1}{d\rho^2} - \gamma^2 \frac{d\bar{w}_1}{d\rho} = & -\frac{3\chi \bar{q} l^2 (1-\gamma^2)}{5(1+m\beta_{55})} \rho + \frac{\chi(1+m)l}{10(1+m\beta_{55})} \sum_{i=1}^n b_i (i^2 - \gamma^2) \rho^i \\ & + \frac{12l^4}{\beta m^2} \sum_{i=0}^n \frac{a_i \cdot \rho^{i+3}}{i+2} - \frac{6l^3}{\beta m} \sum_{i=1}^n b_i \cdot \rho^{i+2} \end{aligned} \quad (1.3.55)$$

Общее решение этого уравнения, ограниченное в центре пластинки  $\rho = 0$ , имеет вид:

$$\begin{aligned} \bar{w}_2 = & B_2 + B_3 \rho^{1+\gamma} - \frac{3\chi \bar{q} l^2 \rho^2}{10(1+m\beta_{55})} + \frac{\chi(1+m)l}{10(1+m\beta_{55})} \sum_{i=1}^n \frac{b_i \cdot \rho^{i+1}}{(i+1)} + \\ & + \frac{12l^4}{\beta m^2} \sum_{i=0}^n \frac{a_i \cdot \rho^{i+4}}{(i+2)(i+4)((i+3)^2 - \gamma^2)} - \frac{6l^3}{\beta m} \sum_{i=1}^n \frac{b_i \cdot \rho^{i+3}}{(i+3)((i+2)^2 - \gamma^2)} \end{aligned} \quad (1.3.56)$$

Здесь  $B_2$  и  $B_3$  постоянные интегрирования.

С учетом (1.3.56) выражения (1.3.53) и (1.3.54) представляются через неизвестные коэффициенты  $a_i$  и  $b_i$ .

Рассмотрим случай, когда нижний слой по всему контуру  $z = \frac{H}{2}$ ,  $r = a$  оперт на подвижных шарнирных опорах. Верхний же слой повсей лицевой поверхности соединен с нижним слоем.

Краевые условия для верхнего слоя определяются формулам (1.3.34), а для нижнего слоя (1.3.35).

Удовлетворив этим условиям и подставив найденные значения постоянных интегрирования в соответствующие формулы, имеем:

$$\bar{u}_1 = l^2 \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{(i+2)^2 - k^2} \left( \rho^{i+2} - \frac{i+2+\alpha_{12}}{k+\alpha_{12}} \rho^k \right), \quad (1.3.57)$$

$$\bar{u}_2 = \frac{l^2}{\beta} \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{(i+2)^2 - \gamma^2} \left( \frac{i\beta_{11} + 2\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12}}{\gamma\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12}} \rho^\gamma - \rho^{i+2} \right), \quad (1.3.58)$$

$$\begin{aligned} \bar{w}_1 = & \frac{3\bar{q}l^2\chi(1-\rho^2)}{10(1+m\beta_{55})} + \frac{6\bar{q}l^4(3+\alpha_{12})(1-\rho^{1+k})}{(1+k)(k+\alpha_{12})(9-k^2)} - \frac{3\bar{q}l^4(1-\rho^4)}{2(9-k^2)} \\ & - 12l^4 \sum_{i=0}^n \frac{a_i \cdot \rho^{i+4}}{(i+2)((i+3)^2 - k^2)} \left[ \frac{i+3+\alpha_{12}}{(1+k)(k+\alpha_{12})} (1-\rho^{1+k}) - \frac{1-\rho^{i+4}}{i+4} \right] \\ & - \sum_{i=1}^n b_i \left[ \frac{6l^3}{((i+2)^2 - k^2)} \left[ \frac{i+2+\alpha_{12}}{(1+k)(k+\alpha_{12})} (1-\rho^{1+k}) - \frac{1-\rho^{i+3}}{i+3} \right] + \frac{\chi(1+m)l}{10(1+m\beta_{55})} \cdot \frac{1-\rho^{i+1}}{i+1} \right] \end{aligned} \quad (1.3.59)$$

$$\begin{aligned} \bar{w}_2 = & \frac{3\bar{q}l^2\chi(1-\rho^2)}{10(1+m\beta_{55})} + \frac{12l^4}{\beta m^2} \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{(i+2)((i+3)^2 - \gamma^2)} \left[ \frac{i\beta_{11} + 2\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12}}{(1+\gamma)(\beta_{11}\gamma + \alpha_{12}\beta_{12})} (1-\rho^{1+\gamma}) - \frac{1-\rho^{i+3}}{i+3} \right] \\ & - \sum_{i=1}^n b_i \left[ \frac{6l^3}{\beta m((i+2)^2 - \gamma^2)} \left[ \frac{i\beta_{11} + 2\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12}}{(1+\gamma)(\beta_{11}\gamma + \alpha_{12}\beta_{12})} (1-\rho^{1+\gamma}) - \frac{1-\rho^{i+3}}{i+3} \right] + \frac{\chi(1+m)l(1-\rho^{i+1})}{10(i+1)(1+m\beta_{55})} \right] \end{aligned} \quad (1.3.60)$$

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{6\bar{q}l^3}{(9-k^2)} \left( \frac{3+\alpha_{12}}{k+\alpha_{12}} \cdot \rho^k - \rho^3 \right) + 12l^3 \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{(i+2)((i+3)^2 - k^2)} \left( \rho^{i+3} - \frac{i+3+\alpha_{12}}{k+\alpha_{12}} \rho^k \right) + \\ & + 6l^2 \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{(i+2)^2 - k^2} \left( \rho^{i+2} - \frac{i+2+\alpha_{12}}{k+\alpha_{12}} \rho^k \right). \end{aligned} \quad (1.3.61)$$

Решение при  $k = 3$ ,  $\gamma = 3$  можно получить путем предельного перехода.

Для определения неизвестных коэффициентов  $a_i$  и  $b_i$  удовлетворим условиям полного контакта слоев пластинки, т.е. приравним прогибы и радиальные

перемещения точек поверхностей  $z_1 = \frac{h}{2}$ ,  $z_2 = \frac{H}{2}$ . Эти условия в безразмерной форме будут:

$$\bar{w}_1 = \bar{w}_2, \quad 2(\bar{u}_1 - \bar{u}_2) + (1+m)\varphi = 0. \quad (1.3.62)$$

С учетом выражений (1.3.57)-(1.3.61) из (1.3.62) для определения неизвестных коэффициентов  $a_i$  и  $b_i$  получим систему линейных алгебраических уравнений.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{(i+2)} \left[ \frac{1}{((i+3)^2 - k^2)} \left[ \frac{i+3+\alpha_{12}}{(1+k)(k+\alpha_{12})} (1-\rho^{1+k}) - \frac{1-\rho^{i+4}}{i+4} \right] + \frac{1}{\beta m^2 ((i+3)^2 - \gamma^2)} \left[ \frac{i\beta_{11} + 3\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12}}{(1+\gamma)(\beta_{11}\gamma + \alpha_{12}\beta_{12})} (1-\rho^{1+\gamma}) - \frac{1-\rho^{i+4}}{i+4} \right] \right] \\ & + \frac{1}{2l} \sum_1^n b_i \left[ \frac{1}{((i+2)^2 - k^2)} \left[ \frac{i+2+\alpha_{12}}{(1+k)(k+\alpha_{12})} (1-\rho^{1+k}) - \frac{1-\rho^{i+3}}{i+3} \right] - \frac{1}{\beta m ((i+2)^2 - \gamma^2)} \left[ \frac{i\beta_{11} + 2\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12}}{(1+\gamma)(\beta_{11}\gamma + \alpha_{12}\beta_{12})} (1-\rho^{1+\gamma}) - \frac{1-\rho^{i+3}}{i+3} \right] \right] \\ & = \frac{\bar{q}(3+\alpha_{12})(1-\rho^{1+k})}{2(1+k)(k+\alpha_{12})(9-k^2)} - \frac{\bar{q}(1-\rho^4)}{8(9-k^2)} - \frac{a_0}{2} \left[ \frac{1}{(9-k^2)} \left[ \frac{3+\alpha_{12}}{(1+k)(k+\alpha_{12})} (1-\rho^{1+k}) - \frac{1-\rho^4}{4} \right] + \frac{1}{\beta m^2 (9-\gamma^2)} \left[ \frac{3\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12}}{(1+\gamma)(\beta_{11}\gamma + \alpha_{12}\beta_{12})} (1-\rho^{1+\gamma}) - \frac{1-\rho^4}{4} \right] \right] \\ & \sum_{i=1}^n \frac{a_i \cdot 6l(1+m)}{(i+2)((i+3)^2 - k^2)} \left( \rho^{i+3} - \frac{i+3+\alpha_{12}}{(k+\alpha_{12})} \rho^k \right) + \sum_1^n b_i \left[ \frac{4+3m}{((i+2)^2 - k^2)} \left[ \rho^{i+2} - \frac{i+2+\alpha_{12}}{(k+\alpha_{12})} \rho^k \right] + \frac{1}{\beta((i+2)^2 - \gamma^2)} \left[ \rho^{i+2} - \frac{i\beta_{11} + 2\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12}}{(\beta_{11}\gamma + \alpha_{12}\beta_{12})} \rho^\gamma \right] \right] \\ & = \frac{3\bar{q}l(1+m)}{(9-k^2)} \left( \rho^3 - \frac{3+\alpha_{12}}{(k+\alpha_{12})} \rho^k \right) - 6l(1+m) \frac{a_0}{2(9-k^2)} \left( \rho^3 - \frac{3+\alpha_{12}}{(k+\alpha_{12})} \rho^k \right), \end{aligned}$$

где

$$a_0 = \frac{\frac{q}{(9-k^2)} \left( \frac{2(3+\alpha_{12})}{(1+k)(k+\alpha_{12})} - \frac{1}{2} \right)}{2 \left( \frac{1}{\beta m^2 (9-\gamma^2)} \left( \frac{3\beta_{11}\alpha_{12}\beta_{12}}{(1+\gamma)(\gamma\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12})} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{(9-k^2)} \left( \frac{3+\alpha_{12}}{(1+k)(k+\alpha_{12})} - \frac{1}{4} \right) \right)} \quad (1.3.63)$$

После решению полученной системы, с помощью найденных значениям  $a_i$  и  $b_i$  можно вычислить значения всех расчетных величин.

В рамках классической теории пластин ( $\chi = 0$ ) элементы, нормальные к срединной плоскости пластинки, после ее изгиба принимают положения, нормальные к срединной поверхности деформированной пластинки. В силу этого при осесимметричном изгибе радиальные перемещения по толщине пластинки изменяются по закону  $u_r = \frac{dw}{dr}$ ,  $\left( \varphi = -\frac{dw}{dr} \right)$ . Этот закон справедлив и для каждого

слоя составной пластинки, т.к. нормали всех слоев в любой точке совпадают. В рамках же уточненной теории, когда учитывается влияние поперечных сдвигов

( $\chi \neq 0$ ), элементы, нормальные к срединной плоскости после изгиба перестают быть нормальными к срединной поверхности пластинки и составляют с ней некоторый угол  $\varphi$ . Значение этого угла обусловлено сдвиговыми свойствами материала. Очевидно, если материалы разных слоев составной пластинки обладают различными сдвиговыми свойствами, то различными будут и значения отмеченных углов. Следовательно, в случае пластинки, состоящей из двух различных ортотропных слоев, имеет место неравенства  $\varphi_1 \neq \varphi_2$ .

На рис. 1.3.8 представлены графики изменения по радиусу безразмерных значений прогибов  $\bar{w}$  и контактных напряжений  $\bar{P}, \bar{\tau}$  двухслойной пластинки со следующими параметрами слоев:

$$m=1, \quad \chi=10, \quad \beta=2, \quad \beta_{11}=2, \quad \beta_{12}=0.8, \quad \beta_{55}=0.5, \\ \beta_{22}=1, \quad \alpha_{12}=0.2, \quad k=0.5, \quad \gamma=0.5, \quad l=5.$$

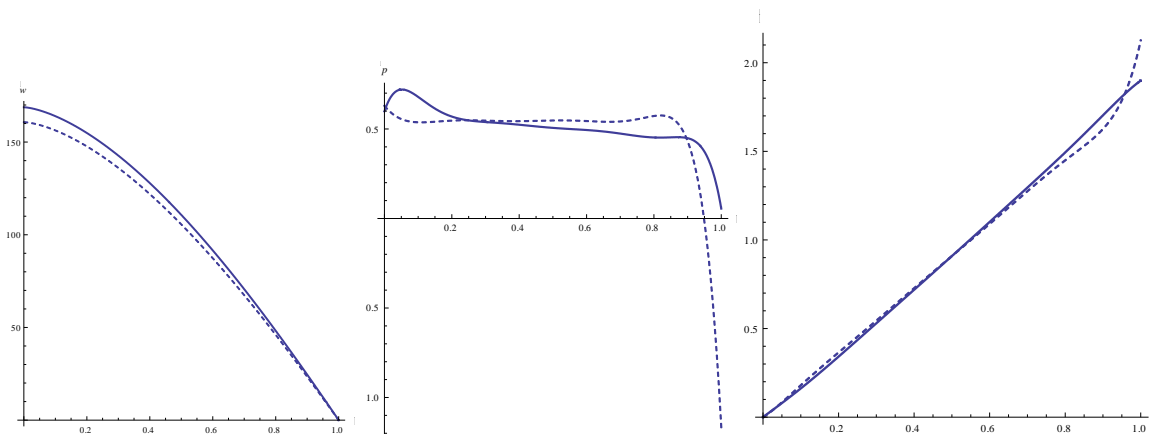


Рис.1.3.8

Сплошными линиями показаны графики, соответствующие постановке  $\varphi_1 \neq \varphi_2$ , а пунктирными- допущению  $\varphi_1 = \varphi_2$ . Из этих графиков видно, что для рассмотренной пластинки прогибы и касательные контактные напряжения в обеих постановках отличаются незначительно, что касается нормальным контактным напряжениям, то они отличаются существенно. Постановка  $\varphi_1 \neq \varphi_2$  приводит только к сжимающему напряжению, значение которого с приближением к краю монотонно убывает и стремится к нулю. При постановке  $\varphi_1 = \varphi_2$  это напряжение вблизи контура становится растягивающим и его значение неограниченно растет. Следовательно, при

учете влияния поперечных сдвигов, как и следовало ожидать, корректнее постановка  $\varphi_1 \neq \varphi_2$ .

**Третий подход.** Задача изгиба решается по двум различным уточненным теориям [60] и [110]. По теории [110] учитывается влияние как поперечных сдвигов так и формы распределения поперечных касательных напряжений по толщине пластинки. По теории [60] поперечные сдвиги учитывается с помощью только перерезывающих сил, и отрицается существование поправочных коэффициентов.

Принимается гипотеза о распределении радиальных перемещений для отдельных слоев в виде различных линейных функций поперечной координаты. Приводится сравнение результатов обеих теорий.

1. Рассмотрим плоскую задачу и задачу изгиба слоев пластинки в отдельности. Отметим, что решение плоской задачи по теории [60] и по теории [110] по форме не отличаются. Следовательно основные формулы (1.3.8)-(1.3.10) и (1.3.12) - (1.3.14) применяются.

Рассмотрим задачи изгиба слоев пластинки. Эти задачи решим по теории [60]

Задача изгиба верхнего слоя по теории [60]

По этой теории имеем:

$$\bar{N}_{r1} = -\frac{\bar{q}l}{2}\rho + l \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{i+2} \rho^{i+1}, \quad \bar{N}_{r1} = \left( \varphi_1 + \frac{1}{l} \frac{d\bar{w}}{d\rho} \right) \frac{1}{\chi}. \quad (1.3.64)$$

Из этих выражений для  $\varphi_1$  находим:

$$\varphi_1 = -\frac{1}{l} \frac{d\bar{w}}{d\rho} - \chi \cdot l \left( \frac{\bar{q}}{2} \rho - \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{i+2} \rho^{i+1} \right). \quad (1.3.65)$$

Выражения изгибающих безразмерных моментов будут

$$\bar{M}_{r1} = \frac{1}{12l} \left( \frac{d\varphi_1}{d\rho} + \alpha_{12} \frac{\varphi_1}{\rho} \right), \quad \bar{M}_{\theta 1} = \frac{1}{12l} \left( \alpha_{12} \frac{d\varphi_1}{d\rho} + k^2 \frac{\varphi_1}{\rho} \right) \quad (1.3.66)$$

С учетом (1.3.65) из (1.3.66) получим

$$\bar{M}_{r1} = -\frac{1}{12l^2} \left( \frac{d^2 \bar{w}_1}{d\rho^2} + \frac{\alpha_{12}}{\rho} \frac{d\bar{w}_1}{d\rho} + \frac{\chi \bar{q} l^2}{2} (1 + \alpha_{12}) - \chi l^2 \sum_{i=0}^n \frac{a_i (i+1 + \alpha_{12})}{i+2} \rho^i \right), \quad (1.3.67)$$

$$\bar{M}_{\theta 1} = -\frac{1}{12l^2} \left( \alpha_{12} \frac{d^2 \bar{w}_1}{d\rho^2} + \frac{k^2}{\rho} \frac{d \bar{w}_1}{d\rho} + \frac{\chi \bar{q} l^2}{2} (\alpha_{12} + k^2) - \chi l^2 \sum_{i=0}^n \frac{a_i (i \cdot \alpha_{12} + \alpha_{12} + k^2)}{i+2} \rho^i \right) \quad (1.3.68)$$

Подставляя эти выражения в уравнение изгиба получим:

$$\begin{aligned} \rho^2 \frac{d^3 \bar{w}_1}{d\rho^3} + \rho \frac{d^2 \bar{w}_1}{d\rho^2} - k^2 \frac{d \bar{w}_1}{d\rho} = 6l^4 \bar{q} \rho^3 - 12l^4 \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{i+2} \rho^{i+3} - \\ - 6l^3 \sum_{i=0}^n b_i \rho^{i+2} + \frac{\chi \bar{q} l^2}{2} (k^2 - 1) \rho + \chi l^2 \sum_{i=0}^n \frac{a_i ((i+1)^2 - k^2)}{i+2} \rho^{i+1} \end{aligned} \quad (1.3.69)$$

Общее решение уравнения (1.3.69) при  $k > 1$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \bar{w}_1 = c_2 + c_3 \rho^{1+k} + \frac{\bar{q} l^2 \rho^2}{4(9-k^2)} (6l^2 \rho^2 - \chi(9-k^2)) - \\ - l^2 \sum_{i=0}^n \frac{a_i \rho^{i+2}}{i+2} \left( \frac{12l^2 \rho^2}{(i+1)((i+3)^2 - k^2)} - \frac{\chi}{i+2} \right) - 6l^3 \sum_{i=0}^n \frac{b_i \rho^{i+3}}{(i+3)((i+2)^2 - k^2)} \end{aligned} \quad (1.3.70)$$

где  $C_2$  и  $C_3$  постоянные интегрирования, а  $C_1 = 0$  из условия ограниченности решения при  $\rho = 0$ . С учетом (1.3.70) из (1.3.67) и (1.3.68) для безразмерных изгибающих моментов получим:

$$\begin{aligned} \bar{M}_{r1} = -\frac{c_3(1+k)(k+\alpha_{12})\rho^{k-1}}{12l^2} - \frac{\bar{q}l^2(3+\alpha_{12})}{2(9-k^2)}\rho^2 + \\ + l^2 \sum_{i=0}^n \frac{a_i(i+3+\alpha_{12})}{(i+2)((i+3)^2 - k^2)} \rho^{i+2} + \frac{l}{2} \sum_{i=0}^n \frac{b_i(i+2+\alpha_{12})}{(i+2)^2 - k^2} \rho^{i+1} \end{aligned} \quad (1.3.71)$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_{\theta 1} = -\frac{c_3 k(1+k)(k+\alpha_{12})\rho^{k-1}}{12l^2} - \frac{\bar{q}l^2(3\alpha_{12}+k^2)}{2(9-k^2)}\rho^2 + \\ + l^2 \sum_{i=0}^n \frac{a_i(i\alpha_{12}+3\alpha_{12}+k^2)}{(i+2)((i+3)^2 - k^2)} \rho^{i+2} + \frac{l}{2} \sum_{i=0}^n \frac{b_i(i\alpha_{12}+2\alpha_{12}+k^2)}{(i+2)^2 - k^2} \rho^{i+1}. \end{aligned} \quad (1.3.72)$$

Из (1.3.71) с учетом (1.3.71) для  $\varphi_1$  имеем:

$$\varphi_1 = -\frac{c_3}{l}(1+k)\rho^k - \frac{6\bar{q}l^3\rho^3}{9-k^2} + 12l^3 \sum_{i=0}^n \frac{a_i \rho^{i+2}}{(i+2)((i+3)^2 - k^2)} + 6l^2 \sum_{i=0}^n \frac{b_i \rho^{i+2}}{(i+2)^2 - k^2}. \quad (1.3.73)$$

Рассмотрим нижний слой. Так как

$$\bar{N}_{r2} = -l \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{(i+2)} \rho^{i+1}, \quad \bar{N}_{r2} = \frac{m\beta_{55}}{\chi} \left( \varphi_2 + \frac{d\bar{w}}{d\rho} \right), \quad (1.3.74)$$

то

$$\varphi_2 = -\frac{1}{l} \frac{d\bar{w}_2}{d\rho} - \frac{\chi l}{m\beta_{55}} \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{(i+2)} \rho^{i+1} \quad (1.3.75)$$

Изгибающие моменты имеют вид:

$$\begin{aligned} \bar{M}_{r2} &= -\frac{m^3}{12l^2} \left[ \beta_{11} \frac{d^2\bar{w}_2}{d\rho^2} + \frac{\alpha_{12}\beta_{12}}{\rho} \frac{d\bar{w}_2}{d\rho} + \frac{\chi l^2}{m\beta_{55}} \sum_{i=0}^n \frac{a_i(\beta_{11} + i\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12})\rho^i}{i+2} \right] \\ \bar{M}_{\theta 2} &= -\frac{m^3}{12l^2} \left[ \alpha_{12}\beta_{12} \frac{d^2\bar{w}_2}{d\rho^2} + \frac{\beta_{11}\gamma^2}{\rho} \frac{d\bar{w}_2}{d\rho} + \frac{\chi l^2}{m\beta_{55}} \sum_{i=0}^n \frac{a_i(\alpha_{12}\beta_{12} \cdot i + \alpha_{12}\beta_{12} + \beta_{11}\gamma^2)\rho^i}{i+2} \right] \end{aligned} \quad (1.3.76)$$

Подставляя выражения (1.3.76) в уравнение равновесия моментов, получим

$$\rho^2 \frac{d^3\bar{w}_2}{d\rho^3} + \rho \frac{d^3\bar{w}_2}{d\rho^2} - \gamma^2 \frac{d^3\bar{w}_2}{d\rho} = \frac{12l^4}{\beta m^2} \sum_{i=0}^n \frac{a_i \rho^{i+3}}{i+2} - \frac{\chi l^2}{m\beta_{55}} \sum_{i=0}^n \frac{a_i [(i+1)^2 - \gamma^2] \rho^{i+1}}{i+2} - \frac{6l^3}{\beta m} \sum_{i=0}^n b_i \rho^{i+2} \quad (1.3.77)$$

Общее решение (1.3.77), ограниченное в центре, имеет вид:

$$\begin{aligned} \bar{w}_2 &= B_2 + B_3 \rho^{1+\gamma} + \frac{12l^4}{\beta m^2} \sum_{i=0}^n \frac{a_i \rho^{i+4}}{(i+2)(i+4)[(i+3)^2 - \gamma^2]} - \\ &\quad - \frac{\chi l^2}{m\beta_{55}} \sum_{i=0}^n \frac{a_i \rho^{i+2}}{(i+2)^2} - \sum_{i=0}^n \frac{b_i \rho^{i+3}}{(i+3)[(i+2)^2 - \gamma^2]} \end{aligned} \quad (1.3.78)$$

Здесь  $B_2$  и  $B_3$  - постоянные интегрирования.

С учетом (1.3.78) из (1.3.76) получим:

$$\begin{aligned} \bar{M}_{r2} &= -\frac{B_3 m^3}{12l^2} (1+\gamma) \rho^{\gamma-1} (\beta_{11}\gamma + \alpha_{12}\beta_{12}) - \frac{ml^2}{\beta} \sum_{i=0}^n \frac{a_i (i\beta_{11} + 3\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12}) \rho^{i+2}}{(i+2)[(i+3)^2 - \gamma^2]} + \\ &\quad + \frac{lm^2}{2\beta} \sum_{i=0}^n \frac{b_i (i\beta_{11} + i\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12}) \rho^{i+1}}{(i+2)^2 - \gamma^2} \end{aligned} \quad (1.3.79)$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_{\theta 2} &= -\frac{B_3 m^3}{12l^2} \gamma (1+\gamma) (\alpha_{12}\beta_{12} + \gamma\beta_{11}) \rho^{\gamma-1} - \frac{ml^2}{\beta} \sum_{i=0}^n \frac{a_i (i\alpha_{12}\beta_{12} + 3\alpha_{12}\beta_{12} + \beta_{11}\gamma^2) \rho^{i+2}}{(i+2)[(i+3)^2 - \gamma^2]} + \\ &\quad + \frac{lm^2}{2\beta} \sum_{i=0}^n \frac{b_i (i\alpha_{12}\beta_{12} + 2\alpha_{12}\beta_{12} + \beta_{11}\gamma^2) \rho^{i+1}}{(i+2)^2 - \gamma^2} \end{aligned} \quad (1.3.80)$$

С учетом (1.3.78) из (1.3.75) для  $\varphi_2$  получим:



$$\varphi_2 = -\frac{B_3}{l}(1+\gamma)\rho^\gamma - \frac{12l^3}{\beta m^2} \sum_{i=0}^n \frac{a_i \rho^{i+3}}{(i+2)[(i+3)^2 - \gamma^2]} + \frac{6l^2}{\beta m} \sum_{i=0}^n \frac{b_i \rho^{i+2}}{(i+2)^2 - \gamma^2} \quad (1.3.81)$$

Рассмотрим случай, когда нижний слой пластинки оперт на подвижных шарнирных опорах. Краевые условия будут:

Для верхнего слоя – в виде (1.3.34)

Для нижнего слоя – в виде (1.3.35)

Эти условия с учетом (1.3.70) – (1.3.72) и (1.3.78) – (1.3.80) можно представить в виде:

Для нижнего слоя –

$$B_1(\beta_{11}\gamma + \alpha_{12}\beta_{12}) - \frac{l^2}{\rho} \sum_{i=0}^n \frac{b_i(i\beta_{11} + 2\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12})}{(i+2)^2 - \gamma^2} = 0, \quad (T_{r2}|_{r=a} = 0) \quad (1.3.82)$$

$$B_2 + B_3 \frac{12l^4}{\beta m^2} \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{(i+2)(i+4)[(i+3)^2 - \gamma^2]} - \frac{\chi l^2}{m\beta_{55}} \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{(i+2)^2} - \frac{6l^3}{\beta m} \sum_{i=0}^n \frac{b_i}{(i+3)[(i+2)^2 - \gamma^2]} = 0, \quad (w_2|_{r=a} = 0) \quad (1.3.83)$$

$$-\frac{B_3 m^2}{12l^2}(1+\gamma)(\beta_{11}\gamma + \alpha_{12}\beta_{12}) - \frac{l^2}{\beta} \sum_{i=0}^n \frac{a_i(i\beta_{11} + 3\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12})}{(i+2)[(i+3)^2 - \gamma^2]} + \frac{lm}{2\beta} \sum_{i=0}^n \frac{b_i(i\beta_{11} + 2\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12})}{(i+2)^2 - \gamma^2} = 0, \quad (M_{r2}|_{r=a} = 0). \quad (1.3.84)$$

Для верхнего слоя

$$(k + \alpha_{12})C_1 + l^2 \sum_{i=0}^n \frac{b_i(i+2 + \alpha_{12})}{(i+2)^2 - k^2} = 0, \quad (T_{r1}|_{r=a} = 0) \quad (1.3.85)$$

$$C_2 + C_3 + \frac{\bar{q}l^2}{4(9-k^2)}[6l^2 - \chi(9-k^2)] - l^2 \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{i+2} \left\{ \frac{12l^2}{(i+4)[(i+3)^2 - k^2]} - \frac{\chi}{i+2} \right\} - 6l^3 \sum_{i=0}^n \frac{b_i}{(i+3)[(i+2)^2 - k^2]} = 0, \quad (w_1|_{r=a} = 0) \quad (1.3.86)$$

$$-\frac{C_3(1+k)(k + \alpha_{12})}{12l^2} - \frac{\bar{q}l^2(3 + \alpha_{12})}{2(9-k^2)} + l^2 \sum_{i=0}^n \frac{a_i(i+3 + \alpha_{12})}{(i+2)[(i+3)^2 - k^2]} + \frac{l}{2} \sum_{i=0}^n \frac{b_i(i+2 + \alpha_{12})}{(i+2)^2 - k^2} = 0, \quad (M_{r1}|_{r=a} = 0) \quad (1.3.87)$$

Из (1.3.82), (1.3.83) и (1.3.86), (1.3.87) для постоянных интегрирования находим:

$$\begin{aligned}
B_1 &= \frac{l^2}{\beta(\beta_{11}\gamma + \alpha_{12}\beta_{12})} \sum_{i=0}^n \frac{b_i(i\beta_{11} + 2\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12})}{(i+2)^2 - \gamma^2}, \\
B_2 &= \frac{l^2}{m} \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{i+2} \left\{ \frac{12l^2}{\beta m [(i+3)^2 - \gamma^2]} \left[ \frac{i\beta_{11} + 3\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12}}{(1+\gamma)(\gamma\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12})} - \frac{1}{i+4} \right] + \frac{\chi}{\beta_{55}(i+2)} \right\} - \\
&\quad - \frac{6l^3}{\beta m} \sum_{i=0}^n \frac{b_i}{(i+2)^2 - \gamma^2} \left[ \frac{i\beta_{11} + 2\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12}}{(1+\gamma)(\gamma\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12})} - \frac{1}{i+3} \right], \\
B_3 &= -\frac{12l^4}{\beta m^2 (1+\gamma)(\gamma\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12})} \sum_{i=0}^n a_i \cdot \frac{i\beta_{11} + 3\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12}}{(i+2)[(i+3)^2 - \gamma^2]} + \\
&\quad + \frac{6l^3}{\beta m (1+\gamma)(\gamma\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12})} \sum_{i=0}^n b_i \frac{i\beta_{11} + 2\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12}}{(i+2)^2 - \gamma^2}.
\end{aligned} \tag{1.3.88}$$

$$\begin{aligned}
C_1 &= -\frac{l^2}{k + \alpha_{12}} \sum_{i=0}^n \frac{b_i(i+2 + \alpha_{12})}{(i+2)^2 - k^2}, \\
C_2 &= \frac{\bar{q}l^4}{4(9-k^2)} \left[ \frac{24(3+\alpha_{12})}{(1+k)(k+\alpha_{12})} - 6 + \frac{\chi(9-k^2)}{l^2} \right] - l^2 \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{i+2} \left\{ \frac{12l^2}{(i+3)^2 - k^2} \cdot \right. \\
&\quad \cdot \left. \left[ \frac{i+3+\alpha_{12}}{(1+k)(k+\alpha_{12})} - \frac{l^2}{i+4} \right] + \frac{\chi}{i+2} \right\} - 6l^3 \sum_{i=0}^n \frac{b_i}{(i+2)^2 - k^2} \left[ \frac{i+2+\alpha_{12}}{(1+k)(k+\alpha_{12})} - \frac{1}{i+3} \right], \\
C_3 &= -\frac{6\bar{q}l^4(3+\alpha_{12})}{(1+k)(k+\alpha_{12})(9-k^2)} + \frac{12l^4}{(1+k)(k+\alpha_{12})} \sum_{i=0}^n a_i \frac{i+3+\alpha_{12}}{(i+2)[(i+3)^2 - k^2]} + \\
&\quad + \frac{6l^3}{(1+k)(k+\alpha_{12})} \sum_{i=0}^n b_i \frac{i+2+\alpha_{12}}{(i+2)^2 - k^2}.
\end{aligned} \tag{1.3.89}$$

Подставляя значения этих постоянных в соответствующие формулы, для расчетных величин слоев пластинки получим:

$$\begin{aligned}
\bar{u}_1 &= l^2 \sum_{i=0}^n \frac{b_i}{(i+2)^2 - k^2} \left( \rho^{i+2} - \frac{i+2+\alpha_{12}}{k+\alpha_{12}} \cdot \rho^k \right) \\
\bar{T}_{r1} &= l \sum_{i=0}^n \frac{b_i(i+2+\alpha_{12})}{(i+2)^2 - k^2} (\rho^{i+1} - \rho^{k-1}) \\
\bar{T}_{\theta 1} &= l \sum_{i=0}^n \frac{b_i}{(i+2)^2 - k^2} \left[ (i\alpha_{12} + 2\alpha_{12} + k^2) \rho^{i+1} - k(i+2+\alpha_{12}) \rho^{k-1} \right] \\
\bar{w}_1 &= \frac{\bar{q}l^2}{4(9-k^2)} \left\{ \frac{24l^2(3+\alpha_{12})}{(1+k)(k+\alpha_{12})} (1-\rho^{1+k}) - 6l^2(1-\rho^4) + \chi(9-k^2)(1-\rho^2) \right\} -
\end{aligned} \tag{1.3.90}$$

$$\begin{aligned}
& -l^2 \sum_0^n \frac{a_i}{i+2} \left\{ \frac{12l^2}{(i+3)^2 - k^2} \left[ \frac{i+3+\alpha_{12}}{(1+k)(k+\alpha_{12})} (1-\rho^{1+k}) - \frac{(1-\rho^{i+4})}{i+4} \right] + \frac{\chi}{i+2} (1-\rho^{i+2}) \right\} - \\
& -6l^3 \sum_{i=0}^n \frac{b_i}{(i+2)^2 - k^2} \left[ \frac{i+2+\alpha_{12}}{(1+k)(k+\alpha_{12})} (1-\rho^{1+k}) - \frac{1}{i+3} (1-\rho^{i+3}) \right] \tag{1.3.91}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_1 = & \frac{6\bar{q}l^3}{9-k^2} \left( \frac{3+\alpha_{12}}{k+\alpha_{12}} \rho^k - \rho^3 \right) - 12l^3 \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{(i+2)[(i+3)^2 - k^2]} \cdot \left( \frac{i+3+\alpha_{12}}{k+\alpha_{12}} \rho^k - \rho^{i+3} \right) - \\
& -6l^2 \sum_{i=0}^n \frac{b_i}{(i+2)^2 - k^2} \left( \frac{i+2+\alpha_{12}}{k+\alpha_{12}} \rho^k - \rho^{i+2} \right) \tag{1.3.92}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{M}_{r_1} = & \frac{\bar{q}l^2(3+\alpha_{12})}{2(9-k^2)} (\rho^{k-1} - \rho^2) + l^2 \sum_{i=0}^n \frac{a_i(i+3+\alpha_{12})}{(i+2)[(i+3)^2 - k^2]} (\rho^{i+2} - \rho^{k-1}) + \\
& + \frac{l}{2} \sum_{i=0}^n \frac{b_i(i+2+\alpha_{12})}{(i+2)^2 - k^2} (\rho^{i+1} - \rho^{k-1}) \tag{1.3.93}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{M}_{\theta_1} = & \frac{\bar{q}l^2}{2(9-k^2)} \left[ k(3+\alpha_{12})\rho^{k-1} - (3\alpha_{12}+k^2)\rho^2 \right] + l^2 \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{(i+2)[(i+3)^2 - k^2]} \cdot \\
& \cdot \left[ (i\alpha_{12}+3\alpha_{12}+k^2)\rho^{i+2} - k(i+3+\alpha_{12})\rho^{k-1} \right] + \frac{l}{2} \sum_{i=0}^n \frac{b_i}{(i+2)^2 - k^2} \cdot \\
& \left[ (i\alpha_{12}+2\alpha_{12}+k^2)\rho^{i+1} - k(i+2+\alpha_{12})\rho^{k-1} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{w}_2 = & \frac{l^2}{m} \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{i+2} \left\{ \frac{12l^2}{\beta m [(i+3)^2 - \gamma^2]} \left[ \frac{i\beta_{11}+3\beta_{11}+\alpha_{12}\beta_{12}}{(1+\gamma)(\gamma\beta_{11}+\alpha_{12}\beta_{12})} (1-\rho^{1+\gamma}) - \frac{1-\rho^{i+4}}{i+4} \right] + \right. \\
& \left. + \frac{\chi}{\beta_{55}(i+2)} (1-\rho^{i+2}) \right\} - \frac{6l^3}{\beta m} \sum_{i=0}^n \frac{b_i}{(i+2)^2 - \gamma^2} \left[ \frac{i\beta_{11}+2\beta_{11}+\alpha_{12}\beta_{12}}{(1+\gamma)(\gamma\beta_{11}+\alpha_{12}\beta_{12})} (1-\rho^{1+\gamma}) - \frac{l}{i+3} (1-\rho^{i+3}) \right] \tag{1.3.94}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_2 = & \frac{12l^3}{\beta m^2} \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{(i+2)[(i+3)^2 - \gamma^2]} \left( \frac{i\beta_{11}+3\beta_{11}+\alpha_{12}\beta_{12}}{\gamma\beta_{11}+\alpha_{12}\beta_{12}} \rho^\gamma - \rho^{i+3} \right) - \\
& - \frac{6l^2}{\beta m} \cdot \sum_{i=0}^n \frac{b_i}{(i+2)^2 - \gamma^2} \left( \frac{i\beta_{11}+2\beta_{11}+\alpha_{12}\beta_{12}}{\gamma\beta_{11}+\alpha_{12}\beta_{12}} \rho^\gamma - \rho^{i+2} \right) \tag{1.3.95}
\end{aligned}$$

$$\bar{M}_{r_2} = \frac{ml^2}{\beta} \sum_{i=0}^n a_i \frac{i\beta_{11}+3\beta_{11}+\alpha_{12}\beta_{12}}{(i+2)[(i+3)^2 - \gamma^2]} (\rho^{\gamma-1} - \rho^{i+2}) + \frac{m^2 l}{2\beta} \sum_{i=0}^n b_i \frac{i\beta_{11}+2\beta_{11}+\alpha_{12}\beta_{12}}{(i+2)^2 - \gamma^2} (\rho^{i+1} - \rho^{\gamma-1})$$

$$\bar{M}_{\theta_2} = \frac{ml^2}{\beta} \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{(i+2)[(i+3)^2 - \gamma^2]} \cdot \left[ \gamma^2(i\beta_{11}+3\beta_{11}+\alpha_{12}\beta_{12})\rho^{\gamma-1} - (i\alpha_{12}\beta_{12}+3\alpha_{12}\beta_{12}+\beta_{11}\gamma^2)\rho^{i+2} \right] +$$

$$+ \frac{m^2 l}{2\beta} \sum_{i=0}^n \frac{b_i}{(i+2)^2 - \gamma^2} \left[ (i\alpha_{12}\beta_{12} + 2\alpha_{12}\beta_{12} + \beta_{11}\gamma^2)\rho^{i+1} - \gamma(i\beta_{11} + 2\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12})\rho^{\gamma-1} \right]. \quad (1.3.96)$$

Отметим, что только выражения  $C_2$ ,  $B_2$ ,  $\bar{w}_1$  и  $\bar{w}_2$ , полученные по теориям [60] и [110], отличаются друг от друга. Выражения же остальных всех величин совпадают. Одно условие контакта слоев, по двум теориям одинаково и имеет вид:

$$2\bar{u}_1 + \varphi_1 = 2u_2 - m\varphi_2 \quad (1.3.97)$$

Условие  $\bar{w}_1 = \bar{w}_2$  по теориям [60] и [110] отличаются. Эти два условия по теории Рейсснера-Миндлина [60] представляются в виде алгебраических уравнений относительно  $a_i$  и  $b_i$  в следующем виде:

$$\left\{ \begin{aligned} & 6l \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{i+2} \left[ \frac{1}{(i+3)^2 - k^2} \left( \rho^{i+3} - \frac{i+3+\alpha_{12}}{k+\alpha_{12}} \cdot \rho^k \right) - \frac{1}{\beta m [(i+3)^2 - \gamma^2]} \right. \\ & \cdot \left. \left( \rho^{i+3} - \frac{i\beta_{11} + 3\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12}}{\gamma\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12}} \cdot \rho^\gamma \right) \right] + 4 \sum_{i=1}^n b_i \left\{ \frac{1}{(i+2)^2 - k^2} \right. \\ & \cdot \left. \left( \rho^{i+2} - \frac{i+2+\alpha_{12}}{k+\alpha_{12}} \cdot \rho^k \right) + \frac{1}{\beta [(i+2)^2 - \gamma^2]} \left( \rho^{i+2} - \frac{i\beta_{11} + 2\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12}}{\gamma\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12}} \rho^\gamma \right) \right\} = \\ & \frac{3\bar{q}l}{(k+\alpha_{12})(9-k^2)} [(k+\alpha_{12})\rho^3 - (3+\alpha_{12})\rho^k], \\ & \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{i+2} \left\{ 12l^2 \left[ \frac{(i+3+\alpha_{12})(1-\rho^{1+k})}{(1+k)(k+\alpha_{12})[(i+3)^2 - k^2]} + \frac{i\beta_{11} + 3\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12}}{\beta m^2(1+\gamma)(\gamma\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12})} \cdot \frac{1-\rho^{1+\gamma}}{(i+3)^2 - \gamma^2} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1-\rho^{i+4}}{i+4} \left( \frac{1}{(i+3)^2 - k^2} + \frac{1}{\beta m^2} \cdot \frac{1}{(i+3)^2 - \gamma^2} \right) \right] + \frac{\chi(1-\rho^{i+2})}{m\beta_{55}(i+2)} (1+m\beta_{55}) \right\} + \\ & + 6l \sum_{i=0}^n b_i \frac{(i+2+\alpha_{12})(1-\rho^{1+k})}{(1+k)(k+\alpha_{12})[(i+2)^2 - k^2]} - \frac{i\beta_{11} + 2\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12}}{\beta m(1+\gamma)(\gamma\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12})[(i+2)^2 - \gamma^2]} (1-\rho^{1+\gamma}) - \\ & \left. - \frac{1-\rho^{i+3}}{i+3} \cdot \left[ \frac{1}{(i+2)^2 - k^2} - \frac{1}{\beta m} \cdot \frac{1}{(i+2)^2 - \gamma^2} \right] \right\} = \frac{\bar{q}}{4(9-k^2)} \cdot \left[ \frac{24l^2(3+\alpha_{12})}{(1+k)(k+\alpha_{12})} (1-\rho^{1+k}) - \right. \\ & \left. - 6l^2(1-\rho^4) + \chi(9-k^2)(1-\rho^2) \right] \end{aligned} \right. \quad (1.3.98)$$

Аналогичная система получена и по теории [110]. Коэффициенты рядов контактных напряжений  $a_i$  и  $b_i$  определяются из системы этих алгебраических уравнений.

Они совпадают только при  $\chi = 0$ , т.е. в случае пренебрежения влияния деформаций поперечных сдвигов. Решая полученные системы относительно  $a_i$  и  $b_i$ , по соответствующим формулам вычисляются значения всех расчетных величин. В таблицах 1.3.3 и 1.3.4 приведены некоторые значения  $\bar{\rho}$ ,  $\bar{\tau}$  и  $\bar{w}$ , полученные при  $n = 7$  и  $n = 8$ , по классической ( $\chi = 0$ ) и уточненной теориям ( $\chi = 10$ ) [110] и [60].

Отметим, что в таблицах приведены результаты решения в случае следующих значений параметров:

$$\bar{q} = 1, \beta_{11} = 2, \beta_{12} = 0,8, \alpha_{12} = 0,2, k = 0,5$$

$$\gamma = 0,5, \beta_{55} = 1, (\beta_{22} = 2), m = 2, \beta = 4, l = 8$$

Имея решение при  $\bar{q} = 1$ , благодаря физической и геометрической линейности задачи, можно получить решение в каждом конкретном случае, для чего достаточно значения расчетных величин умножить на  $q/B_{11}$ .

Таблица 1.3.3

				$\rho$							
				0	02	0,4	0,6	0,8	0,9	0,95	1
$\chi = 0$ $m = 1$ $l = 5$	$\bar{w}$	$n$	7	116,86	105,56	85,09	59,29	30,27	15,16	7,57	0
			8	116,86	105,55	85,08	59,28	30,26	15,16	7,57	0
	$\bar{P}$	$n$	7	0,629	0,546	0,545	0,543	0,563	0,408	0,063	-0,702
			8	0,629	0,546	0,544	0,544	0,568	0,429	0,012	-1,026
	$\bar{\tau}$	$n$	7	0	0,363	0,727	1,091	1,453	1,658	1,794	1,978
			8	0	0,364	0,727	1,091	1,452	1,647	1,791	2,027
$\chi = 10$ $m = 1$ $l = 5$	$\bar{w}$	$n$	7	148,29	135,71	111,46	79,37	41,55	21,11	10,62	0
			8	148,29	135,71	111,46	79,37	41,55	21,11	10,62	0
	$\bar{P}$	$n$	7	0,622	0,548	0,538	0,529	0,510	0,494	0,483	0,469
			8	0,622	0,548	0,538	0,529	0,510	0,494	0,480	0,462
	$\bar{\tau}$	$n$	7	0	0,359	0,727	1,096	1,469	1,668	1,780	1,907
			8	0	0,359	0,727	1,095	1,469	1,666	1,779	1,917
$\chi = 0$ $m = 2$ $l = 8$	$\bar{w}$	$n$	7	221,43	200,04	161,29	112,44	57,44	28,79	14,38	0
			8	221,42	200,02	161,27	112,42	57,42	28,78	14,37	0
	$\bar{P}$	$n$	7	0,931	0,786	0,787	0,788	0,783	0,647	0,403	-0,113
			8	0,931	0,789	0,786	0,786	0,803	0,653	0,295	-0,517
	$\bar{\tau}$	$n$	7	0	0,299	0,596	0,897	1,194	1,429	1,635	1,953
			8	0	0,300	0,597	0,895	1,188	1,381	1,625	2,171
$\chi = 10$ $m = 2$ $l = 8$	$\bar{w}$	$n$	7	277,82	253,96	208,37	148,21	77,47	39,32	19,77	0
			8	277,81	253,96	208,37	148,21	77,47	39,33	19,79	0
	$\bar{P}$	$n$	7	0,924	0,800	0,781	0,765	0,730	0,695	0,686	0,703
			8	0,924	0,799	0,781	0,766	0,731	0,703	0,670	0,587
	$\bar{\tau}$	$n$	7	0	0,263	0,580	0,904	1,254	1,478	1,635	1,852
			8	0	0,263	0,579	0,904	1,254	1,478	1,635	1,852

Таблица 1.3.4

			$\rho$								
			0	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9	0,95	1	
$\chi = 0$ m = 1 l = 5	$\bar{w}$	n	7	116,86	105,56	85,09	59,29	30,27	15,16	7,57	0
			8	116,86	105,55	85,08	59,29	30,26	15,16	7,57	0
	$\bar{p}$	n	7	0,629	0,546	0,545	0,543	0,563	0,408	0,063	-0,701
			8	0,629	0,546	0,544	0,544	0,568	0,429	0,012	-1,026
	$\bar{\tau}$	n	7	0	0,363	0,727	1,091	1,453	1,658	1,794	1,979
			8	0	0,364	0,727	1,091	1,453	1,647	1,791	2,027
$\chi = 10$ m = 1 l = 5	$\bar{w}$	n	7	149,98	137,32	112,86	80,43	42,13	21,41	10,77	0
			8	149,98	137,32	112,86	80,43	42,13	21,41	10,77	0
	$\bar{p}$	n	7	0,620	0,548	0,537	0,527	0,510	0,496	0,488	0,478
			8	0,620	0,548	0,537	0,528	0,510	0,497	0,486	0,466
	$\bar{\tau}$	n	7	0	0,359	0,727	1,096	1,469	1,669	1,779	1,906
			8	0	0,359	0,727	1,096	1,469	1,667	1,779	1,915
$\chi = 0$ m = 2 l = 8	$\bar{w}$	n	7	221,43	200,04	161,29	112,44	57,44	28,79	14,38	0
			8	221,41	200,02	161,27	112,42	57,43	28,78	14,37	0
	$\bar{p}$	n	7	0,931	0,786	0,787	0,788	0,783	0,647	0,403	-0,113
			8	0,931	0,789	0,786	0,786	0,803	0,653	0,296	-0,517
	$\bar{\tau}$	n	7	0	0,299	0,596	0,897	1,194	1,429	1,635	1,953
			8	0	0,300	0,597	0,895	1,188	1,381	1,629	2,171
$\chi = 10$ m = 2 l = 8	$\bar{w}$	n	7	282,91	258,72	212,44	151,20	79,06	40,11	20,15	0
			8	282,89	258,73	212,44	151,20	79,06	40,11	20,16	0
	$\bar{p}$	n	7	0,923	0,802	0,779	0,763	0,729	0,696	0,691	0,719
			8	0,923	0,800	0,779	0,763	0,729	0,705	0,675	0,583
	$\bar{\tau}$	n	7	0	0,260	0,579	0,906	1,259	1,482	1,638	1,854
			8	0	0,260	0,579	0,907	1,260	1,484	1,638	1,848

Полученные результаты приводят к следующим заключениям:

1. В случае действия только нормальной внешней нагрузки теории [60] и [110] приводят к практически одинаковым результатам, т.е. влияние формы изменения поперечного касательного напряжения по толщине пластинки пренебрежительно мало. Разумеется так будет и в случае действия произвольной внешней нагрузки, если ее нормальная составляющая является доминирующей, а касательная составляющая – ничтожной.
2. В работах [110] и [119] показано, что в случае действия только касательной поверхностной нагрузки, когда поперечное усилие отсутствует, в рамках теории [60] учет поперечного сдвига поправки не дает, а теория [110] приводят к ощутимой поправке.

3. Результаты теории [60] и [110] будут заметно отличаться друг от друга еще и в тех случаях, когда нагрузка произвольная но ее касательная составляющая является доминирующей, а нормальная составляющая – ничтожной.

## ГЛАВА II

### ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ БАЛОК И КРУГЛЫХ ПЛАСТИН

#### §2.1 К определению равнопрочной ортотропной балки минимального объема при учете касательного напряжения

Решена задача проектирования равнопрочной ортотропной балки переменной толщины при учете касательного напряжения. Показано, что существует однопараметрическое бесконечное семейство равнопрочных балок, которые отличаются друг от друга лишь в участке доминирующего изгиба. В участке же доминирующего среза они совпадают и имеют постоянную толщину. В сечении равносильности изгиба и среза толщина равнопрочной балки имеет разрыв первого рода. В качестве оптимальной выбрана та равнопрочная балка, объем которой минимален. Вычислены прогибы этой балки при учете поперечного сдвига. Показано, что прогибы могут быть меньше соответствующих классических значений. Дано физическое объяснение этого факта.

1. Рассмотрим консольную балку длины  $l$ , изготовленную из линейно-упругого ортотропного материала, которая в своем концевом сечении нагружена сосредоточенной силой  $P$ . (рис. 2.1.1).

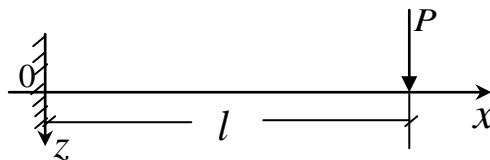


рис.2.1.1

Будем считать, что поперечные сечения балки являются прямоугольными с заданной постоянной шириной  $b$ . Попытаемся определить такую толщину  $h$ , которая обеспечивает равнопрочность балки при учете касательного напряжения  $\tau_{xz}$ .

Для рассматриваемого случая имеем [107].

$$\sigma_x = -\frac{12P(l-x)}{bh^3}z, \quad \tau_{xz} = \frac{3P}{2bh^4} \left[ h(h^2 - 4z^2) + (h^2 - 12z^2)(l-x) \frac{dh}{dx} \right] \quad (2.1.1)$$

Условие прочности материала примем в виде [144].



$$\max_{(x,z)} \Phi(\sigma_x, \tau_{xz}) = \max_{(x,z)} \left( \frac{\sigma_x^2}{\sigma_s^2} + \frac{\tau_{xz}^2}{\tau_s^2} \right) = 1 \quad (2.1.2)$$

где  $\sigma_s$  и  $\tau_s = n\sigma_s$  - пределы прочности материала при одноосном растяжении (сжатии) и поперечном сдвиге. Переходя к безразмерным величинам [121].

$$\begin{aligned} \bar{x} = \frac{x}{l}, \quad \bar{h} = \frac{h}{b}, \quad \bar{z} = \frac{z}{h}, \quad \bar{w} = \frac{w}{b}, \quad \bar{P} = \frac{P}{\sigma_z b^2}, \\ m = \frac{l}{b}, \quad \chi = a_{55} B_{11}, \quad s = \frac{B_{11}}{\sigma_s}, \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

и имея в виду (2.1.1) для функционала прочности получим

$$\Phi = \Phi_1 + h^2 \bar{z}^2 \Phi_2 + h^4 \bar{z}^4 \Phi_3 \quad (2.1.4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Phi_1 = \left\{ \frac{3\bar{P}}{2n\bar{h}^2} \left[ \bar{h} + (1-\bar{x}) \frac{d\bar{h}}{d\bar{x}} \right] \right\}^2, \quad \Phi_3 = \left\{ \frac{6\bar{P}}{n\bar{h}^4 b^2} \left[ \bar{h} + 3(1-\bar{x}) \frac{d\bar{h}}{d\bar{x}} \right] \right\}^2 \\ \Phi_2 = \frac{18\bar{P}^2}{n^2 \bar{h}^6 b^2} \left\{ 8n^2 m^2 (1-\bar{x})^2 - \left[ \bar{h} + (1-\bar{x}) \frac{d\bar{h}}{d\bar{x}} \right] \left[ \bar{h} + 3(1-\bar{x}) \frac{d\bar{h}}{d\bar{x}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Заметим, что  $\Phi_1 > 0$ ,  $\Phi_3 > 0$ , а  $\Phi_2$  в общем случае может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Поскольку  $\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} \right|_{\bar{z}=0} = 0$ , то в точке  $\bar{z} = 0$   $\Phi$  имеет экстремум. В случае  $\Phi_2 > 0$  для всех  $\bar{z}$  имеем  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \bar{z}^2} > 0$  и этот экстремум является минимумом. Функция  $\Phi$  свое наибольшее значение принимает в крайних точках поперечного сечения балки  $\bar{z} = \pm \frac{1}{2}$  (рис. 2.1.2, а). Очевидно, что это соответствует случаю доминирующего изгиба. В случае  $\Phi_2 < 0$  точка  $\bar{z} = 0$  является точкой максимума (рис. 2.1.2, б-а). Поскольку  $\Phi$  положительна и при  $\bar{z} \rightarrow \infty$  стремится к положительной функции  $\bar{h}^4 \bar{z}^4 \Phi_3$ , то она имеет две минимума. Если точки минимума  $\bar{z} = \pm \bar{z}_0$  находятся вне сечения (рис. 2.1.2, б) или на его крайних точках (рис. 2.1.2, в), то функция свое наибольшее значение принимает при  $\bar{z} = 0$ . Это соответствует случаю доминирующего среза. Если же точки минимума находятся внутри сечения (рис. 2.1.2, г-е), то наибольшее значение  $\Phi$  может принимать или при

$\bar{z} = 0$  (рис. 2.1.2, г), или при  $\bar{z} = \pm 1/2$  (рис. 2.1.2, е), или при  $\bar{z} = 0$  и  $\bar{z} = \pm 1/2$  одновременно (рис. 2.1.2, д). Последний случай соответствует равносильности изгиба и среза. Возможен, конечно, еще один случай, при котором  $\Phi_2 = 0$ . Тогда первая и вторая производные  $\Phi$  в точке  $\bar{z} = 0$  превращаются в нуль. Так как в точке  $\bar{z} \neq 0$  соблюдается условие  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \bar{z}^2} > 0$ , то точка  $\bar{z} = 0$  является точкой минимума, а не перегиба (рис. 2.1.2, а).

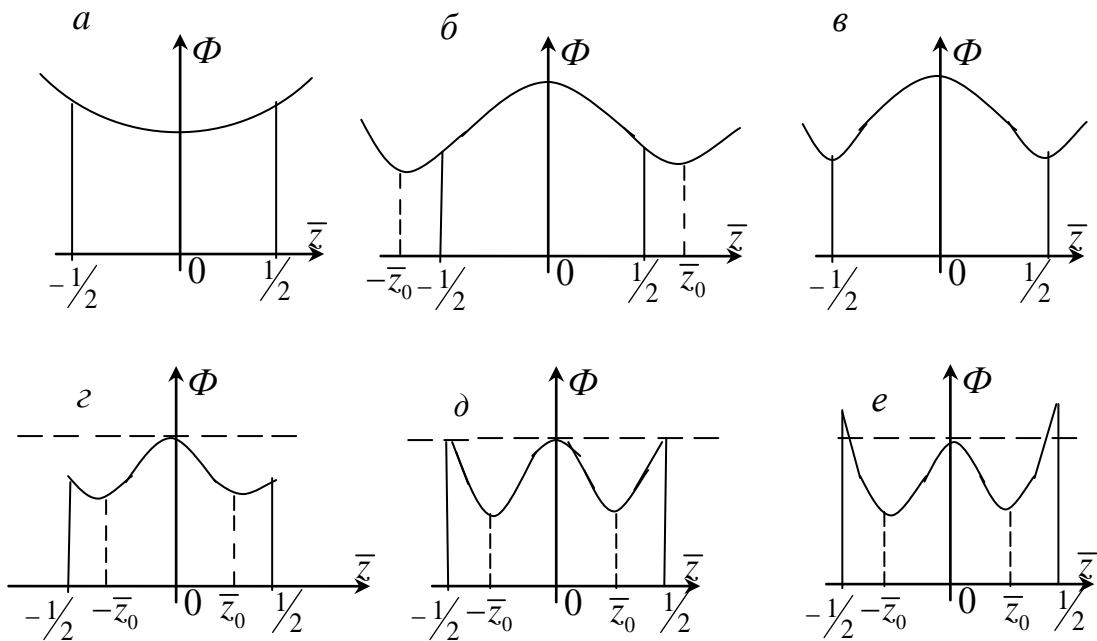


рис.2.1.2

На основе сделанного анализа заключаем, что для равнопрочной балки условие прочности (2.1.2) должно удовлетворяться при доминирующем изгибе в крайних точках поперечного сечения  $\bar{z} = \pm 1/2$ , а при доминирующем срезе в его середине  $\bar{z} = 0$ . В случае же равносильности изгиба и среза условие прочности должна удовлетворяться в крайних точках и в середине сечения балки одновременно.

2. Очевидно, что в определенном участке  $\bar{x}_0 < \bar{x} \leq 1$  из-за малости изгибающего момента доминирующим является срез и условие прочности должно удовлетвориться в середине поперечного сечения  $\bar{z} = 0$ . Из (2.1.2) с учетом (2.1.4) и (2.1.5) для безразмерной толщины этого участка получим

$$(1-\bar{x})\frac{d\bar{h}}{d\bar{x}} - \frac{2n}{3\bar{P}}\bar{h}^2 + \bar{h} = 0 \quad (\bar{x}_0 < \bar{x} \leq 1) \quad (2.1.6)$$

В загруженном сечении балки  $\bar{x} = 1$  имеем:

$$\bar{h}|_{\bar{x}=1} = \frac{3\bar{P}}{2n}, \quad \left( h|_{x=l} = \frac{3\bar{P}}{2n\sigma_s b} \right) \quad (2.1.7)$$

Общее решение дифференциального уравнения (2.1.6) имеет вид:

$$\bar{h} = \frac{3\bar{P}(\bar{x}-1)}{2n(\bar{x}+c)} \quad (2.1.8)$$

где  $c$  - постоянная интегрирования. Удовлетворив краевому условию (2.1.7), находим

$$c = -1 \quad (2.1.9)$$

Следовательно, уравнение (2.1.6) при краевом условии (2.1.7) допускает только постоянное решение:

$$\bar{h} = \frac{3\bar{P}}{2n} = const \quad (\bar{x}_0 < \bar{x} \leq 1) \quad (2.1.10)$$

Таким образом, в участке доминирующего среза равнопрочная балка имеет постоянную толщину (2.1.10).

С приближением к сечению равносильности среза и изгиба  $\bar{x} = \bar{x}_0$  справа значения функционала  $\Phi$  при  $\bar{z} = \pm 1/2$  стремятся к единице. Так как

$$\Phi|_{\substack{\bar{x}=\bar{x}_0+0 \\ \bar{z}=\pm 1/2}} = 1, \quad \Phi_1|_{\bar{x}=\bar{x}_0+0} = 1, \quad \left. \frac{d\bar{h}}{d\bar{x}} \right|_{\bar{x}=\bar{x}_0+0} = 0 \quad (2.1.11)$$

то с учетом (2.1.2), (2.1.4), (2.1.5) и (2.1.10) для координаты сечения раздела участков доминирующего среза и доминирующего изгиба балки  $\bar{x}_0$  получим

$$\bar{x}_0 = 1 - \frac{3\bar{P}}{8n^2 m} \quad (2.1.12)$$

Очевидно, что при  $\bar{x}_0 \leq 0$  что соответствует случаю коротких балок, участок доминирующего изгиба отсутствует и балка целиком испытывает деформирование доминирующего среза. В этом случае равнопрочная балка имеет постоянную толщину (2.1.10). При  $\bar{x}_0 > 0$  (случай длинных балок) часть балки  $\bar{x}_0 < \bar{x} \leq 1$  испытывает деформирование доминирующего среза, которому соответствует

постоянная толщина (2.1.10), а часть  $0 \leq \bar{x} < \bar{x}_0$  - деформирование доминирующего изгиба. Условие равнопрочности этого участка балки имеет вид:

$$\Phi_{\bar{x}=\pm 1/2} = 1, \quad 0 \leq \bar{x} < \bar{x}_0 \quad (2.1.13)$$

С учетом (2.1.4) и (2.1.5) из (2.1.13) получим

$$\frac{d\bar{h}}{d\bar{x}} = -\frac{n \left[ \bar{h}^4 - 36m^2 \bar{P}^2 (1-\bar{x})^2 \right]^{1/2}}{3\bar{P}(1-\bar{x})} = F(\bar{x}), \quad (0 < \bar{x} < \bar{x}_0) \quad (2.1.14)$$

Подставляя в (2.1.14)  $\bar{x} = \bar{x}_0 - 0$  и имея в виду (2.1.12), для левостороннего значения толщины балки в сечении  $\bar{x}_0$  находим:

$$\bar{h} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_0-0} = \frac{3\bar{P} (\gamma^2 + 4n^2 m^2)^{1/4}}{2n \sqrt{2nm}}, \quad (2.1.15)$$

где

$$\gamma = \frac{d\bar{h}}{d\bar{x}} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_0-0} \quad (2.1.16)$$

Из (2.1.15) следует, что при  $\gamma \neq 0$  толщина равнопрочной балки в сечении раздела участков доминирующего изгиба и доминирующего среза  $\bar{x} = \bar{x}_0$  имеет разрыв первого рода с величиной разрыва

$$\bar{h} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_0-0} - \bar{h} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_0+0} = \frac{3\bar{P}}{2n} \left[ \frac{(\gamma^2 + 4n^2 m^2)^{1/4}}{\sqrt{2nm}} - 1 \right] \quad (2.1.17)$$

Толщина же произвольного сечения участка доминирующего изгиба равнопрочной балки определится интегрированием дифференциального уравнения (2.1.14), для чего необходимо одно начальное условие. Это условие представим в виде

$$\bar{h} \Big|_{\bar{x}=0} = \bar{h}_0^{kl} + \Delta\bar{h} \quad (2.1.18)$$

Здесь  $\Delta\bar{h} \geq 0$  - произвольный параметр, а  $\bar{h}_0^{kl}$  - значение безразмерной толщины заземленного сечения равнопрочной балки, соответствующей классической теории, т.е. без учета касательного напряжения [183]

$$\bar{h}_0^{kl} = \sqrt{6m\bar{P}} \quad (2.1.19)$$

Каждому значению  $\Delta\bar{h}$  соответствует один определенный проект равнопрочной балки. Таким образом, в отличие от классической теории, при учете касательного напряжения существует однопараметрическое бесконечное множество, равнопрочных балок которые отличаются друг от друга лишь на участке доминирующего изгиба. В участке же доминирующего среза равнопрочная балка единственна и имеет постоянную толщину (2.1.10). Факт неединственности проектов равнопрочной балки при учете касательного напряжения открывает возможность оптимизации по дополнительному критерию. В качестве такого критерия может служить, например, или минимальность объема, или минимальность наибольшего прогиба, или максимальность первой собственной частоты и т.д..

3. Интегрирование уравнения (2.1.14) удобно произвести численно. Значения безразмерной толщины балки в сечениях

$$\bar{x}_k = \bar{x}_{k-1} + \Delta\bar{x}, \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (2.1.20)$$

определяются формулой

$$\bar{h}_k = \bar{h}_{k-1} + F(\bar{x}_{k-1}) \cdot \Delta\bar{x} \quad (2.1.21)$$

где  $\Delta\bar{x} = \frac{(1 - \bar{x}_0)}{N}$ ,  $N$  - число участков разбиения интервала интегрирования.

Объем балки можно вычислить путем сложения объемов ее двух частей- частей доминирующего изгиба и среза. С учетом (2.1.3), (2.1.10), (2.1.12) и формулы трапеций для безразмерного объема балки получим:

$$\bar{V} = \frac{V}{b^3} = \frac{3\bar{P}}{16n^2} \left[ \frac{3\bar{P}}{n} + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (\bar{h}_{k-1} + \bar{h}_k) \right] \quad (2.1.22)$$

Отметим, что классическая теория приводит к единственному проекту равнопрочной балки, безразмерные значения толщины и объема которой определяются формулами [183]

$$\bar{h}_{кл} = \frac{h_{кл}}{b} = \sqrt{6m\bar{P}(1-\bar{x})}, \quad \bar{V}_{кл} = \frac{V_{кл}}{b^3} = \frac{2m}{3} \sqrt{6m\bar{P}} \quad (2.1.23)$$

4. В рамках уточненной теории ортотропных пластин переменной толщины [121], учитывающей влияние поперечных сдвигов, для кривизны изогнутой оси равнопрочной балки минимального объема можно написать

$$\frac{d^2 \bar{w}}{d \bar{x}^2} = \begin{cases} R_1(\bar{x}), & 0 \leq \bar{x} < \bar{x}_0 \\ R_2(\bar{x}), & \bar{x}_0 < \bar{x} \leq 1 \end{cases} \quad (2.1.24)$$

Здесь

$$R_1(\bar{x}) = \frac{3m\bar{P}}{2s\bar{h}^3} \left\{ 8m^2(1-\bar{x}) + \chi \left[ \frac{2n^2\bar{h}^4}{9\bar{P}^2(1-\bar{x})} - \bar{h} \frac{d\bar{h}}{d\bar{x}} - 2(1-\bar{x}) \left( \frac{d\bar{h}}{d\bar{x}} \right)^2 + \frac{4n^2m^2\bar{h}}{d\bar{h}/d\bar{x}} \right] \right\} \quad (2.1.25)$$

$$R_2(\bar{x}) = \frac{32n^3m^3}{9s\bar{P}^2}(1-\bar{x}) \quad (2.1.26)$$

Для определения безразмерного прогиба  $\bar{w}$  необходимо уравнение (2.1.24) дважды проинтегрировать при граничных условиях [110]

$$\left[ \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} - \frac{3m\chi\bar{P}}{2s\bar{h}^2} \left( \bar{h} + \frac{d\bar{h}}{d\bar{x}} \right) \right]_{\bar{x}=0} = 0, \quad \bar{w}|_{\bar{x}=0} = 0 \quad (2.1.27)$$

Удобно это сделать численно по следующей схеме:

$$\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_k} = \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_{k-1}} + R_1(\bar{x}) \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_{k-1}} \cdot \Delta\bar{x} \quad (2.1.28)$$

$$\bar{w} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_k} = \bar{w} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_{k-1}} + \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_{k-1}} \cdot \Delta\bar{x} \quad (2.1.29)$$

За сечением  $\bar{x}_0$  уравнение (2.1.24) можно интегрировать аналитически, в результате которого получим:

$$\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} = -\frac{16n^3m^3}{3s\bar{P}^2}(1-\bar{x})^2 + c_1 \quad (2.1.30)$$

$$\bar{w} = \frac{16n^3m^3}{9s\bar{P}^2}(1-\bar{x})^3 + c_1\bar{x} + c_2, \quad (\bar{x}_0 < \bar{x} \leq 1) \quad (2.1.31)$$

Постоянные интегрирования  $c_1$  и  $c_2$  определяются из условия непрерывности  $\bar{w}$  и

$\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}}$  в сечении  $\bar{x} = \bar{x}_0$ .

В рамках классической теории для равнопрочной балки имеем:

$$\frac{d^2 \bar{w}_{кл}}{d \bar{x}^2} = \frac{2m^2}{s\sqrt{6m\bar{P}}} \frac{1}{\sqrt{(1-\bar{x})}}, \quad (0 < \bar{x} < 1) \quad (2.1.32)$$

Решение этого уравнения при граничных условиях  $\left. \frac{d\bar{w}_{кл}}{d\bar{x}} \right|_{\bar{x}=0} = \bar{w}_{кл}|_{\bar{x}=0} = 0$  имеет вид:

$$\bar{w}_{кл} = \frac{4m^2}{3s\sqrt{6m\bar{P}}} \left[ 2(1-\bar{x})^{3/2} + 3\bar{x} - 2 \right] \quad (2.1.33)$$

Наибольший прогиб получается на нагруженном конце балки  $\bar{x} = 1$ :

$$\bar{w}_{кл}^{\max} = \frac{4m^2}{3s\sqrt{6m\bar{P}}} \quad (2.1.34)$$

5. Рассмотрим численный пример. Пусть

$$m = 10, \quad n = 0.1, \quad \bar{P} = 0.1, \quad s = 10^3. \quad (2.1.35)$$

Из (2.1.12) и (2.1.10) для  $\bar{x}_0$  и постоянной толщины балки в участке доминирующего среза находим:

$$\bar{x}_0 = 0.625, \quad \bar{h} = 1.5 \quad (\bar{x}_0 < \bar{x} \leq 1) \quad (2.1.36)$$

Толщина же участка доминирующего изгиба балки ( $0 \leq \bar{x} < \bar{x}_0$ ) определяется с помощью (2.1.21), при таком значении параметра  $\Delta\bar{h}$ , которое обеспечивает минимальность объема. Исследование показывает, что в рассмотренном случае этот параметр может изменяться в промежутке  $0 \leq \Delta\bar{h} \leq 5$ . Интересно отметить, что при малых значениях параметра  $\Delta\bar{h}$  вторая производная толщины балки, подобно классическому случаю, отрицательна для всех  $\bar{x}$ . При больших значениях  $\Delta\bar{h}$  толщина балки с удалением от заземленного сечения  $\bar{x} = 0$  резко убывает. Ее вторая производная в некотором участке, примыкающем к заземленному сечению положительна. Далее имеется точка перегиба, после чего знак второй производной толщины становится отрицательным.

В табл. (2.1.1) приведены значения безразмерного объема равнопрочной балки при (2.1.33) и некоторых значениях параметра  $\Delta\bar{h}$ .

Табл. (2.1.1)

$\Delta\bar{h}$	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08
$\bar{V}$	19.315	19.28	19.284	19.293	19.304	19.317	19.332	19.347	19.3
$\Delta\bar{h}$	0.09	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1	2	5
$\bar{V}$	19.381	19.399	19.601	20.069	20.574	21.095	21.620	24.167	30.2

С помощью данных этой таблицы на рис. (2.1.3) представлен график зависимости объема равнопрочной балки от параметра  $\Delta\bar{h}$ . Как видно из этого графика, объем равнопрочной балки при  $\Delta\bar{h} = 0.01$  имеет минимум со значением  $\bar{V}_{on} = 19.28$ , что на 18% больше классического значения (2.1.23).

В таблице (2.1.2) приведены значения толщины и прогиба для некоторых сечений равнопрочной балки в классической постановке и равнопрочной балки минимального объема при учете касательного напряжения. При этом прогибы вычислены без влияния поперечного сдвига, т.е. когда  $\chi = 0$ .

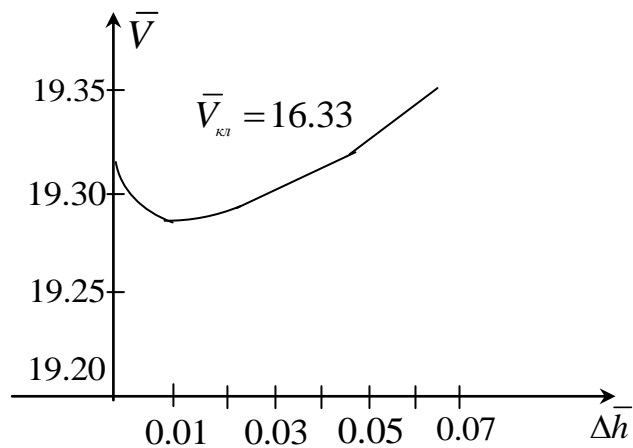


рис.2.1.3

Табл. (2.1.2)

$\bar{x}$	0	0.104	0.208	0.312	0.417	0.521	0.625	0.625	0.75	0.875	1.000
$\bar{h}_{кл}$	2.449	2.318	2.179	2.031	1.871	1.696	1.50	1.50	1.225	0.866	0
$s\bar{w}_{кл}$	0	0.451	1.839	4.22	7.68	12.30	18.20	18.20	27.22	38.83	54.43
$\bar{h}$	2.460	2.43	2.34	2.22	2.08	1.93	1.76	1.5	1.5	1.5	1.5
$s\bar{w}$	0	0.18	0.87	2.56	5.05	8.37	12.52	12.52	18.54	26.65	36.84



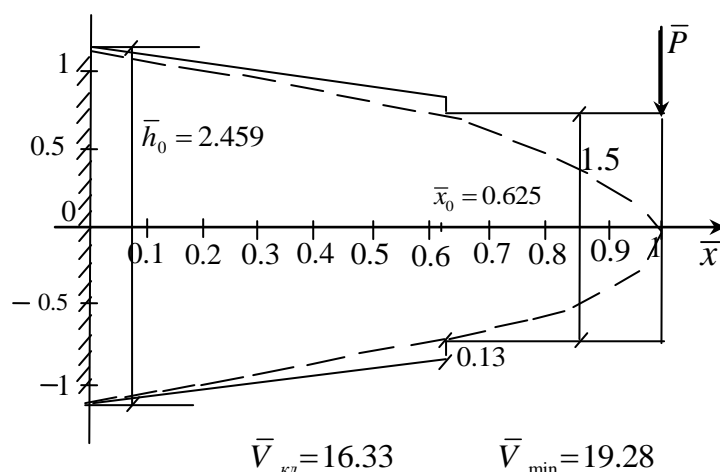


рис.2.1.4

На рисунке (2.1.4) пунктирной линией иллюстрирована равнопрочная балка по классической теории, а сплошной линией- равнопрочная балка минимального объема при учете касательного напряжения. В сечении  $\bar{x} = 0.625$  толщина равнопрочной балки минимального объема имеет разрыв величиной 0.26.

В таблице (2.1.3) приведены безразмерные значения прогиба равнопрочной балки минимального объема  $s \bar{w}$  для некоторых значений параметра  $\chi$ , учитывающего влияние поперечного сдвига. Сравнения данные таблиц (2.1.2) и (2.1.3) замечаем, что прогибы равнопрочной балки минимального объема при  $\chi < 60$  меньше соответствующих классических значений. Здесь ничего абсурдно нет, поскольку сравниваются прогибы двух противоборствующих факторов. Действительно, учет поперечного касательного напряжения приводит к утолщению балки, а следовательно, и к увеличению ее жесткости. Учет же влияния поперечного сдвига приводит к увеличению гибкости балки. Возможны случаи, когда любой из отмеченных факторов окажется преобладающим. В рассмотренном случае до  $\chi = 60$  преобладает фактор утолщения, а за  $\chi = 70$  фактор увеличения гибкости балки.

Табл. (2.1.3)

		$\bar{x}$									
		0	0.104	0.208	0.312	0.417	0.521	0.625	0.75	0.875	1
0	0	0	0.18	0.87	2.56	5.05	8.37	12.52	18.54	26.65	36.84
	5	0	0.28	1.28	3.08	5.69	9.14	13.44	19.68	28.00	37.71

$\chi$	10	0	0.57	1.69	3.60	6.34	9.91	14.37	20.82	29.35	39.27
	15	0	0.85	2.09	4.13	6.98	10.69	15.29	21.95	30.69	41.52
	20	0	1.14	2.50	4.65	7.62	11.46	16.21	23.09	32.04	42.32
	30	0	1.71	3.31	5.69	8.90	13.01	18.06	25.36	34.74	45.51
	40	0	2.28	4.13	6.73	10.19	14.56	19.91	27.63	37.43	48.62
	50	0	2.84	4.94	7.79	11.47	16.10	21.76	29.90	40.13	51.74
	60	0	3.41	5.75	8.82	12.76	17.65	23.60	32.17	42.82	54.86
	70	0	3.98	6.56	9.86	14.04	19.20	25.45	34.44	45.52	57.98
	80	0	4.55	7.38	10.91	15.32	20.74	27.30	36.71	48.21	61.10

В заключение отметим, что расхождение между проектами соответствующими классической и уточненной постановкам, с уменьшением параметра  $n = \frac{\tau_s}{\sigma_s}$  будет расти.

Теперь рассмотрим следующий пример. Пусть  $m = 10$ ,  $n = 0.2$ ,  $\bar{P} = 0.1$ ,  $s = 10^3$ .

Из (2.1.12) и (2.1.10) для  $\bar{x}_0$  и постоянной толщины балки на участке доминирующего среза находим:

$$\bar{x}_0 = 0.906, \quad \bar{h} = 0.750 \quad (\bar{x}_0 \leq \bar{x} < 1)$$

В таблице приведены значения толщины и прогиба для некоторых сечений равнопрочной балки в классической постановке и равноблочной балки минимального объема при учете касательного напряжения. При этом прогибы вычислены без влияния поперечного сдвига, т.е. когда  $\chi = 0$ .

Табл. (2.1.4)

$\bar{x}$	0	0.151	0.302	0.453	0.604	0.755	0.906	0.906	0.937	0.961	1.000
$\bar{h}_{кл}$	2.449	2.257	2.046	1.811	1.541	1.212	0.750	0.750	0.612	0.433	0
$s\bar{w}_{кл}$	0	0.96	3.94	9.16	16.91	27.64	42.25	42.25	45.93	49.93	54.43
$\bar{h}$	2.499	2.324	2.111	1.891	1.629	1.328	0.927	0.750	0.750	0.750	0.750
$s\bar{w}$	0	0.15	1.75	5.36	10.99	18.84	29.20	29.20	31.93	34.93	38.10

На рисунке (2.1.5) пунктирной линией показана равнопрочная балка по классической теории ( $\bar{V}_{кл} = 16.330$ ), а сплошной линией – равнопрочная балка минимального объема при учете касательного напряжения ( $\bar{V}_{мин} = 17.312$ ).



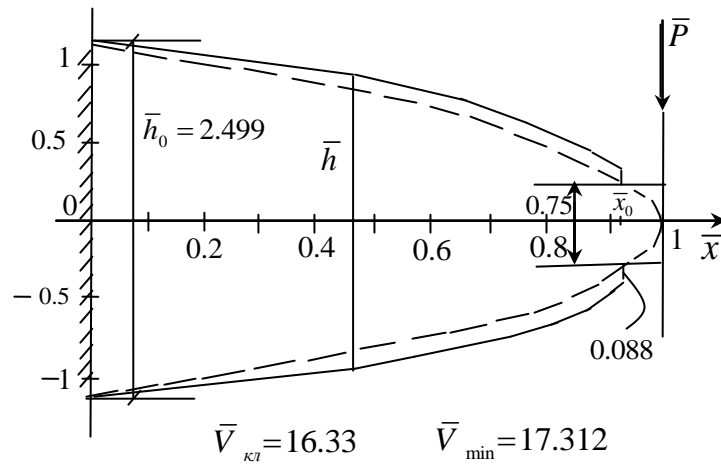


рис.2.1.5

Действительно, учет касательного напряжения приводит к утолщению балки, а следовательно, и к увеличению ее жесткости. Учет же влияния поперечного сдвига приводит к увеличению гибкости балки. Так как прочностные и деформативные свойства материалов не зависят друг от друга, то возможны случаи, когда любой из отмеченных факторов окажется преобладающим. В рассмотренном случае до  $\chi = 30$  преобладает фактор утолщения, а за  $\chi = 40$  - фактор увеличения гибкости балки.

В заключение отметим, что расхождение между проектами, соответствующими классической и уточненной постановкам, с уменьшением параметра  $n$  будет расти.

## §2.2 Уравнения цилиндрически-ортотропных пластин переменной толщины с учетом поперечных сдвигов

Пусть пластинка переменной толщины  $h$ , изготовленной из цилиндрически-ортотропно линейно упругого материала отнесена к системе цилиндрических координат  $r, \theta, z$  начало которых совпадает с полюсом ортотропии материала. Координатные линии  $r = \text{const}, \theta = \text{const}$  лежат на срединной плоскости пластинки, а ось  $z$  направлена вертикально вниз. Предположим, что на пластинку действуют только вертикальные поверхностные нагрузки. Интенсивность этих сил, приведенные к единице площади срединной плоскости, обозначим через  $Z^\pm$ . Пренебрегается влияния поперечного нормального напряжения  $\sigma_z$  и деформации

обжатия  $\varepsilon_z$ . Поперечные касательные напряжения  $\tau_{rz}$  и  $\tau_{\theta z}$  представляются в следующем виде [107]:

$$\tau_{rz} = \varphi_1 + z\varphi_2 + z^2\varphi_3, \quad \tau_{\theta z} = \psi_1 + z\psi_2 + z^2\psi_3, \quad (2.2.1)$$

где  $\varphi_i$  и  $\psi_i$  - функции зависящий от координат  $r, \theta$ . Для определения перемещения, внутренние усилия и моменты известны следующие формулы [107]:

$$u_r = u - z \left( \frac{\partial w}{\partial r} - a_r \varphi_1 \right), \quad u_\theta = v - \frac{z}{r} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} - a_\theta r \psi_1 \right) \quad (2.2.2)$$

$$T_r = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r dz = B_r h \left[ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \left( u + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right], \quad (2.2.3)$$

$$T_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta dz = B_\theta h \left[ \frac{1}{r} \left( u + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + v_r \frac{\partial u}{\partial r} \right], \quad (2.2.4)$$

$$S_{r\theta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{r\theta} dz = B_k h \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right], \quad (2.2.5)$$

$$N_r = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{rz} dz = \frac{h}{12} (12\varphi_1 + h^2\varphi_3), \quad (2.2.6)$$

$$N_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\theta z} dz = \frac{h}{12} (12\psi_1 + h^2\psi_3), \quad (2.2.7)$$

$$M_r = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r z dz = \frac{-B_r h^3}{12} \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{v_\theta}{r} \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - a_r \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right) - \left( \frac{v_\theta}{r} \left( a_r \varphi_1 + a_\theta \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \right) \right) \right], \quad (2.2.8)$$

$$M_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta z dz = \frac{-B_\theta h^3}{12} \left[ v_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - a_r v_r \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} - \frac{1}{r} \left( a_r \varphi_1 + a_\theta \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \right) \right], \quad (2.2.9)$$

$$M_{r\theta} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{r\theta} z dz = \frac{-B_k h^3}{12} \left[ \frac{2}{r} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) - \frac{a_r}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} - a_\theta \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial r} - \frac{\psi_1}{r} \right) \right], \quad (2.2.10)$$

Здесь  $B_r, B_\theta, B_k, a_r, a_\theta, \nu_r, \nu_\theta$  - известные параметры материала [29].

Для функций  $\varphi_2, \psi_2, \varphi_3$  и  $\psi_3$ , из условий на лицевых поверхностях пластинки  $z = \pm h/2$  имеем [107]:

$$\varphi_2 = \frac{1}{h} \left\{ B_r \left[ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\nu_\theta}{r} \left( u + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right] \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{B_k}{r} \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\nu}{r} \right) \frac{\partial h}{\partial \theta} \right\}, \quad (2.2.11)$$

$$\psi_2 = \frac{1}{h} \left\{ \frac{B_\theta}{r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} + \nu_r \frac{\partial u}{\partial r} \right] \frac{\partial h}{\partial \theta} + B_k \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\nu}{r} \right) \frac{\partial h}{\partial \theta} r \right\}, \quad (2.2.12)$$

$$\begin{aligned} \varphi_3 = \frac{1}{h^2} \left\{ -4\varphi_1 - B_r h \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu_\theta}{r} \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - a_r \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\nu_\theta}{r} \left( a_r \varphi_1 + a_\theta \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \right) \right] \frac{\partial h}{\partial r} + B_k h \left[ \frac{2}{r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + a_r \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} + a_\theta \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial r} - \frac{\psi_1}{r} \right) \right] \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} \right\}, \quad (2.2.13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_3 = \frac{1}{h^2} \left\{ -4\psi_1 - B_\theta h \left[ \nu_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. \frac{1}{r} \left( a_r \varphi_1 + a_\theta \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \right) - a_r \nu_r \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right] \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} + B_k h \left[ \frac{2}{r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + a_r \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} + a_\theta \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial r} - \frac{\psi_1}{r} \right) \right] \frac{\partial h}{\partial r} \right\}, \quad (2.2.14) \end{aligned}$$

Известна также систему разрешающих дифференциальных уравнений [107]:

а) для задачи обобщенного плоского напряженного состояния (ОПНС)

$$\begin{aligned}
& B_r h \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + B_k \frac{h}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + (B_k + \nu_\theta B_r) \frac{h}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} + B_r \left( \frac{h}{r} + \frac{\partial h}{\partial r} \right) \frac{\partial u}{\partial r} + \\
& + \frac{B_k}{r^2} \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{B_k}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \left[ B_r \nu_\theta \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{h}{r} (B_k + B_\theta) \right] \frac{\partial v}{\partial \theta} + \\
& + B_\theta \left( \nu_r \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{h}{r} \right) \frac{u}{r} - \frac{B_k}{r^2} \frac{\partial h}{\partial \theta} = 0,
\end{aligned} \tag{2.2.15}$$

$$\begin{aligned}
& B_\theta \frac{h}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + B_k h \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{B_k}{r^2} \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\partial v}{\partial \theta} + B_k \left( \frac{h}{r} + \frac{\partial h}{\partial r} \right) \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{B_k}{r} \left( \frac{h}{r} + \frac{\partial h}{\partial r} \right) v + \\
& + \frac{h}{r} \left( B_k + B_\theta \nu_r \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \left[ B_k \left( \frac{h}{r} + \frac{\partial h}{\partial r} \right) + B_\theta \frac{h}{r} \right] \frac{\partial u}{\partial \theta} + B_\theta \frac{\nu_r}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\partial u}{\partial r} + \\
& + \frac{B_\theta}{r^2} \frac{\partial h}{\partial \theta} u = 0
\end{aligned} \tag{2.2.16}$$

б) для задачи изгиба-

$$\begin{aligned}
& B_r h^2 K_1 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + B_k h^2 K_2 \left[ \frac{2}{r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \right) + \frac{a_r}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} + a_\theta \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \right] + \\
& + B_\theta K_3 \frac{h^2}{r} \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - rh \left( 8 + B_r a_r \frac{h}{r} K_1 \right) \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} - \\
& - r \left( 8 \frac{h}{r} + 16 \frac{\partial h}{\partial r} + B_\theta a_r \frac{h^2}{r^2} K_3 \right) \varphi_1 - h \left( 8 + B_\theta a_\theta \frac{h}{r} K_3 \right) \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} - \\
& - \left( 16 \frac{\partial h}{\partial \theta} + B_k a_\theta \frac{h^2}{r} K_2 \right) \psi_1 = 12rZ_2
\end{aligned} \tag{2.2.17}$$

$$\begin{aligned}
& B_r h^2 \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{h^2}{r^2} (B_r \nu_\theta + 2B_k) \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} + B_r h \left( \frac{h}{r} + 2 \frac{\partial h}{\partial r} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + 4 \frac{B_k h}{r^2} \frac{\partial h}{\partial \theta} + \\
& + \frac{h}{r^2} \left[ 2B_r \nu_\theta \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{h}{r} (B_r \nu_\theta + 2B_k + B_\theta) \right] \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{h}{r} \left( 2B_r \nu_\theta \frac{\partial h}{\partial r} - B_\theta \frac{h}{r} \right) \frac{\partial w}{\partial r} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -4 \frac{B_k h}{r^3} \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\partial w}{\partial \theta} - B_r a_r h^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} - B_k a_r \frac{h^2}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \theta^2} - B_r a_r h \left( \frac{h}{r} + 2 \frac{\partial h}{\partial r} \right) \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} - \\
& -2 \frac{B_k a_r h}{r^2} \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} + \left( 8 + B_\theta a_r \frac{h^2}{r^2} - 2 B_r a_r v_\theta \frac{h}{r} \frac{\partial h}{\partial r} \right) \varphi_1 - a_\theta \frac{h^2}{r} (B_r v_\theta + B_k) \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r \partial \theta} - \quad (2.2.18) \\
& -2 \frac{B_k a_\theta h}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} - \frac{a_\theta h}{r} \left[ 2 B_r v_\theta \frac{\partial h}{\partial r} - (B_k + B_\theta) \frac{h}{r} \right] \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta^2} + 2 \frac{B_k a_\theta h}{r^2} \frac{\partial h}{\partial \theta} \psi_1 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& B_\theta \frac{h^2}{r^3} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + \frac{h^2}{r} (B_r v_\theta + 2 B_k) \frac{\partial^3 w}{\partial r^2 \partial \theta} + 2 B_\theta \frac{h}{r^3} \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \\
& + \left( B_\theta \frac{h}{r} + 4 B_k \frac{\partial h}{\partial r} \right) \frac{h}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} + 2 B_\theta v_r \frac{h}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - 4 \frac{B_k h}{r^2} \frac{\partial h}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \\
& + 2 B_\theta \frac{h}{r^2} \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\partial w}{\partial r} - B_\theta a_\theta \frac{h^2}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta^2} - B_k a_\theta h^2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} - 2 B_\theta a_\theta \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} - \\
& - B_k a_\theta h \left( \frac{h}{r} + 2 \frac{\partial h}{\partial r} \right) \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \left[ 8 + B_k a_\theta \frac{h}{r} \left( \frac{h}{r} + 2 \frac{\partial h}{\partial r} \right) \right] \psi_1 - \\
& - (B_k + v_r B_\theta) \frac{h^2}{r} a_r \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r \partial \theta} - \frac{h}{r} a_r \left[ B_\theta \frac{h}{r} + B_k \left( \frac{h}{r} + 2 \frac{\partial h}{\partial r} \right) \right] \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} - \\
& - 2 B_\theta a_r v_r \frac{h}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} - 2 B_\theta a_r \frac{h}{r^2} \frac{\partial h}{\partial \theta} \varphi_1 = 0 \quad (2.2.19)
\end{aligned}$$

Здесь через  $K_i$  обозначены следующие выражения:

$$\begin{aligned}
K_1 &= r \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} + v_\theta \frac{\partial h}{\partial r}, \quad K_2 = 2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 h}{\partial r \partial \theta} \right), \\
K_3 &= v_r r \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} + \frac{\partial h}{\partial r}
\end{aligned} \quad (2.2.20)$$

С использованием выражений перемещений (2.2.2), внутренних усилий (2.2.3)- (2.2.7) и моментов (2.2.8)- (2.2.10), для краевых условий при  $r = \text{const}$  получены [107]:

а) условия свободного края-

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{v_\theta}{r} \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - a_r \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \left( a_r \varphi_1 + a_\theta \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \right) = 0, \quad (M_r = 0) \quad (2.2.21)$$

$$\frac{2}{r} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) - \frac{a_r}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} - a_\theta \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial r} - \frac{\psi_1}{r} \right) = 0, \quad (M_{r\theta} = 0), \quad (2.2.22)$$



$$\varphi_1 = 0, \quad (N_r = 0) \quad (2.2.23)$$

б) условия шарнирного опирания-

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - a_r \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \left( a_r \varphi_1 + a_\theta \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \right) = 0, \quad (M_r = 0), \quad (2.2.24)$$

$$\frac{2}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{a_r}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} - a_\theta \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial r} - \frac{\psi_1}{r} \right) = 0, \quad (M_{r\theta} = 0), \quad (2.2.25)$$

$$w = 0. \quad (2.2.26)$$

или

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - a_r \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} a_r \varphi_1 = 0, \quad (M_r = 0), \quad (2.2.27)$$

$$\psi_1 = 0 \quad (u_\theta = 0), \quad (2.2.28)$$

$$w = 0. \quad (2.2.29)$$

в) условия жесткой заделки-

$$\frac{\partial w}{\partial r} - a_r \varphi_1 = 0, \quad (u_r = 0), \quad (2.2.30)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} - a_\theta r \psi_1 = 0, \quad (u_\theta = 0), \quad (2.2.31)$$

$$w = 0. \quad (2.2.32)$$

Для определения поперечных касательных напряжений получены следующие формулы:

$$\begin{aligned} \tau_{rz} = & \frac{h^2 - 4z^2}{h^2} \varphi_1 - \frac{z^2}{h} \left\{ \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{v_\theta}{r} \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - a_r \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \left( a_r \varphi_1 + a_\theta \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \right) \right] \frac{\partial h}{\partial r} + \right. \\ & \left. + B_k \left[ \frac{2}{r} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) - \frac{a_r}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} - a_\theta \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial r} - \frac{\psi_1}{r} \right) \right] \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right\}, \end{aligned} \quad (2.2.33)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\theta z} = & \frac{h^2 - 4z^2}{h^2} \psi_1 - \frac{z^2}{h} \left\{ B_\theta \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + v_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \left( a_r \varphi_1 + a_\theta \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - a_r v_r \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right] \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} + B_k \left[ \frac{2}{r} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) - \frac{a_r}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} - a_\theta \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial r} - \frac{\psi_1}{r} \right) \right] \frac{\partial h}{\partial r} \right\} \end{aligned} \quad (2.2.34)$$

### §2.3 Об ортотропной кольцевой пластинке оптимальной линейно-переменной толщины

Вопросам оптимального проектирования упругих и упруго-пластических элементов конструкций посвящена обширная литература ([23], [37], [46], [56],[138], [139], [162], [165] и др.). В качестве критерия оптимальности принимаются различные условия: условие наименьшего объема, наименьшего значения наибольшего прогиба, равнопрочности, равноизгибаемости и т.д.

В настоящей параграфе рассматривается задача определения оптимальной линейно-переменной толщины ортотропной кольцевой пластинки заданного объема. Сплошная пластинка получается как частный случай кольцевой пластинки, когда радиус ее внутреннего контура стремится к нулю. В качестве критерия оптимальности принимается условие наименьшего значения наибольшего прогиба пластинки. Считается, что пластинка обладает слабыми сдвиговыми свойствами по поперечному направлению. Рассматривается случай действия равномерно распределенной нормальной нагрузки как при учете, так и пренебрежении собственного веса и влияния поперечного сдвига. Для конкретности считается, что внутренний контур пластинки свободен от нагрузок, а ее внешний контур шарнирно оперт. Однако, применяемый метод решения задачи позволяет рассмотреть и другие варианты нагрузок и краевых условий. Задача формулируется относительно безразмерных величин и решается численно. Отдельно рассматривается случай отсутствия поверхностной нагрузки, когда действует только собственный вес.

Приводятся таблицы и график окончательных результатов решения, на основе которых делаются количественные и качественные заключения.

1. Рассмотрим цилиндрически ортотропную кольцевую пластинку объема  $V$  с внутренним и внешним радиусами  $a$  и  $b$ . Пластинку отнесем к цилиндрической системе координат  $r\theta z$  так, чтобы координатная плоскость  $z\theta$  совпала с ее срединной плоскостью  $z = 0$ .

Рассмотрим множество линейно-переменных толщин пластинки

$$h = \beta h_0 + h_1 r \quad (2.3.1)$$

Здесь  $\beta$  и  $h_1$  – параметры, при которых толщина пластинки  $h$  принимает допустимые значения,  $h_0$  – средняя толщина –

$$h_0 = \frac{V}{\pi(b^2 - a^2)} \quad (2.3.2)$$

Для пластин фиксированного объема  $V$ , или фиксированной средней толщины  $h_0$  параметры  $\beta$  и  $h_1$  связаны соотношением:

$$h_1 = \frac{3(1-\beta)(a+b)h_0}{2(a^2 + ab + b^2)} \quad (2.3.3)$$

Примем обезразмеривающие обозначения:

$$\begin{aligned} z = h_0\delta, \quad a = kb, \quad r = b\rho, \quad s = \frac{h_0}{b}, \quad u_r = h_0\bar{u}_r \\ B_\theta = m^2 B_r, \quad B_r = n\sigma_0, \quad a_r\sigma_0 = \chi, \quad w = h_0\bar{w} \\ \frac{d\bar{w}}{d\rho} = \alpha, \quad \varphi_1 = \sigma_0\bar{\varphi}_1, \quad y = s\alpha - \chi\bar{\varphi}_1, \quad N_r = \sigma_0 h_0 \bar{N}_r \\ M_r = \sigma_0 h^2 \bar{M}_r, \quad M_\theta = \sigma_0 h_0^2 \bar{M}_\theta, \quad (v_\theta = v_r m^2), \quad h = h_0 H \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Здесь  $\sigma_0$  – характерное напряжение, играющее роль масштаба,  $u_r$  – радиальное перемещение,  $w$  – прогиб,  $v_r, v_\theta, B_r, B_\theta$  – механические параметры материала [29],  $N_r$  – поперечная сила,  $M_r, M_\theta$  – изгибающие моменты пластинки.

С учетом (2.3.1), (2.3.3) и (2.3.4) имеем:

$$H = \beta + \gamma\rho, \quad \gamma = \frac{3(1-\beta)(1+k)}{2(1+k+k^2)} \quad (2.3.5)$$

Рассмотрим конкретный случай, когда внутренний контур пластинки свободен от нагрузок, а внешний – шарнирно оперт.

Пусть пластинка несет равномерно распределенную нормальную поверхностную нагрузку интенсивности  $q$ , а плотность материала равна  $d$ .

Уравнение осесимметричного изгиба пластинки имеет вид [29]:

$$\frac{dN_r}{dr} + \frac{N_r}{r} = -q - \rho g dh \quad (2.3.6)$$

$$\frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r - M_\theta}{r} = N_r, \quad (2.3.7)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения. Решение уравнения (2.3.6) при краевом условии

$$N_r|_{r=a} = 0 \quad (2.3.8)$$

с учетом обозначений (2.3.4) имеет вид:

$$\bar{N}_r = -\frac{q^*(\rho^2 - k^2)}{2S\rho} - \frac{q_0^*}{6S\rho} \left[ 3\beta(\rho^2 - k^2) + 2\gamma(\rho^3 - k^3) \right] \quad (2.3.9)$$

Здесь

$$q^* = \frac{q}{\sigma_0}, \quad q_0^* = \frac{dgh_0}{\sigma_0} \quad (2.3.10)$$

Безразмерные величины  $\bar{u}_r$ ,  $\bar{N}_r$ ,  $\bar{M}_r$  и  $\bar{M}_\theta$  в рамках теории [107], учитывающей влияние деформаций поперечных сдвигов, с учетом (2.2.2)- (2.2.8) и (2.3.4) имеют вид:

$$\begin{aligned} \bar{u}_r = -\delta y, \quad \bar{N}_r = \frac{H}{12} \left[ 8\bar{\varphi}_1 - n\gamma s^2 H \left( \frac{dy}{d\rho} + v_r m^2 \frac{y}{\rho} \right) \right], \\ \bar{M}_r = -\frac{nSH^3}{12} \left( \frac{dy}{d\rho} + v_r m^2 \frac{y}{\rho} \right), \quad \bar{M}_\theta = -\frac{nSm^2 H^3}{12} \left( v_r \frac{dy}{d\rho} + \frac{y}{\rho} \right) \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

Приравняв выражения  $\bar{N}_r$  (2.3.9) и (2.3.11) для функции  $\bar{\varphi}_1$  получим:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_1 = \frac{n\gamma S^2 H}{8} \left( \frac{dy}{d\rho} + v_r m^2 \frac{y}{\rho} \right) - \frac{1}{4S\rho H} \left[ 3(q^* + \beta q_0^*)(\rho^2 - k^2) + \right. \\ \left. + 2q_0^* \gamma (\rho^3 - k^3) \right] \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

Имея в виду (2.3.9), (2.3.11) и учитывая обозначения (2.3.4), можно уравнение (2.3.7) привести к виду

$$\begin{aligned} H \frac{d^2 y}{d\rho^2} + \left( 3\gamma + \frac{H}{\rho} \right) \frac{dy}{d\rho} + m^2 \left( 3v_r \gamma - \frac{H}{\rho} \right) \frac{y}{\rho} = \\ = \frac{2}{nS^3 H^2 \rho} \left[ 3(q^* + \beta q_0^*)(\rho^2 - k^2) + 2q_0^* \gamma (\rho^3 - k^3) \right] \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

К этому уравнению следует присоединить краевые условия:

$$\left( \frac{dy}{d\rho} + \nu_r m^2 \frac{y}{\rho} \right)_{\substack{\rho=k \\ \rho=1}} = 0, \quad \left( M_r \Big|_{\substack{r=a \\ r=b}} = 0 \right) \quad (2.3.14)$$

После решения уравнения (2.3.13), безразмерные значения прогиба определяются формулой

$$\bar{w} = -\frac{1}{S} \int_{\rho}^1 (y + \chi \bar{\varphi}_1) d\rho, \quad (2.3.15)$$

Эта формула удовлетворяет условию равенства нулю прогиба на внешнем контуре пластинки  $\rho = 1$ .

Таким образом, определение прогибов пластинки заданной линейно-переменной толщины при учете влияния поперечного сдвига сводится к решению дифференциального уравнения (2.3.13) при краевых условиях (2.3.14).

2. Круглые кольцевые пластинки линейно-переменной толщины заданного объема образуют однопараметрическое бесконечное множество с безразмерной толщиной

$$H = \beta + \frac{3(1-\beta)(1+k)}{2(1+k+k^2)} \rho \quad (2.3.16)$$

Из условия положительности толщины для допустимого интервала изменения параметра этого множества  $\beta$  получим:

$$-\frac{3k(1+k)}{2-k-k^2} < \beta < \frac{3(1+k)}{1+k-2k^2}, \quad (0 \leq k < 1) \quad (2.3.17)$$

В таблице (2.3.1) представлены численные выражения интервала (2.3.17) при некоторых значениях „ $k$ ”.

Таблица (2.3.1)

$k = 0$	$k = 0,1$	$k = 0,2$	$k = 0,3$
$0 < \beta < 3$	$-0,175 < \beta < 3,055$	$-0,409 < \beta < 3,214$	$-0,727 < \beta < 3,482$

Численное определение оптимальной линейно-переменной толщины кольцевой (в том числе и сплошной) пластинки реализуется по следующей схеме.

Интервал (2.3.17), определенный для заданного значения безразмерного радиуса внутреннего контура пластинки „ $k$ ”, с достаточно малым шагом разбивается на равные части и для каждого промежуточного значения параметра  $\beta$  по описанному

выше методу определяется безразмерный прогиб  $\bar{w}$  как функция радиальной координаты  $\rho$ . Забегая вперед, отметим, что, как и следовало ожидать, в рассмотренной задаче наибольший прогиб всегда получается в центре сплошной пластинки  $\rho=0$  и на внутреннем контуре кольцевой пластинки  $\rho=k$ . Значение параметра  $\beta_0$ , соответствующее наименьшему значению наибольших прогибов  $\bar{W}_0^{\max}$  и определит оптимальную линейно-переменную толщину данной кольцевой пластинки (т.е. при данном значении „ $k$ ”). Хотя и описанный метод является численным, тем не менее, он приводит к вполне надежному и достаточно точному результату. Дело в том, что современные мощные компьютеры позволяют с умеренной затратой времени вычисления проводить при делении интервала (2.3.17)) на десятки тысячи частей.

На рис. (2.3.1) представлен график зависимости безразмерного наибольшего прогиба пластинки  $\bar{W}_0^{\max}$  от значения параметра  $\beta$  для случая  $k=0,2$   $m=2$ ,  $\chi=0, q^*=q_0^*=0,1$ . Из этого графика видно, что зависимость  $\bar{W}^{\max} = f(\beta)$  в этом случае имеет ярко выраженный минимум при  $\beta_0=1,593$ . Как показывают исследования, возможны и такие случаи, при которых эта зависимость в интервале (2.3.17) не имеет минимума и является монотонно возрастающей функцией. Очевидно, в таких случаях значение  $\beta_0$  совпадает с левой границей интервала (2.3.17). Такая ситуация имеет место, например, при  $k=0,2$ ;  $m=0,5$ ;  $m=1$ , когда  $q^*=0$ ;  $q_0^*=0,2$ . На рис.(2.3.2) представлен график одной такой зависимости.

В таблице (2.3.2) приведены некоторые результаты вычислений при значении характерного напряжения  $\sigma_0=1000Па$ . Рассмотрены три типа анизотропии материала:  $m=0,5$  ( $B_r=4B_0$ ),  $m=1$  ( $B_r=B_0$ ),  $m=2$  ( $B_r=0,25B_0$ ) при одном и том же значении коэффициента Пуассона  $\nu_r=0,3$ . Рассмотрены случаи сплошных ( $k=0$ ) и кольцевых ( $k=0,1; 0,2; 0,3$ ) пластинок, для каждой из которых приведены результаты вычислений как при пренебрежении, так и учете влияния поперечного сдвига и собственного веса.

Для сравнения приведены также значения безразмерных наибольших прогибов соответствующих пластин постоянной толщины. Таблица составлена для четырех вариантов безразмерной интенсивности поверхностной нагрузки  $q^*$  и параметра собственного веса  $q_0^*$ . Для наглядности на рис. (2.3.3) представлен радиальный разрез оптимальной кольцевой пластинки, когда  $m=0,5$ ;  $k=0,2$ ,  $q^* = q_0^* = 0,1$  как при пренебрежении ( $\chi=0$ ), так и учете поперечного сдвига ( $\chi=0,01$ ). С целью сравнения пунктирно показан еще и разрез соответствующей пластинки постоянной толщины. На рис.(2.3.4) для отмеченных пластинок представлены графики изменения безразмерных прогибов по радиальной координате  $\rho$ .

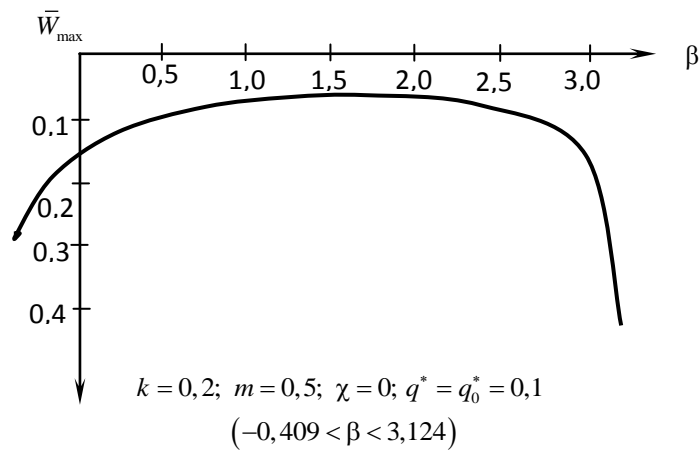


рис.2.3.1

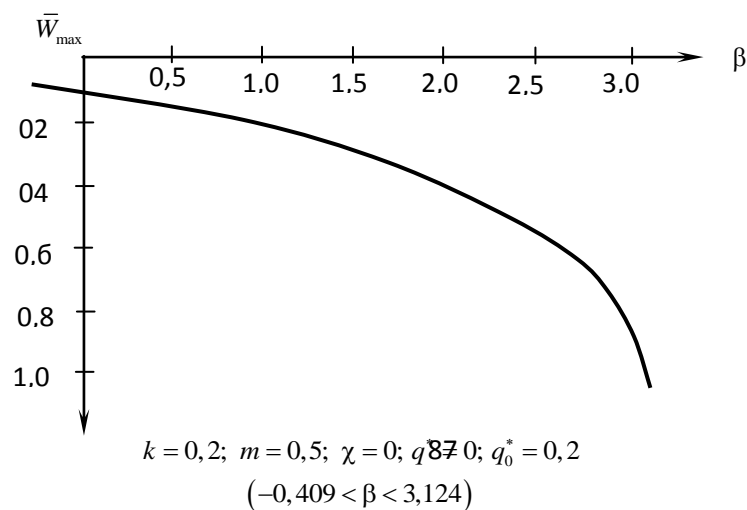


рис.2.3.2





Таблица (2.3.2)

			$m = 0,5$			$m = 1$			$m = 2$			
			Оптимальная Пластинка		Пластин. пост.тол	Оптимальная пластинка		Пласти н.пост.	Оптимальная пластинка		Пласт пост.т.	
			$\beta_0$	$\bar{W}_0^{\max}$	$\bar{W}^{\max}$	$\beta_0$	$\bar{W}_0^{\max}$	$\bar{W}^{\max}$	$\beta_0$	$\bar{W}_0^{\max}$	$\bar{W}^{\max}$	
$q^* = 0,2;$ $q_0^* = 0$	$k = 0$	$\chi=0$	1,100	0,233	0,234	1,460	0,146	0,154	1,515	0,074	0,082	
		$\chi=0.01$	1,150	0,281	0,282	1,515	0,192	0,202	1,548	0,120	0,130	
	$k = 0,1$	$\chi=0$	0,526	0,245	0,258	1,543	0,154	0,163	1,568	0,073	0,081	
		$\chi=0.01$	0,476	0,286	0,303	1,542	0,200	0,208	1,578	0,117	0,127	
	$k = 0,2$	$\chi=0$	0,191	0,182	0,217	1,163	0,157	0,158	1,763	0,070	0,083	
		$\chi=0.01$	0,141	0,214	0,257	0,923	0,198	0,198	1,743	0,110	0,123	
	$k = 0,3$	$\chi=0$	-0,125	0,116	0,156	0,114	0,118	0,129	2,034	0,067	0,081	
		$\chi=0.01$	-0,175	0,142	0,190	-0,006	0,145	0,163	1,984	0,102	0,115	
	$q^* = 0,1;$ $q_0^* = 0,1$	$k = 0$	$\chi=0$	0,611	0,227	0,234	1,121	0,153	0,154	1,331	0,078	0,082
			$\chi=0.01$	0,531	0,271	0,282	1,061	0,201	0,202	1,261	0,127	0,130
		$k = 0,1$	$\chi=0$	0,186	0,210	0,258	1,116	0,163	0,163	1,386	0,078	0,081
			$\chi=0.01$	0,146	0,243	0,303	0,916	0,208	0,208	1,306	0,124	0,127
$k = 0,2$		$\chi=0$	-0,097	0,147	0,217	0,183	0,147	0,158	1,593	0,076	0,083	
		$\chi=0.01$	-0,137	0,173	0,257	0,033	0,176	0,198	1,473	0,118	0,123	
$k = 0,3$		$\chi=0$	-0,426	0,091	0,156	-0,346	0,096	0,129	1,834	0,074	0,081	
		$\chi=0.01$	-0,466	0,111	0,190	-0,426	0,117	0,163	1,654	0,111	0,115	
$q^* = 0;$ $q_0^* = 0,2$		$k = 0$	$\chi=0$	0,031	0,179	0,234	0,561	0,149	0,154	1,100	0,082	0,082
			$\chi=0.01$	0,011	0,205	0,282	0,281	0,187	0,202	0,800	0,129	0,130
		$k = 0,1$	$\chi=0$	-0,175	0,129	0,258	-0,175	0,136	0,163	1,126	0,081	0,081
			$\chi=0.01$	-0,175	0,150	0,303	-0,175	0,157	0,208	0,926	0,127	0,127
	$k = 0,2$	$\chi=0$	-0,409	0,083	0,217	-0,409	0,089	0,158	1,391	0,081	0,083	
		$\chi=0.01$	-0,409	0,100	0,257	-0,409	0,106	0,198	1,041	0,123	0,123	
	$k = 0,3$	$\chi=0$	-0,727	0,049	0,156	-0,727	0,053	0,129	-0,727	0,073	0,081	
		$\chi=0.01$	-0,727	0,063	0,190	-0,727	0,066	0,163	-0,727	0,087	0,115	

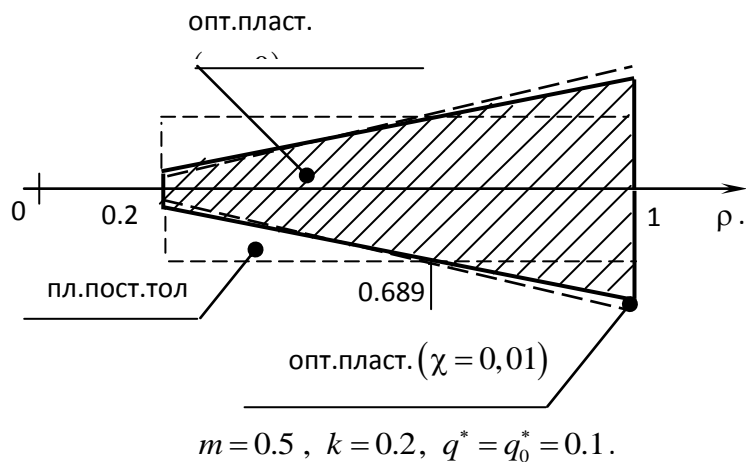
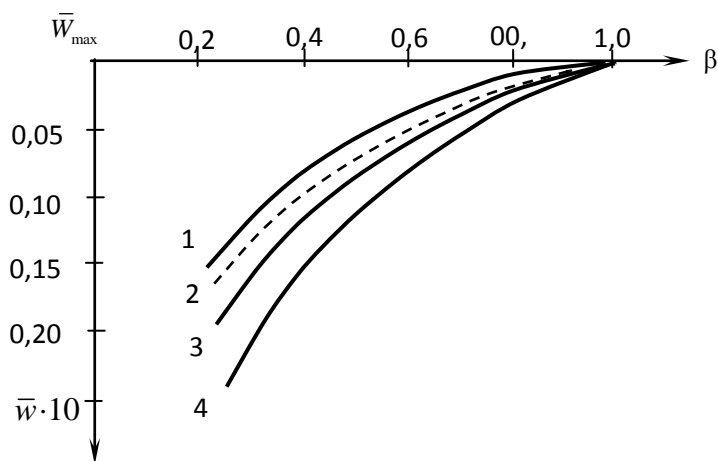


рис.2.3.3



1. оптимальная пластинка  $\chi = 0$ . 2. оптимальная пластинка  $\chi = 0.01$   
 3. пласт. пост. толщины  $\chi = 0$ . 4. пласт. пост. толщины  $\chi = 0.01$   
 $k = 0.2; m = 0.5; q^* = q_0^* = 0.1$

рис.2.3.4.

Данные таблицы и графики приводят к следующим заключениям.

1. Оптимальная форма пластинок зависит от анизотропии материала (значения  $m$ ), характера нагрузок (значений  $q^*$  и  $q_0^*$ ) и от относительного радиуса внутреннего контура пластинки (значения „ $k$ ”).
2. В случае  $m = 2(B_\theta = 4B_r)$ , когда действует только собственный вес  $q^* = 0; q_0^* = 0.2$  при  $k = 0; 0.1; 0.2$  функция  $\bar{W}^{\max} = f(\beta)$  в окрестности точки  $\beta = 1$  имеет очень слабо выраженный минимум. В силу этого соответствующие пластинки

постоянной толщины можно считать практически оптимальными. Аналогичная ситуация имеет место еще и в случае  $m = 0.5 (B_0 = 0.25B_r)$ , но когда пластинка сплошная ( $k \square 0$ ), собственный вес пренебрегается и действует только равномерно распределенная нормальная нагрузка  $q^* = 0.2; q_0^* = 0$ .

3. Во всех остальных случаях оптимальные пластинки заметно или существенно отличаются от соответствующих пластинок постоянной толщины. Один из таких случаев иллюстрирован на рис. (2.3.3), где представлены радиальные разрезы пластинки постоянной толщины и пластинки оптимальной толщины при учете и пренебрежении поперечного сдвига. В этом случае существенно отличаются еще и значения максимальных прогибов. Из графиков рис.(2.3.4) видно, что наибольший прогиб оптимальной пластинки примерно в 1,5 раза меньше, чем у соответствующей пластинки постоянной толщины. Однако, поправки к значению наибольшего прогиба от учета поперечного сдвига как для пластинки постоянной толщины, так и оптимальной толщины практически равны и составляют примерно 18%.

4. Во всех рассмотренных случаях оптимальная форма пластин практически не зависит от значения  $\chi$ , т.е. от того учитывается влияние поперечного сдвига или нет.

5. При  $B_r > B_0$  с приближением к внешнему контуру толщина оптимальной пластинки в основном возрастает. В случае же  $B_r < B_0$  имеет место обратная картина, т.е. с приближением к внешнему контуру толщина оптимальной пластинки убывает. Эта закономерность нарушается при достаточно большом радиусе внутреннего контура пластинки. В этом можно убедиться данными таблицы (2.3.2), относящимися случаю  $k = 0.3; m = 2; q^* = 0; q_0^* = 0.2$ . Тогда функция  $\bar{W}^{\max} = f(\beta)$  является монотонно возрастающей, в силу чего оптимальное значение параметра  $\beta_0$  совпадает с левой границей интервала (2.3.17). Картина сохраняется для более больших значений радиуса внутреннего контура пластинки.

## ГЛАВА III

### ПРИКЛАДНАЯ И ТЕХНИЧЕСКАЯ МОДЕЛИ УСТОЙЧИВОСТИ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК И КОЛОНН ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ПРИ УЧЕТЕ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА И СОБСТВЕННОГО ВЕСА

#### §3.1 Об устойчивости ортотропной цилиндрической оболочки линейно-переменной толщины при учете поперечного сдвига

В рамках уточнённой теории решается линейная задача статической устойчивости ортотропной цилиндрической оболочки линейно-переменной толщины. Рассматривается вопрос оптимальности. Показывается, что среди всех оболочек линейно-переменной толщины одинакового объёма при шарнирном опирании обоих торцов наибольшее критическое значение сжимающих сил имеет оболочка постоянной толщины.

Вопросам устойчивости оболочек посвящено много исследований, проведённых в рамках как классической ([65], [181] и др.), так и уточнённых теорий ([30] и др.) В настоящем параграфе в рамках уточнённой теории [111] рассматривается осесимметричная линейная задача устойчивости ортотропной замкнутой круговой цилиндрической оболочки линейно-переменной толщины, которая при различных торцевых условиях сжимается вдоль образующих равномерно распределёнными силами. Определение безразмерных критических значений сжимающих сил сводится к нахождению собственных чисел системы двух однородных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Пользуясь разработанным алгоритмом решения, рассматривается вопрос об определении оптимальной линейно-переменной толщины оболочки по критерию устойчивости. Показывается, что при шарнирном опирании обоих торцов из множества оболочек линейно-переменной толщины одинакового объёма наибольшее критическое значение сжимающих сил имеет оболочка постоянной толщины. Это заключение верно как при классической, так и уточнённой постановках задачи.

1. Рассмотрим замкнутую круговую цилиндрическую оболочку длины  $l$  и радиуса срединной поверхности  $R$ . Оболочку отнесём к системе ортогональных координат  $\alpha, \beta, \gamma$ . Координатные линии  $\alpha$  совпадают с образующими, а  $\gamma$  – перпендикулярны к срединной поверхности оболочки. Оболочка изготовлена из ортотропного линейно-упругого материала, главные направления анизотропии которого параллельны координатным линиям. Будем считать, что оболочка имеет линейно-переменную толщину. Такие оболочки одинакового объёма  $V$  образуют однопараметрическое множество толщины

$$h = \frac{h_0}{l} [2\alpha + \beta(l - 2\alpha)] \quad (3.1.1)$$

Здесь  $h_0 = V/2\pi Rl$  – средняя толщина оболочек. Безразмерный параметр  $\beta$  изменяется в пределах

$$0 < \beta < 2 \quad (3.1.2)$$

В случае одинаковых условий крепления торцевых сечений оболочки можно ограничиться рассмотрением только половины этого промежутка:  $0 < \beta \leq 1$ .

Пусть к торцевым сечениям оболочки  $\alpha = 0$  и  $\alpha = l$  вдоль образующих приложены сжимающие силы интенсивности  $P$ . Условия крепления торцов симметричны относительно оси оболочки. Рассмотрим осесимметричную задачу устойчивости в малом оболочки в рамках уточнённой теории [111].

Дифференциальные уравнения равновесия осесимметрично деформированной оболочки в усилиях и моментах имеют вид [30]:

$$\frac{dT_1}{d\alpha} = 0 \Rightarrow T_1 = -P, \quad -\frac{T_2}{R} + \frac{dN_1}{d\alpha} = P \frac{d^2 w}{d\alpha^2}, \quad \frac{dM_1}{d\alpha} - N_1 = 0 \quad (3.1.3)$$

Усилия  $T_1, T_2, N_1$  и изгибающий момент  $M_1$  имеют выражения [110]:

$$\begin{aligned} T_1 &= C_{11} \frac{du}{d\alpha} + C_{12} \frac{w}{R} - \frac{D_{11}}{R} \left( \frac{d^2 w}{d\alpha^2} - a_{55} \frac{d\varphi_1}{d\alpha} \right) - \frac{D_{12} w}{R^3}, \\ T_2 &= C_{22} \frac{w}{R} + C_{12} \frac{du}{d\alpha}, \quad M_1 = -D_{11} \left( \frac{d^2 w}{d\alpha^2} - a_{55} \frac{d\varphi_1}{d\alpha} - \frac{1}{R} \frac{du}{d\alpha} \right) \\ N_1 &= \frac{2}{3} h \varphi_1 - \frac{D_{11}}{h} \left( \frac{d^2 w}{d\alpha^2} - a_{55} \frac{d\varphi_1}{d\alpha} - \frac{1}{R} \frac{du}{d\alpha} \right) \frac{dh}{d\alpha} = \frac{2}{3} h \varphi_1 + \frac{M_1}{h} \frac{dh}{d\alpha} \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Здесь

$$C_{ij} = B_{ij}h, \quad D_{ij} = \frac{B_{ij}h^3}{12} \quad (3.1.5)$$

$B_{ij}, a_{55}$  – параметры материала.

Пренебрегая докритическим прогибом и учитывая, что при потере устойчивости оболочки сжимающие силы  $P$  остаются неизменными, для производной осевого перемещения, возникшего вследствие выпучивания оболочки, из первого уравнения (3.1.3) получим:

$$\frac{du}{d\alpha} = -\frac{B_{12}}{B_{11}R} \left(1 - \frac{h^2}{12R^2}\right) w + \frac{h^2}{12R} \left(\frac{d^2w}{d\alpha^2} - a_{55} \frac{d\varphi_1}{d\alpha}\right) \quad (3.1.6)$$

С учётом (3.1.3)÷(3.1.6) последние два уравнения системы (3.1.3) после выпучивания оболочки можно привести к виду:

$$S \left[12\bar{P} + mn^2 H^3 S^2\right] \frac{d^2\bar{w}}{d\bar{\alpha}^2} + n^2 SH \left[12q - m^2 (12 - n^2 H^2 S^2)\right] \bar{w} - \\ H \left(8 + \chi mn^2 H^2 S^2\right) \frac{d\bar{\varphi}_1}{d\bar{\alpha}} - 16t\bar{\varphi}_1 = 0 \quad (3.1.7)$$

$$S^3 H^2 (12 - n^2 S^2 H^2) \frac{d^3\bar{w}}{d\bar{\alpha}^3} + 4S^3 tH (6 - n^2 S^2 H^2) \frac{d^2\bar{w}}{d\bar{\alpha}^2} + \\ + mn^2 S^3 H^2 (12 - n^2 S^2 H^2) \frac{d\bar{w}}{d\bar{\alpha}} + 4mn^2 S^3 tH (6 - n^2 S^2 H^2) \bar{w} - \\ - \chi S^2 H^2 (12 - n^2 S^2 H^2) \frac{d^2\bar{\varphi}_1}{d\bar{\alpha}^2} - 4\chi S^2 tH (6 - n^2 S^2 H^2) \frac{d\bar{\varphi}_1}{d\bar{\alpha}} + 96\bar{\varphi}_1 = 0 \quad (3.1.8)$$

Здесь приняты обезразмеривающие обозначения:

$$\alpha = l\bar{\alpha}, \quad u = h_0\bar{u}, \quad w = h_0\bar{w}, \quad l = nR, \quad S = h_0/l, \quad h = h_0H, \\ H = \beta + t\bar{\alpha}, \quad t = 2(1 - \beta), \quad B_{12} = mB_{11}, \quad B_{22} = qB_{11}, \quad \chi = a_{55}B_{11}, \\ T_1 = B_{11}h_0\bar{T}_1, \quad T_2 = B_{11}h_0\bar{T}_2, \quad N_1 = B_{11}h_0\bar{N}_1, \quad M_1 = B_{11}h_0^2\bar{M}_1, \\ \varphi_1 = B_{11}\bar{\varphi}_1, \quad P = B_{11}h_0\bar{P} \cdot 10^{-3}, \quad V = \pi R l^2 \bar{V}, \quad \bar{V} = 2S \quad (3.1.9)$$

Это и есть система устойчивости безмоментного состояния рассматриваемой оболочки в рамках уточнённой теории [111].

Нетрудно заметить, что система дифференциальных уравнений (3.1.7), (3.1.8) имеет четвертый порядок.

К системе (3.1.7), (3.1.8) следует присоединить краевые условия оболочки. Приведём наиболее часто встречающиеся краевые условия в обозначениях (3.1.9).

а) свободный край:

Имея в виду (3.1.5) и (3.1.6), из (3.1.3) получим:

$$\bar{M}_1 = -\frac{SH^3}{12} \left( 1 - \frac{n^2 S^2 H^2}{12} \right) \left( S \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{\alpha}^2} - \chi \frac{d\bar{\varphi}_1}{d\bar{\alpha}} + mSn^2 \bar{w} \right), \quad \bar{N}_1 = \frac{2}{3} H \bar{\varphi}_1 + \bar{M}_1 St \quad (3.1.10)$$

С учётом этих выражений условия свободного края от опор будут:

$$\begin{aligned} S \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{\alpha}^2} - \chi \frac{d\bar{\varphi}_1}{d\bar{\alpha}} + mSn^2 \bar{w} &= 0, \quad (\bar{M}_1 = 0), \\ \bar{\varphi}_1 &= \frac{3S\bar{P}10^{-3}}{2H} \frac{d\bar{w}}{d\bar{\alpha}}, \quad \left( \bar{N}_1 = \frac{2}{3} H \bar{\varphi}_1 \right) \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

б) шарнирно опертый край:

$$\bar{w} = 0, \quad S \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{\alpha}^2} - \chi \frac{d\bar{\varphi}_1}{d\bar{\alpha}} = 0, \quad (\bar{M}_1 = 0) \quad (3.1.12)$$

в) защемлённый край:

$$\bar{w} = 0, \quad S \frac{d\bar{w}}{d\bar{\alpha}} - \chi \bar{\varphi}_1 = 0, \quad (\bar{u} = 0) \quad (3.1.13)$$

Таким образом, определение критических значений сжимающих сил  $\bar{P}$  в линейной постановке сводится к нахождению собственных значений чисел системы (3.1.7), (3.1.8) при соответствующих краевых условиях.

**2.** Рассмотрим случай, когда оба торца оболочки  $\bar{\alpha} = 0$ ,  $\bar{\alpha} = 1$  шарнирно оперты.

Задачу будем решать по методу коллокаций.

Положим:

$$\bar{w} = \sum_{i=1}^k a_i \sin i\pi\bar{\alpha}, \quad \bar{\varphi}_1 = \sum_{i=1}^k b_i \cos i\pi\bar{\alpha}, \quad (3.1.14)$$

Представления (3.1.14) удовлетворяют условиям шарнирного опирания (3.1.12). Разделив промежуток  $0 < \bar{\alpha} < 1$  на  $k+1$  части и в точках коллокаций, удовлетворив систему (3.1.7), (3.1.8) получим систему  $2k$  однородных уравнений. Собственными числами детерминанта этой системы и будут искомые критические значения  $\bar{P}$ . Исследования показывают, что для лучшей сходимости процесса вычислений целесообразно в качестве точек коллокаций брать корни многочлена Чебышева.

В нижеприведённой таблице представлены безразмерные значения критической силы  $\bar{P}$  для некоторых ортотропных оболочек линейно-переменных толщин одинакового объёма  $\bar{V} = 2S = 0,2$ . Как и следовало ожидать, учёт поперечного сдвига приводит к уменьшению критической силы.

На рис.(3.1.1–3.1.3) представлены графики зависимости критических значений от параметра  $\beta$ .

Как из данных таблицы, так и из графиков видно, что оптимальная оболочка по критерию устойчивости – это оболочка постоянной толщины  $\beta = 1$ .

Для изотропной ( $q=1$ ) оболочки постоянной толщины ( $\beta=1$ ) при неучёте поперечного сдвига ( $\chi = 0$ ) известна формула ([65], стр.389)

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{Eh}{R\sqrt{3(1-\nu^2)}}$$

В обозначениях (3.1.8) она принимает вид

$$\bar{P} = \sqrt{\frac{1-\nu^2}{3}} Sn \cdot 10^3$$

Таблица (3.1.1)

$S = 0,1$			$q = 0,5$		$q = 1$		$q = 2$	
			$n = 1$	$n = 2$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 1$	$n = 2$
$\chi = 0$	$\beta$	0,2	11,37	23,11	16,68	37,42	25,47	57,98
		0,4	19,67	36,95	27,56	57,99	40,59	85,89
		0,6	28,66	51,61	39,17	80,54	56,82	115,2
		0,8	37,18	64,93	49,65	103,7	71,96	146,5
		1	42,25	72,36	55,33	112,9	80,75	157,8
$\chi = 5$	$\beta$	0,2	9,94	18,83	14,16	28,19	20,47	41,09
		0,4	17,31	30,84	23,79	44,70	33,41	63,46
		0,6	25,10	43,68	34,02	61,64	47,29	85,65
		0,8	32,19	56,36	43,48	77,12	61,24	104,5
		1	36,35	64,68	49,08	87,30	68,75	110,9

При  $\nu = 0,3, S = 0,1, n = 1$  эта формула для критической сжимающей силы даёт безразмерное значение  $\bar{P} = 55,076$ . Соответствующее значение таблицы равно 55,326. Эти значения отличаются друг от друга менее 0,5%, что свидетельствует о высокой степени достоверности результатов, полученных по методу коллокаций.



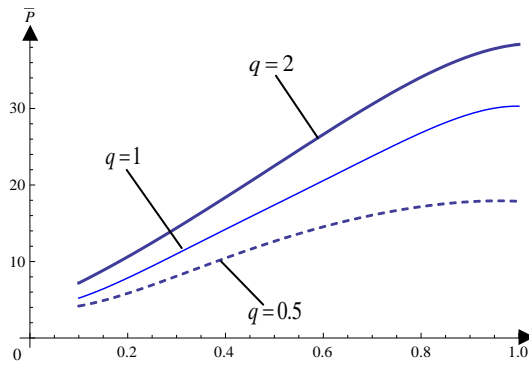


Рис.3.1.1

$n = 0.5; S = 0,1; \chi = 5$

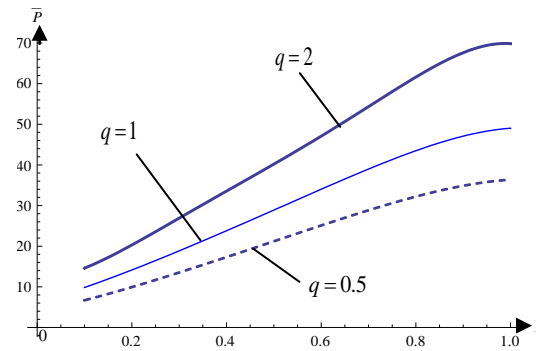


Рис.3.1.2

$n = 1; S = 0,1; \chi = 5$

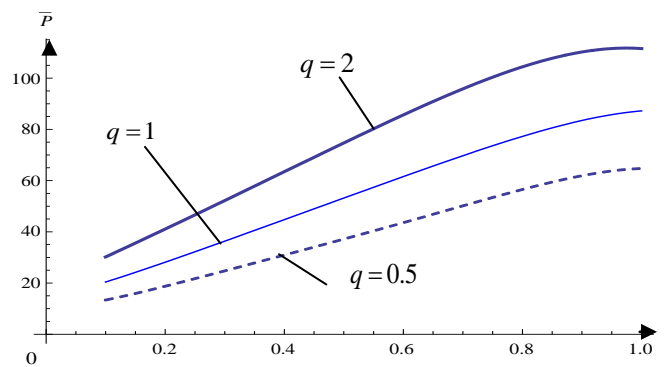


Рис.3.1.3

$n = 2; S = 0,1; \chi = 5$

3.

Расс

мотрим случай, когда оба торца оболочки  $\bar{\alpha} = 0, \bar{\alpha} = 1$  заделаны. Краевые условия оболочки будет

$$\bar{w} = 0, \quad S \frac{d\bar{w}}{d\bar{\alpha}} - \chi \bar{\varphi}_1 = 0, \quad (\bar{u} = 0). \quad (3.1.15)$$

Задачу будем решать по методу коллокаций. Представления (3.1.14) удовлетворяет первому условию заделки (3.1.15). Разделив промежуток  $0 < \bar{\alpha} < 1$  на  $k$  части и в точках коллокаций, удовлетворив систему (3.1.7), (3.1.8), а в торцах оболочки  $\bar{\alpha} = 0, \bar{\alpha} = 1$  второе условие (3.1.15), получим систему  $2k$  однородных уравнений. Собственные числа детерминанта этой системы и будут искомыми критические

значения  $\bar{P}$ . Снова для лучшей сходимости процесса вычислений в качестве точек коллокаций будем брать корни многочлена Чебышева.

После нахождения значения критической силы  $\bar{P}$  можно с точностью постоянного множителя определить форму потери устойчивости оболочки. Считая, например,  $a_1 = 1$  после отбрасывания одного уравнения из однородной системы (3.1.7), (3.1.8) получим неоднородную систему относительно остальных коэффициентов  $a_i (i = 2, \dots, k)$ . Решая эту систему определим значения этих коэффициентов, следовательно и форму потери устойчивости оболочки. Этим же способом можно определить еще и форму изменения по координате  $\bar{\alpha}$  функции  $\bar{\varphi}_1$  что позволит определить форму распределения поперечной силы.

В нижеприведенной таблице представлены безразмерные значения критической силы  $\bar{P}$  для некоторых ортотропных оболочек линейно-переменных толщин одинакового объема  $\bar{V} = 2S = 0,2$ . Как и следовало ожидать учет поперечного сдвига приводит к уменьшению критической силы.

Таблица (3.1.2)

S=0,1		$\chi = 0$		$\chi = 5$	
		$q = 0,5$		$q = 0,5$	
		$n = 0,5$	$n = 1$	$n = 0,5$	$n = 1$
$\beta$	0.2	16.82	28.90	13.19	23.49
	0.4	17.69	32.79	14.41	27.54
	0.6	19.53	38.62	16.35	33.54
	0.8	23.58	47.08	20.09	43.13
	1	31.28	55.73	27.09	49.63

Из данных таблицы, видно, что в этом случае тоже оптимальная оболочка по критерию устойчивости это оболочка постоянной толщины ( $\beta = 1$ ).

### §3.2 Об устойчивости ортотропной пластинки-полосы при учете собственного веса и поперечного сдвига

Методом коллокаций решается задача устойчивости ортотропной пластинки-полосы при учете собственного веса и поперечного сдвига. Применяется уточненная

теория анизотропных пластин С.А. Амбарцумяна [29]. Рассматриваются два варианта краевых условий. Приводятся безразмерные критические значения нагрузок. Анализируя полученные результаты, делаются количественные и качественные заключения.

В классической постановке (без учета влияния поперечного сдвига) решение рассматриваемых задач можно найти в [65].

1. Рассмотрим пластинку-полосу постоянной толщины  $h$  и ширины  $l$ . Начало координат поместим на одной кромке. Ось  $Ox$  направим по ширине пластинки-полосы, а ось  $Oz$  - перпендикулярно ей. Материал ортотропен и его главные направления параллельны координатным осям.

Пусть вдоль одного края пластинки-полосы приложены равномерно распределенные силы  $P$ , а вдоль оси  $Ox$  действует собственный вес постоянной интенсивности  $q$  (Рис.3.2.1 и 3.2.2). Применяемый метод и схема решения позволяют рассмотреть еще и случай объемной силы другого характера и переменной интенсивности.

Для простоты положим:

$$P = kql \quad (3.2.1)$$

где параметр « $k$ » может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Представление (3.2.1) удобно тем, что позволяет в качестве искомой величины считать критические значения одного из параметров  $k$  или  $q$ , между которыми существует определенная зависимость. Очевидно, при  $k = 0$  внешние силы  $P$  отсутствуют и потеря устойчивости происходит лишь под действием собственного веса. При  $k \neq 0$  пластинка-полоса теряет устойчивость под совместным действием внешних сил и собственного веса. При  $k \rightarrow \infty$  критическое значение  $q_{кр} \rightarrow 0$ , а их произведение стремится к конечной величине  $P_{кр}$ . В этом случае влияние собственного веса пренебрегается. Очевидно, возможны и случаи с отрицательными значениями  $k$ , что может иметь место при очень больших значениях  $l$  или  $q$ .

В рамках уточненной теории [29] имеем:

$$\begin{aligned}
T_x &= -q(kl + x), \quad N_x = \frac{h^3}{12}\varphi, \quad \tilde{Z} = -q(kl + x)\frac{d^2w}{dx^2}, \\
M_x &= -\frac{B_{11}h^3}{12}\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{h^5}{120}\chi\frac{d\varphi}{dx}, \quad \chi = \frac{B_{11}}{B_{55}}, \\
u_x &= -z\frac{dw}{dx} + \frac{zh^2}{24B_{55}}\left(3 - 4\frac{z^2}{h^2}\right)\varphi
\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Здесь  $T_x$  – продольное усилие начального состояния,  $N_x$  и  $M_x$  – перерезывающая сила и изгибающий момент, которые возникают после потери устойчивости пластинки-полосы.  $\tilde{Z}$  – нормальная составляющая фиктивной нагрузки,  $\varphi$  – функция, характеризующая распределение касательных напряжений  $\tau_{xz}$ ,  $u_x$  – перемещение по оси  $Ox$ , вызванное вследствие потери устойчивости,  $B_{ij}$  – механические параметры материала,  $w$  – прогиб пластинки-полосы.

После выпучивания состояние пластинки-полосы описывается уравнениями [29]:

$$\frac{dN_x}{dx} = -\tilde{Z}, \quad \frac{dM_x}{dx} = N_x \tag{3.2.3}$$

С учетом (3.2.2) уравнения (3.2.3) приводятся к системе относительно  $w$  и  $\varphi$ :

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dx} - \frac{12q}{h^3}(kl + x)\frac{d^2w}{dx^2} = 0, \\ \varphi - \frac{\chi h^2}{10}\frac{d^2\varphi}{dx^2} + B_{11}\frac{d^3w}{dx^3} = 0 \end{cases} \tag{3.2.4}$$

Примем обезразмеривающие обозначения:

$$\begin{aligned}
u_x &= h\bar{u}_x, \quad w = h\bar{w}, \quad x = l\bar{x}, \quad \frac{h}{l} = S, \quad \frac{\chi S^2}{10} = \alpha, \quad q = \frac{B_{11}\bar{q}S^3}{12} \\
T_x &= B_{11}h\bar{T}_x, \quad N_x = B_{11}h\bar{N}_x, \quad M_x = B_{11}h^2\bar{M}_x, \quad P = \frac{B_{11}\bar{P}S^3l}{12}, \quad \bar{P} = k\bar{q}
\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Дифференцируя второе уравнение системы (3.2.4) и имея в виду первое уравнение этой системы, приходим к следующему разрешающему дифференциальному уравнению четвертого порядка относительно безразмерного прогиба  $\bar{w}$ :

$$\left[1 - \alpha\bar{q}(k + \bar{x})\right]\frac{d^4\bar{w}}{d\bar{x}^4} - 2\alpha\bar{q}\frac{d^3\bar{w}}{d\bar{x}^3} + \bar{q}(k + \bar{x})\frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}^2} = 0 \tag{3.2.6}$$

К этому уравнению следует присоединить соответствующие краевые условия.

**2. Рассмотрим случай, когда край пластинки-полосы  $\bar{x} = 0$  заземлен, а край  $\bar{x} = 1$  шарнирно оперт (рис.3.2.1).**

Имея в виду первое уравнение системы (3.2.4), с учетом обозначений (3.2.5) для безразмерного изгибающего момента получим выражение

$$\bar{M}_x = -\frac{S^2}{12} [1 - \alpha \bar{q} (k + \bar{x})] \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} \quad (3.2.7)$$

Следовательно, условия шарнирного опирания края  $\bar{x} = 1$  будут:

$$\bar{w} = 0, \quad \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} = 0 \quad (M_x|_{\bar{x}=1} = 0) \quad (3.2.8)$$

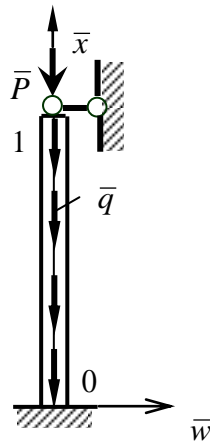


Рис.3.2.1

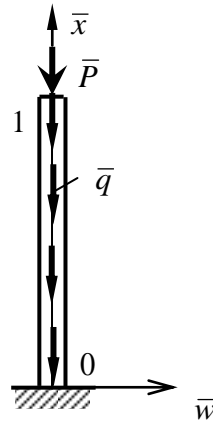


Рис.3.2.2

При потере устойчивости для безразмерного продольного перемещения с учетом (3.2.5) имеем:

$$\bar{u}_x = -\frac{z}{l} \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} + \frac{zh}{24B_{55}} \left( 3 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right) \varphi \quad (3.2.9)$$

Интегрировав первое уравнение системы (3.2.4), получим

$$\varphi = C + \frac{B_{11}h}{l^3} \bar{q} \left[ (k + \bar{x}) \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} - \bar{w} \right] \quad (3.2.10)$$

Здесь  $C$  – постоянная интегрирования. Ее значение следует определить из условий начального состояния пластинки-полосы, когда она еще не потеряла устойчивость. Тогда

$$\frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} \equiv \bar{w} \equiv 0 \quad (3.2.11)$$

Поскольку в плоском состоянии перерезывающая сила отсутствует, то

$$N_x^0 = \frac{Ch^3}{12} = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0 \quad (3.2.12)$$

Имея в виду это обстоятельство, из (3.2.9) получим

$$\bar{u}_x = -\frac{z}{l} \left\{ \left[ 1 - \frac{5\alpha\bar{q}}{12} \left( 3 - 4\frac{z^2}{h^2} \right) (k + \bar{x}) \right] \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} + \frac{5\alpha\bar{q}}{12} \left( 3 - 4\frac{z^2}{h^2} \right) \bar{w} \right\} \quad (3.2.13)$$

В сечении защемления  $\bar{w} = 0$ , в силу чего условия защемления будут:

при  $\bar{x} = 0$

$$\bar{w} = 0, \quad \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} = 0 \quad (3.2.14)$$

Таким образом, по теории [29], в отличие от обычной задачи изгиба, в задаче устойчивости пластинки-полосы удается условия защемления удовлетворять во всех точках сечения (для всех  $z$ ).

Безразмерный прогиб удобно представить в виде

$$\bar{w} = \sum_{i=2}^n a_i \bar{x}^i, \quad (3.2.15)$$

При котором условия защемления края  $\bar{x} = 0$  (3.2.11) удовлетворяются автоматически. Здесь  $a_i$  – неизвестные коэффициенты. Необходимо составить систему  $(n-2)$  однородных алгебраических уравнений и критическую интенсивность  $\bar{q}_{кр}$  определить как наименьший корень условия существования нетривиальных решений этой системы. Два уравнения получатся из условий шарнирного опирания края  $\bar{x} = 1$  (3.2.8), а остальные – из разрешающего уравнения (3.2.6), записанного в внутренних точках интервала 0-1. Для этого необходимо пластинку-полосу разделить на  $(n-2)$  части.

Удобно вычисления проводить для конкретных значений  $\chi$  и  $k$ . Очевидно, для разных чисел  $n$  получатся различные значения  $\bar{q}_{кр}$ . Вычисления следует прекратить при наступлении практической сходимости по  $n$ .

**3. Пусть край пластинки-полосы  $\bar{x} = 0$  защемлен, а край  $\bar{x} = 1$  свободен** (рис.3.2.2). Подставляя выражение (3.2.10) во второе уравнение системы (3.2.4), с учетом (3.2.12) и обозначений (3.2.5), приходим к разрешающему уравнению третьего порядка относительно безразмерного прогиба  $\bar{w}$ :

$$\left[ 1 - \alpha\bar{q}(k + \bar{x}) \right] \frac{d^3\bar{w}}{d\bar{x}^3} - \alpha\bar{q} \frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}^2} + \bar{q} \left[ (k + \bar{x}) \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} - \bar{w} \right] = 0 \quad (3.2.16)$$

Переход от уравнения (3.2.6) к уравнению (3.2.16) обусловлен удобством реализации решения задачи. Удобно безразмерный прогиб пластинки-полосы также представить в виде (3.2.15), который удовлетворяет условиям защемленного края  $\bar{x} = 0$  (3.2.14). Вычисления следует проводить подобно случаю, рассмотренному в предыдущем пункте. При этом одно уравнение разрешающей системы однородных алгебраических уравнений получится из условия свободного края

$$\left. \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} \right|_{\bar{x}=1} = 0 \quad (M_x|_{x=l} = 0) \quad (3.2.17)$$

Остальные же  $(n-3)$  уравнения получатся из уравнения (3.2.16), записанного в промежуточных точках интервала 0-1.

Аналогичным способом рассмотренные задачи можно решать и в случае переменной интенсивности собственного веса (или объемной силы другого характера).

В таблицах (3.2.1) и (3.2.2) представлены критические значения интенсивности собственного веса  $\bar{q}$  при некоторых значениях  $k$ ,  $\chi$  и  $n$ .

В таблице (3.2.3) приведены значения относительной поправки

$$\Delta = \frac{\bar{q}_{кл.} - \bar{q}}{\bar{q}_{кл.}} 100\% \quad (3.2.18)$$

На рисунках (3.2.3) и (3.2.4) приведены графики зависимости  $\bar{P} \square \bar{q}$  при двух значениях параметра  $\chi$ .

Таблица (3.2.1)

Таблица (3.2.2)

		$\chi$ $n$	3 – ш				3 – св.								
			0	2	3	5	$\chi$	0	2	3	5				
$k$	0	9	57,06	43,95	39,20	31,84	$k$	0	7	7,848	7,616	7,504	7,286		
		10	57,09	43,44	38,64	31,52			8	7,844	7,616	7,506	7,293		
		11	56,95	43,45	38,73	31,65			9	7,838	7,611	7,501	7,289		
	0,5	9	23,72	19,73	18,18	15,68		0,5	7	3,071	3,007	2,976	2,915		
		10	23,77	19,73	18,16	15,63			8	3,069	3,006	2,974	2,914		
		11	23,75	19,78	18,16	15,64			9	3,069	3,005	2,974	2,914		
			9	14,95	12,62	11,70		10,21			7	1,897	1,859	1,841	1,805

1	10	14,98	12,63	11,71	10,21	1	8	1,896	1,858	1,841	1,804
	11	14,97	12,63	11,71	10,10		9	1,896	1,858	1,840	1,804
3	9	6,025	5,151	4,803	4,229	3	7	0,748	0,734	0,727	0,713
	10	6,033	5,157	4,808	4,234		8	0,748	0,733	0,726	0,713
	11	6,032	5,157	4,807	4,233		9	0,748	0,733	0,726	0,713
5	9	3,772	3,234	3,019	2,664	5	5	0,462	0,453	0,449	0,440
	10	3,776	3,237	3,022	2,666		6	0,466	0,457	0,453	0,444
	11	3,776	3,237	3,022	2,666		7	0,466	0,457	0,456	0,444
10	9	1,949	1,675	1,565	1,383	10	5	0,238	0,233	0,231	0,227
	10	1,951	1,676	1,566	1,384		6	0,240	0,235	0,233	0,229
	11	1,951	1,676	1,566	1,384		7	0,240	0,235	0,233	0,228
100	9	0,201	0,173	0,162	0,143	100	5	0,025	0,024	0,024	0,023
	10	0,201	0,173	0,162	0,143		6	0,025	0,024	0,024	0,024
	11	0,201	0,173	0,162	0,143		7	0,025	0,024	0,024	0,024

Известно [101], что критическое значение сжимающей сосредоточенной силы стержня при пренебрежении собственного веса и влияния поперечного сдвига можно определить единой формулой, в которой вместо истинной длины  $l$  фигурирует приведенная длина  $l_0 = \mu l$ . Коэффициент приведения длины  $\mu$  зависит от краевых условий стержня. Пользуясь этим понятием, в случае  $k = 100$ ,  $\chi = 0$  имеем:

$$\frac{\bar{P}_{3-ш}}{\bar{P}_{3-св}} = \frac{\bar{q}_{3-ш}}{\bar{q}_{3-св}} = 8.197 \quad (3.2.19)$$

Здесь индекс «з-ш» означает «защемление-шарнирное опирание», а индекс «з-св.»-защемление-свободный. Пользуясь данными таблиц (3.2.1) и (3.2.2) в таблице (3.2.4)

представлены значения отношения  $\frac{\bar{q}_{3-ш}}{\bar{q}_{3-св}}$  для некоторых  $k$  и  $\chi$ .



Таблица 3.2.3

		$k$	0	0,5	1	3	5	10	100
3-ш	2		23,70	16,72	15,63	14,51	14,27	14,10	13,92
	3		31,99	23,54	21,78	20,31	19,97	19,73	19,53
	5		44,42	34,15	32,53	29,82	29,40	29,06	28,78
3-св.	2		2,90	2,09	2,00	1,94	1,95	1,92	1,92
	3		4,30	3,10	2,95	2,89	2,85	2,88	2,85
	5		7,00	5,05	4,85	4,72	4,72	4,67	4,47

Таблица 3.2.4

$k$	0	0,5	1	3	5	10	100
0	7,267	7,740	7,900	8,065	8,104	8,143	8,197
2	5,708	6,583	6,800	7,032	7,087	7,133	7,189
3	5,163	6,105	6,365	6,618	6,680	6,729	6,775
5	4,342	5,368	5,599	5,942	6,006	6,061	6,098

Данные этой таблицы показывают, что способ приведения длины применим только в случае пренебрежения собственного веса и влияния поперечного сдвига. С уменьшением доли сосредоточенной силы и относительного модуля поперечного сдвига материала погрешность, вносимая применением способа приведенной длины, существенно увеличивается. Например, при  $k = 0$ ,  $\chi = 5$  для отношения вместо 8,197 получается значение 4,342, т.е. в 1,89 раза меньше.

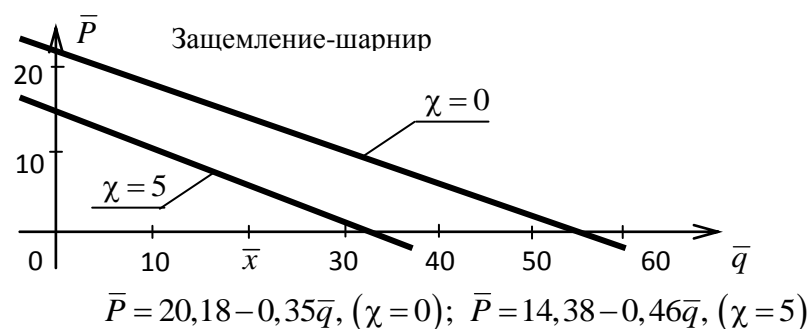


Рис.3.2.3

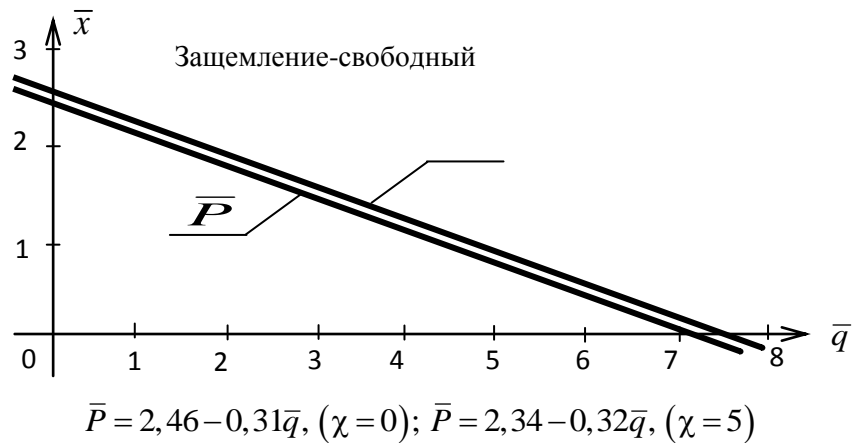


Рис.4.2.4

В заключение отметим, что полученные результаты при  $\chi = 0$ , т.е. в классической постановке, когда влияние поперечного сдвига не учитывается, совпадают с соответствующими результатами [65], [123].

Данные таблиц (3.2.1)÷(3.2.3) и рисунков (3.2.3), (3.2.4) приводят к следующим заключениям:

1. Процесс вычисления критических значений интенсивности собственного веса  $\bar{q}$  в случае, когда верхний край пластинки-полосы свободен (табл.3.2.2), достигается быстрее (при сравнительно меньшем значении  $n$ ), чем в случае шарнирного опирания этого края (табл.3.2.1). Это объясняется тем, что в первом случае имеется три краевых условия, из которых приближенно удовлетворяется только одно, в то время как во втором случае число краевых условий равно четырем, из которых приближенно удовлетворяются уже два условия.

2. С возрастанием доли сосредоточенной силы (с ростом значения параметра  $k$ ) сходимость процесса вычислений в рассмотренных двух случаях улучшается.

3. Как и следовало ожидать, с уменьшением относительного модуля поперечного сдвига материала (с возрастанием параметра  $\chi$ ) критические значения  $\bar{q}$  в обоих случаях краевых условий и любого отношения внешней силы  $P$  и собственного веса  $ql$  (значения параметра  $k$ ) уменьшаются (табл.3.2.3).

4. При одинаковых значениях параметров  $\chi$  и  $k$  как критические значения  $\bar{q}$ , так и относительная поправка  $\Delta$  (3.2.18) в случае «защемление-свободный» намного меньше, чем в случае «защемление-шарнир».

5. С возрастанием доли собственного веса (с уменьшением параметра  $k$ ) влияние поперечного сдвига для двух случаев краевых условий увеличивается. Например, значения относительной поправки  $\Delta$  при  $k=0$  для всех рассмотренных значений  $\chi$  примерно в полтора раза больше, чем при  $k=100$ .

6. Зависимость между критическими значениями сосредоточенной силы  $\bar{P}$  и интенсивности собственного веса  $\bar{q}$  является линейной (рис.(3.2.3), (3.2.4)).

7. Участки графиков рис. (3.2.3), и (3.2.4)  $\bar{q} < 0$  и  $\bar{P} < 0$  имеют определенный физический смысл. При потере устойчивости случаю очень больших сжимающих сил  $\bar{P}$  соответствуют растягивающие объемные силы  $\bar{q}$  и наоборот.

#### 4. Рассмотрим случай, когда оба края пластинки-полосы шарнирно оперты.

Для безразмерного изгибающего момента имеем выражение (3.2.7).

Следовательно, условия шарнирного опирания краев  $\bar{x}=0$  и  $\bar{x}=1$  будут:

$$\bar{w} = 0, \quad \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} = 0 \quad \left( M_x \Big|_{\substack{\bar{x}=0 \\ \bar{x}=1}} = 0 \right) \quad (3.2.20)$$

Безразмерный прогиб представим в виде

$$\bar{w} = a_1 \bar{x} + \sum_{i=3}^n a_i \bar{x}^i, \quad (3.2.21)$$

при котором краевые условия края  $\bar{x}=0$  удовлетворяются автоматически.

Здесь  $a_1$  и  $a_i$  – неизвестные коэффициенты. Необходимо составить систему  $(n-1)$  однородных уравнений и критическую интенсивность  $\bar{q}_{kp}$  определить из условия существования нетривиального решения этой системы. При этом два уравнения получатся из условий края  $\bar{x}=1$ , а остальные – из разрешающего уравнения (3.2.6), записанного в  $(n-3)$  внутренних точках интервала  $0-1$ . Для этого необходимо пластинку-полосу разделить на  $(n-2)$  части.

Удобно вычисления проводить для конкретных значений  $\chi$  и  $k$ . Очевидно, для разных чисел  $n$  получатся различные значения  $\bar{q}_{kp}$ . Вычисления следует повторить до наступления практической сходимости по  $n$ .

**5. Пусть оба края пластинки-полосы защемлены.** При потере устойчивости для безразмерного продольного перемещения с учетом (3.2.5) имеем:

$$\bar{u}_x = -\frac{z}{l} \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} + \frac{zh}{24B_{55}} \left( 3 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right) \varphi \quad (3.2.22)$$

Интегрировав первое уравнение системы (3.2.4), получим:

$$\varphi = C + \frac{B_{11}h}{l^3} \bar{q} \left[ (k + \bar{x}) \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} - \bar{w} \right] \quad (3.2.23)$$

Значение  $C$  – постоянного интегрирования можно определить из условий начального состояния пластинки-полосы, когда она еще не потеряла устойчивость. Следовательно с учетом (3.2.12) из (3.2.9), для  $\bar{u}_x$  получим выражение (3.2.13).

В сечении защемления  $\bar{w} = 0$ , в силу чего условия защемления будут

$$\text{при } \bar{x} = 0 \text{ и } \bar{x} = 1; \quad \bar{w} = 0; \quad \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} = 0 \quad (3.2.24)$$

Таким образом, по теории [29] в отличие от обычной задачи изгиба, в задаче устойчивости пластинки-полосы удастся условия защемления удовлетворить во всех точках сечения (для всех  $z$ ).

Безразмерный прогиб удобно представить в виде

$$\bar{w} = \sum_{i=2}^n a_i \bar{x}^i, \quad (3.2.25)$$

при котором условия защемления края  $\bar{x} = 0$  удовлетворяются автоматически. Вычисления следует проводить подобно случаю, когда оба края пластинки-полосы были шарнирно оперты.

Не вдаваясь в подробности отметим, что как разрешающее уравнение (3.2.6), так и краевые условия совпадают с разрешающим уравнением и краевыми условиями, соответствующими сдвиговой теории первого порядка Рейснера [219], с поправочным коэффициентом 5/6.

Аналогичным способом рассмотренную задачу можно решать и в случае переменной интенсивности собственного веса (или объемной силы другого характера).

В таблица (3.2.5) представлены критические значения интенсивности собственного веса  $\bar{q}$  при некоторых значениях  $k, \chi$  и  $n$ . Сходимость процесса вычислений практически достигается при  $n = 12$ . Наибольшая разница между значениями  $\bar{q}$ , а

следовательно и  $\bar{P} = k\bar{q}$ , соответствующими числам  $n=11$  и  $n=12$ , составляет примерно 1,27%. Как и следовало ожидать, с возрастанием параметра  $\chi$  (с уменьшением относительного модуля поперечного сдвига материала) критическое значение  $\bar{q}$  убывает.

Таблица (3.2.5)

		n \ \chi	Шарнир-шарнир				Защемление-защемление			
			0	2	3	5	0	2	3	5
k	0	10	18,95	17,14	16,65	15,38	79,99	56,21	48,59	37,77
		11	18,95	17,36	16,65	15,38	80,20	56,19	48,53	37,70
		12	18,96	17,36	16,65	15,38	80,27	56,23	48,51	37,67
	0,5	10	9,765	9,020	8,688	8,089	39,60	29,47	26,05	21,06
		11	9,765	9,021	8,688	8,089	39,62	29,48	26,06	21,06
		12	9,765	9,021	8,688	8,089	39,62	29,49	26,06	21,05
	1	10	6,548	6,060	5,842	5,448	26,36	19,84	17,63	14,39
		11	6,548	6,060	5,842	5,448	26,36	19,84	17,64	14,39
		12	6,548	6,060	5,842	5,448	26,36	19,85	17,64	14,40
	3	10	2,817	2,610	2,518	2,351	11,28	8,560	7,636	6,277
		11	2,817	2,610	2,518	2,351	11,28	8,560	7,636	6,277
		12	2,817	2,610	2,518	2,351	11,28	8,560	7,637	6,276
	5	10	1,794	1,662	1,604	1,498	7,179	5,452	4,866	4,004
		11	1,794	1,662	1,604	1,498	7,179	5,452	4,866	4,004
		12	1,794	1,662	1,604	1,498	7,179	5,452	4,866	4,004
	10	10	0,9398	0,8710	0,8403	0,7850	3,761	2,857	2,551	2,100
		11	0,9399	0,8711	0,8403	0,7849	3,760	2,857	2,551	2,100
		12	0,9399	0,8711	0,8403	0,7849	3,760	2,857	2,551	2,101
	100	10	0,0982	0,0910	0,0880	0,0820	0,3930	0,2985	0,2665	0,2195
		11	0,0982	0,0910	0,0878	0,0820	0,3929	0,2986	0,2666	0,2195
		12	0,0982	0,0910	0,0878	0,0820	0,3928	0,2986	0,2666	0,2195

В таблица (3.2.6) приведены значения относительной поправки

$$\Delta = \frac{\bar{q}_{кл.} - \bar{q}}{\bar{q}_{кл.}} 100\%, \quad (3.2.26)$$

вносимой учетом поперечного сдвига. При одинаковых условиях поправка к классическому значению  $\bar{q}_{кл.}$  в случае защемления обоих краев пластинки-полосы примерно в три раза больше, чем в случае их шарнирного опирания. Причем, с возрастанием доля сосредоточенной силы (с возрастанием параметра  $k$ ) влияние поперечного сдвига для двух случаев краевых условий немного уменьшается.

На рисунках (3.2.5) и (3.2.6) приведены графики зависимости  $\bar{P} \square \bar{q}$  для случаев шарнирного опирания и защемления обоих краев пластинки-полосы при двух значениях параметра  $\chi$ .

На основе таблицы (3.2.5) составлена таблица (3.2.7), данные которой приводят к следующим заключениям:

1. В классической постановке ( $\chi = 0$ ), при действии только собственного веса ( $k = 0$ ), критическое значение  $\bar{q}$  при защемлении обоих краев пластинки-полосы по сравнению со случаем шарнирного опирания больше не в 4, а в 4,23 раза ( $\bar{q}_3/\bar{q}_{uu} = 4,23$ ). С увеличением доли сосредоточенной силы (с возрастанием « $k$ ») это отношение убывает и при  $k \rightarrow \infty$ , когда влияние собственного веса пренебрегается, оно, как и следовало ожидать, стремится к 4.

Таблица.(3.2.6)

		$k \backslash \chi$	0	0,5	1	3	5	10	100
Ш-Ш	2		8,44	7,62	7,45	7,35	7,35	7,32	7,32
	3		12,2	11,03	10,8	10,6	10,6	10,6	10,6
	5		18,9	17,2	16,8	16,5	16,5	16,5	16,5
3-3	2		29,9	25,6	24,7	24,1	24,1	24,0	24,0
	3		39,6	34,2	33,1	32,3	32,2	32,1	32,1
	5		53,1	46,9	45,4	44,4	44,2	44,1	44,1

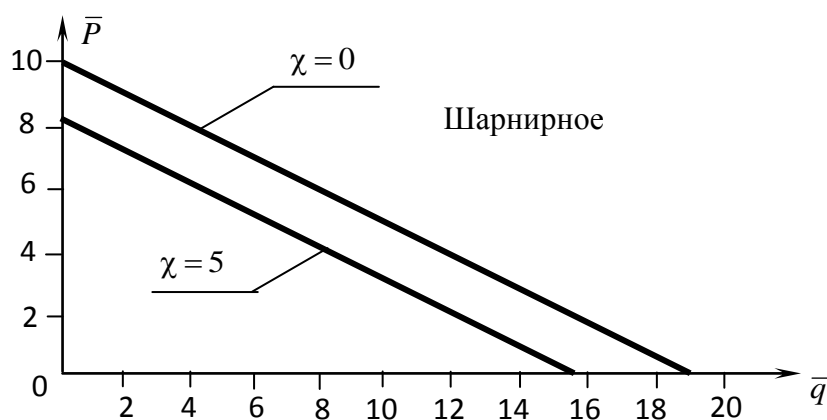


Рис3.2.5  $\bar{P} = 9,87 - 0,52\bar{q}$ , ( $\chi = 0$ );  $\bar{P} = 8,21 - 0,53\bar{q}$ , ( $\chi = 5$ )

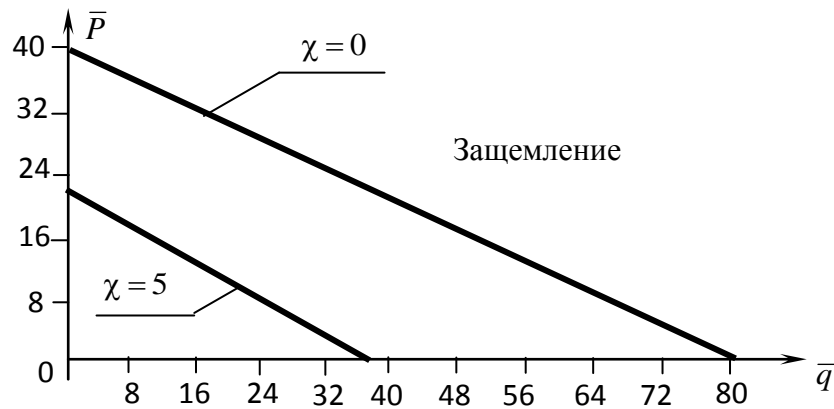


Рис3.2.6  $\bar{P} = 39,28 - 0,49\bar{q}$ , ( $\chi = 0$ );  $\bar{P} = 21,95 - 0,58\bar{q}$ , ( $\chi = 5$ )

Таблица (3.2.7)

		$\chi$				
		0	2	3	5	
$\frac{\bar{q}_3}{\bar{q}_{ш}} = \frac{\bar{P}_3}{\bar{P}_{ш}}$	$k$	0	4,23	3,24	2,91	2,45
		0,5	4,06	3,27	3,00	2,60
		1	4,03	3,27	3,02	2,64
		3	4,00	3,28	3,03	2,67
		5	4,00	3,28	3,03	2,67
		10	4,00	3,28	3,03	2,68
		100	4,00	3,28	3,04	2,68

2. С возрастанием  $\chi$  отношение  $\bar{q}_3/\bar{q}_{ш}$  для всех « $k$ » убывает. Следовательно, с уменьшением относительного модуля поперечного сдвига материала влияние защемления краев пластинки-полосы ослабевают. Это и естественно.

3. При отличном от нуля значении  $\chi$  с возрастанием « $k$ » (с увеличением доля сосредоточенной силы) это отношение немного возрастает.

В заключение отметим, что полученные результаты при  $\chi = 0$ ,  $k = 0$  т.е. в классическом случае, когда влияние поперечного сдвига не учитывается, совпадают с соответствующими результатами [65].

Рассмотренные задачи можно приближенно решить по методу Бубнова-Галеркина. В случае шарнирного опирания краев пластинки-полосы кинематически возможные прогибы  $w = \sin \pi x$  для критических значений  $\bar{q}$  приводят к формуле

$$\bar{q} = \frac{2\pi^2}{(1+2k)(1+\alpha\pi^2)} \quad (3.2.27)$$

В случае же защемления при  $w = \sin^2 \pi x$  получается

$$\bar{q} = \frac{8\pi^2}{(1+2k)(1+4\alpha\pi^2)} \quad (3.2.28)$$

При пренебрежении собственного веса и влияния поперечного сдвига имеем  $\chi = 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ ,  $\bar{q} \rightarrow 0$  и  $\bar{P} = k\bar{q}$  стремится к точному значению – в случае шарнирного опирания к  $\pi^2$ , а в случае защемления – к  $4\pi^2$ .

В случае действия только собственного веса, когда учитывается влияние поперечного сдвига, эти формулы приводят к ощутимым погрешностям. Например, при  $k = 0$ ,  $\chi = 5$  погрешности формул (3.2.27) и (3.2.28) составляют 7,2% и 17,1% соответственно. Для улучшения результатов метода Бубнова-Галеркина следует использовать многочленные выражения кинематически возможных прогибов, что связано с серьезными осложнениями.

### **§3.3 Уточненная техническая модель ортотропных оболочек переменной толщины**

Существует обширная литература ([3], [29], [30], [60], [62], [63], [79], [91], [105],[111] и др.), посвященная классической и уточненным теориям анизотропных пластин и оболочек, а также их многочисленным приложениям. В настоящем параграфе строится техническая уточненная теория ортотропных оболочек переменной толщины. Приводится конкретный пример приложения со сравнением значений расчетных величин ортотропной цилиндрической оболочки линейно-переменной толщины, полученных по предложенной теории и по общей уточненной теории [111].

1. Рассмотрим оболочку переменной толщины  $h$ , изготовленную из криволинейно ортотропного линейно-упругого материала. Оболочку отнесем к системе криволинейных ортогональных координат  $\alpha, \beta, \gamma$ . Координатные линии  $\alpha, \beta$  совпадают с линиями главной кривизны срединной поверхности оболочки, а



координатная линия  $\gamma$  в любой точке перпендикулярна линиям  $\alpha, \beta$  и составляет с ними правую систему. Координатные линии совпадают с главными направлениями анизотропии материала.

Будем считать, что оболочка или полая, или замкнутая, но достаточно короткая, в силу чего может быть рассмотрена на уровне технической теории.

Пусть на единицу площади лицевых поверхностей оболочки действуют поверхностные нагрузки, проекции которых на координатные линии составляют  $X^\pm, Y^\pm, Z^\pm$ . Здесь и в дальнейшем знаками „+” и „-” будем отмечать величины, относящиеся к лицевым поверхностям оболочки  $\gamma = +h/2$  и  $\gamma = -h/2$  соответственно. Считаем, что кроме поверхностных сил действует еще и объемная сила с проекциями  $P_\alpha, P_\beta, P_\gamma$ .

Попытаемся построить уточненную техническую теорию ([30], стр. 50,51), способную учитывать влияние деформаций поперечных сдвигов. При этом влиянием нормального напряжения  $\sigma_\gamma$  и деформации  $e_\gamma$  будем пренебрегать. Деформации оболочки будем считать настолько малыми, чтобы можно было ограничиться геометрически линейной постановкой.

Воспользуемся методом представления решений в виде степенных многочленов по поперечной координате  $\gamma$ . Имея в виду дифференциальные уравнения равновесия сплошной среды [30], написанные в принятой системе криволинейных координат, заключаем, что для соблюдения одинакового порядка, в многочленах основных напряжений  $\sigma_\alpha, \tau_{\alpha\beta}, \sigma_\beta$ , следует удержать по одному члену меньше, чем в многочленах касательных напряжений  $\tau_{\alpha\gamma}, \tau_{\beta\gamma}$ . Очевидно, что для построения самой простой теории в многочленах основных напряжений необходимо удержать лишь два члена, т.е. для этих напряжений принимать линейные законы распределения по толщине оболочки. В рамках технической теории это влечет за собой линейность распределения по толщине оболочки основных деформаций  $e_\alpha, e_{\alpha\beta}, e_\beta$ , а следовательно, и тангенциальных перемещений  $u_\alpha, u_\beta$ . Тогда в многочленах касательных напряжений  $\tau_{\alpha\gamma}, \tau_{\beta\gamma}$  следует удерживать по три члена, т.е. для них принимать параболические законы распределения по толщине оболочки. Итак, в качестве основной гипотезы примем:

$$\tau_{\alpha\gamma} = \varphi_1 + \gamma\varphi_2 + \gamma^2\varphi_3, \quad \tau_{\beta\gamma} = \psi_1 + \gamma\psi_2 + \gamma^2\psi_3 \quad (3.3.1)$$

Здесь  $\varphi_i$  и  $\psi_i$  – искомые функции координат  $\alpha, \beta$ , в качестве которых будем принимать длину, подсчитанную вдоль соответствующих координатных линий. В силу этого для коэффициентов первой квадратичной формы срединной поверхности оболочки имеем:

$$A = B = 1. \quad (3.3.2)$$

С учетом (3.3.1), геометрически линейных соотношений [30] и обобщенного закона Гука ортотропного тела с точностью технической теории можно написать

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \gamma} + \frac{\partial w}{\partial \alpha} &= a_{55} (\varphi_1 + \gamma\varphi_2 + \gamma^2\varphi_3) \\ \frac{\partial u_\beta}{\partial \gamma} + \frac{\partial w}{\partial \beta} &= a_{44} (\psi_1 + \gamma\psi_2 + \gamma^2\psi_3) \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Здесь  $u_\alpha, u_\beta, w$  – перемещения,  $a_{44}, a_{55}$  – упругие постоянные материала оболочки.

Интегрировав (3.3.3) по  $\gamma$ , после сохранения только линейных членов, получим

$$u_\alpha = u - \gamma \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} - a_{55} \varphi_1 \right), \quad u_\beta = v - \gamma \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} - a_{44} \psi_1 \right), \quad (3.3.4)$$

где  $u, v$  – тангенциальные перемещения срединной поверхности оболочки.

Подставляя (3.3.4) в геометрические соотношения, для основных деформаций можно написать:

$$\begin{aligned} e_\alpha &= \frac{\partial u}{\partial \alpha} + k_1 w - \gamma \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - a_{55} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha} \right) \\ e_\beta &= \frac{\partial v}{\partial \beta} + k_2 w - \gamma \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - a_{44} \frac{\partial \psi_1}{\partial \beta} \right) \\ e_{\alpha\beta} &= \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \gamma \left( 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} - a_{55} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \beta} - a_{44} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha} \right) \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Через  $k_1$  и  $k_2$  обозначены главные кривизны срединной поверхности оболочки.

Из закона Гука для основных напряжений оболочки с учетом (3.3.5) получим:

$$\sigma_\alpha = B_{11} \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} + k_1 w \right) + B_{12} \left( \frac{\partial v}{\partial \beta} + k_2 w \right) - \gamma \left[ B_{11} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - a_{55} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha} \right) + B_{12} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - a_{44} \frac{\partial \psi_1}{\partial \beta} \right) \right], \quad (3.3.6)$$

$$\sigma_\beta = B_{22} \left( \frac{\partial v}{\partial \beta} + k_2 w \right) + B_{12} \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} + k_1 w \right) - \gamma \left[ B_{22} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - a_{44} \frac{\partial \psi_1}{\partial \beta} \right) + B_{12} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - a_{55} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha} \right) \right] \quad (3.3.7)$$

$$\tau_{\alpha\beta} = B_{66} \left[ \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \gamma \left( 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} - a_{55} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \beta} - a_{44} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha} \right) \right] \quad (3.3.8)$$

Внутренние усилия и моменты оболочки с учетом (3.3.6)-(3.3.8) в рамках технической теории определяются формулами

$$T_1 = C_{11} \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} + k_1 w \right) + C_{12} \left( \frac{\partial v}{\partial \beta} + k_2 w \right) \quad (3.3.9)$$

$$T_2 = C_{22} \left( \frac{\partial v}{\partial \beta} + k_2 w \right) + C_{12} \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} + k_1 w \right), \quad S = C_{66} \left( \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right)$$

$$M_1 = -D_{11} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - a_{55} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha} \right) - D_{12} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - a_{44} \frac{\partial \psi_1}{\partial \beta} \right) \quad (3.3.10)$$

$$M_2 = -D_{22} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - a_{44} \frac{\partial \psi_1}{\partial \beta} \right) - D_{12} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - a_{55} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha} \right) \quad (3.3.11)$$

$$H = -D_{66} \left( 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} - a_{55} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \beta} - a_{44} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha} \right)$$

$$N_1 = \frac{h}{12} [12\varphi_1 + h^2(\varphi_3 + k_2\varphi_2)], \quad N_2 = \frac{h}{12} [12\psi_1 + h^2(\psi_3 + k_1\psi_2)] \quad (3.3.12)$$

Здесь, как обычно

$$C_{ij} = B_{ij} h, \quad D_{ij} = \frac{B_{ij} h^3}{12} \quad (3.3.13)$$

Коэффициенты  $B_{ij}$  выражаются через упругие постоянные материала по известным формулам [30].

Условия на лицевых поверхностях оболочки имеют вид

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha}^{\pm} l^{\pm} + \tau_{\alpha\beta}^{\pm} m^{\pm} + \tau_{\alpha\gamma}^{\pm} n^{\pm} &= X^{\pm} \\
\tau_{\alpha\beta}^{\pm} l^{\pm} + \sigma_{\beta}^{\pm} m^{\pm} + \tau_{\beta\gamma}^{\pm} n^{\pm} &= Y^{\pm} \\
\tau_{\alpha\gamma}^{\pm} l^{\pm} + \tau_{\beta\gamma}^{\pm} m^{\pm} + \sigma_{\gamma}^{\pm} n^{\pm} &= Z^{\pm}
\end{aligned} \tag{3.3.14}$$

Здесь  $l^{\pm}, m^{\pm}, n^{\pm}$  – направляющие косинусы внешних нормалей лицевых поверхностей оболочки. С точностью технической теории оболочек они имеют выражения [30]

$$l^+ = l^- = -\frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial \alpha}, \quad m^+ = m^- = -\frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial \beta}, \quad n^+ = -n^- = 1 \tag{3.3.15}$$

Из первых четырех условий (3.3.14) можно функции  $\varphi_2, \varphi_3, \psi_2, \psi_3$  выразить через  $u, v, w, \varphi_1, \psi_1$ . Эти выражения с учетом (3.3.1), (3.3.6)- (3.3.8) и (3.3.15) принимают вид:

$$\varphi_2 = \frac{X_2}{h} + \frac{1}{h} \left\{ \left[ B_{11} \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} + k_1 w \right) + B_{12} \left( \frac{\partial v}{\partial \beta} + k_2 w \right) \right] \frac{\partial h}{\partial \alpha} + B_{66} \left( \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial h}{\partial \beta} \right\} \tag{3.3.16}$$

$$\psi_2 = \frac{Y_2}{h} + \frac{1}{h} \left\{ \left[ B_{22} \left( \frac{\partial v}{\partial \beta} + k_2 w \right) + B_{12} \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} + k_1 w \right) \right] \frac{\partial h}{\partial \beta} + B_{66} \left( \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial h}{\partial \alpha} \right\} \tag{3.3.17}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_3 = \frac{4}{h^2} X_1 - \frac{4\varphi_1}{h^2} - \frac{1}{h} \left\{ \left[ B_{11} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - a_{55} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha} \right) + B_{12} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - a_{44} \frac{\partial \psi_1}{\partial \beta} \right) \right] \frac{\partial h}{\partial \alpha} + \right. \\
\left. + B_{66} \left( 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} - a_{55} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \beta} - a_{44} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial h}{\partial \beta} \right\}
\end{aligned} \tag{3.3.18}$$

$$\begin{aligned}
\psi_3 = \frac{4}{h^2} Y_1 - \frac{4\psi_1}{h^2} - \frac{1}{h} \left\{ \left[ B_{22} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - a_{44} \frac{\partial \psi_1}{\partial \beta} \right) + B_{12} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - a_{55} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha} \right) \right] \frac{\partial h}{\partial \beta} + \right. \\
\left. + B_{66} \left( 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} - a_{55} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \beta} - a_{44} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial h}{\partial \alpha} \right\}
\end{aligned} \tag{3.3.19}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
X_1 = \frac{1}{2} (X^+ - X^-), \quad Y_1 = \frac{1}{2} (Y^+ - Y^-), \quad X_2 = X^+ + X^-, \\
Y_2 = Y^+ + Y^-, \quad Z_2 = Z^+ + Z^-
\end{aligned} \tag{3.3.20}$$

Подставляя (3.3.16)- (3.3.19) в (3.3.12) получим окончательные выражения усилий  $N_1$  и  $N_2$ , которые в общем случае приводить не будем.

Уравнения равновесия дифференциального элемента срединной поверхности оболочки в рамках технической теории имеют вид ([30], стр.51):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial S}{\partial \beta} &= -X_2 - \int_{-h/2}^{h/2} P_\alpha d\gamma, & \frac{\partial T_2}{\partial \beta} + \frac{\partial S}{\partial \alpha} &= -Y_2 - \int_{-h/2}^{h/2} P_\beta d\gamma, \\
-k_1 T_1 - k_2 T_2 + \frac{\partial N_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial N_2}{\partial \beta} &= -Z_2 - \int_{-h/2}^{h/2} P_\gamma d\gamma, & & \\
\frac{\partial M_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial H}{\partial \beta} &= N_1, & \frac{\partial M_2}{\partial \beta} + \frac{\partial H}{\partial \alpha} &= N_2
\end{aligned} \tag{3.3.21}$$

Следуя [30], [65] и др. В последних двух уравнениях (3.3.21) грузовые члены пропущены, что вполне разумно особенно при нагрузках, у которых нормальная составляющая является доминирующей.

Систему (3.3.21), с учетом (3.3.9)-(3.3.12) и (3.3.16)- (3.3.19), можно привести к окончательному виду к системе относительно функций  $u, v, w, \varphi_1, \psi_1$ . что в общем случае из-за громоздкости, не будем делать.

К системе (3.3.21) следует присоединить краевые условия. Так как эта система имеет десятый порядок, то на каждом краю оболочки надо ставить по пять условий. Рассмотрим наиболее часто встречающиеся условия для края  $\alpha = const$ .

а)Свободный край:

$$T_1 = N_1 = S = M_1 = N_2 = 0 \tag{3.3.22}$$

б)Шарнирно опертый край:

$$T_1 = S = M_1 = H = w = 0. \tag{3.3.23}$$

в)Защемленный край:

$$u = 0, v = 0, w = 0, \frac{\partial w}{\partial \alpha} - a_{55}\varphi_1 = 0, \frac{\partial w}{\partial \beta} - a_{44}\psi_1 = 0 \tag{3.3.24}$$

Заметим, что условия защемления можно удовлетворить во всех точках заделанного сечения оболочки.

Аналогичным образом можно написать условия и для края  $\beta = const$ .

Кроме отмеченных условий возможны еще и другие условия.

2. Рассмотрим оболочку с круговой цилиндрической срединной поверхностью длины  $l$  и радиуса  $R$ . Координатную линию  $\alpha$  направим вдоль образующей. Толщина оболочки изменяется осесимметрично по линейному закону

$$h = h_0 + h_1\alpha \tag{3.3.25}$$

Здесь  $h_0$  и  $h_1$  заданные постоянные. Пусть края оболочки  $\alpha=0$  и  $\alpha=l$  заземлены. Оболочка находится под действием только равномерного внутреннего давления  $P$ . Так как давление перпендикулярно внутренней поверхности оболочки  $\gamma=-h/2$ , то оно дает составляющее, параллельное срединной поверхности оболочки. Значения нагрузок, приведенных к единице площади срединной поверхности оболочки, будут:

$$Z_2 = P, \quad X_2 = \frac{Ph_1}{2}. \quad (3.3.26)$$

В силу осесимметричности  $v = \psi_1 = 0$ . От нуля отличаются только  $u, w, \varphi_1$ .

Примем обезразмеривающие обозначения:

$$\begin{aligned} \alpha &= l\bar{\alpha}, \quad \gamma = h_0\bar{\gamma}, \quad u = h_0\bar{u}, \quad w = h_0\bar{w}, \quad S = \frac{h_0}{l}, \quad l = nR, \quad P = B_{11}\bar{P} \\ h &= h_0H, \quad t = \frac{h_1}{s}, \quad H = 1 + t\bar{\alpha}, \quad T_1 = B_{11}h_0\bar{T}_1, \quad T_2 = B_{11}h_0\bar{T}_2 \\ N_1 &= B_{11}h_0\bar{N}_1, \quad M_1 = B_{11}h_0^2\bar{M}_1, \quad M_2 = B_{11}h_0^2\bar{M}_2, \quad B_{22} = qB_{11}, \\ B_{12} &= mB_{11}, \quad a_{55}B_{11} = \chi, \quad \varphi_1 = B_{11}\bar{\varphi}_1 \end{aligned} \quad (3.3.27)$$

Второе и пятое уравнения системы (3.3.21) удовлетворяются тождественно. Из первого уравнения этой системы с учетом (3.3.26) и (3.3.27) можно написать:

$$\frac{d\bar{u}}{d\bar{\alpha}} = \frac{C_1}{H} - mn\bar{w} - \frac{\bar{P}t}{2s} \frac{\bar{\alpha}}{H} \quad (3.3.28)$$

Здесь  $C_1$  – постоянная интегрирования. Остальные два уравнения системы (3.3.21) с учетом (3.3.28) примут вид:

$$\begin{cases} t \frac{d^3\bar{w}}{d\bar{\alpha}^3} + \frac{2t^2}{H} \frac{d^2\bar{w}}{d\bar{\alpha}^2} + \frac{12n^2(q-m^2)}{s^2H} \bar{w} - \frac{\chi t}{s} \frac{d^2\bar{\varphi}_1}{d\bar{\alpha}^2} - \frac{2(4+\chi t^2 s^2)}{s^3H} \frac{d\bar{\varphi}_1}{d\bar{\alpha}} - \\ - \frac{8t}{s^3H^2} \bar{\varphi}_1 + \frac{12mn}{s^2H^2} \cdot C_1 = \frac{12\bar{P}}{sH^2} + \frac{6mnt\bar{P}}{s^3H^2} \cdot \bar{\alpha} - \frac{\bar{P}t^2}{s^2H^2} \\ \frac{d^3\bar{w}}{d\bar{\alpha}^3} + \frac{2t}{H} \frac{d^2\bar{w}}{d\bar{\alpha}^2} - \frac{\chi}{s} \frac{d^2\bar{\varphi}_1}{d\bar{\alpha}^2} - \frac{2\chi t}{sH} \frac{d\bar{\varphi}_1}{d\bar{\alpha}} + \frac{8\bar{\varphi}_1}{s^3H^2} = \frac{\bar{P}t}{s^2H^2} \end{cases} \quad (3.3.29)$$

Решение системы (3.3.29) ищем в виде

$$\bar{w} = \sum_{i=1}^k a_i \bar{\alpha}^i, \quad \bar{\varphi}_1 = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i \bar{\alpha}^i \quad (3.3.30)$$

Интегрировав (3.3.28), с учетом (3.3.30), получим:

$$\bar{u} = C_2 + \frac{C_1}{t} \ln H - mn \sum_{i=1}^k \frac{a_i \bar{\alpha}^{i+1}}{i+1} - \frac{\bar{P}}{2S} \left( \bar{\alpha} - \frac{\ln H}{t} \right), \quad (3.3.31)$$

где  $C_2$  – новая постоянная интегрирования. Условия заземления обоих краев оболочки запишутся в виде:

при  $\bar{\alpha} = 0, \bar{\alpha} = 1$

$$\bar{u} = 0, \quad \bar{w} = 0, \quad s \frac{d\bar{w}}{d\bar{\alpha}} - \chi \bar{\varphi}_1 = 0 \quad (3.3.32)$$

Из условия  $\bar{u}(\bar{\alpha} = 0) = 0$ , с учетом (3.3.31), следует  $C_2 = 0$ . Условие же  $\bar{w}(\bar{\alpha} = 0) = 0$ , в силу (3.3.30), удовлетворяется автоматически. Таким образом, остается удовлетворить условию  $s d\bar{w}/d\bar{\alpha} - \chi \bar{\varphi}_1 = 0$  при  $\bar{\alpha} = 0$  и трем условиям (3.3.32) при  $\bar{\alpha} = 1$ . Задачу будем решать методом коллокаций. Число неизвестных коэффициентов, входящих в систему (3.3.29), равно  $2(k+1)$ . Для их определения необходимо составить столько же уравнений. Четыре уравнения получатся из неиспользованных краевых условий, а остальные  $2(k-1)$  уравнения – из системы (3.3.29), записанной в  $(k-1)$  промежуточных точках интервала  $0 < \bar{\alpha} < 1$ .

Решение задачи оболочки постоянной толщины получится как частный случай при  $t = 0$ . Тогда (3.3.31) примет вид:

$$\bar{u} = C_1 \bar{\alpha} - mn \sum_{i=1}^k \frac{a_i \bar{\alpha}^{i+1}}{i+1} \quad (3.3.32)$$

С целью сравнения приведем уравнения рассматриваемой задачи при постоянной толщине по уточненной теории Амбарцумяна [30]:

$$\begin{aligned} n(q-m^2)\bar{w} - \frac{1}{ns} \frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{\alpha}} + mC_1 &= \frac{\bar{P}}{ns^2} \\ \frac{d^3\bar{w}}{d\bar{\alpha}^3} - \frac{6\chi}{5s} \frac{d^2\bar{\varphi}}{d\bar{\alpha}^2} + \frac{12\bar{\varphi}}{s^3} &= 0, \quad \left( \varphi = \frac{12B_{11}\bar{\varphi}}{h^2} \right) \end{aligned} \quad (3.3.33)$$

Краевые условия задачи в рамках этой теории имеют вид:

При  $\bar{\alpha} = 0, \bar{\alpha} = 1$

$$\bar{u} = 0, \quad \bar{w} = 0, \quad \frac{d\bar{w}}{d\bar{\alpha}} - \frac{\chi}{2s} (3 - 4\bar{\gamma}_0^2) = 0 \quad (3.3.34)$$

Причем последнее условие (3.3.34) удовлетворяется в произвольных точках сечения

$$\bar{\gamma} = \pm \bar{\gamma}_0 \quad \left( 0 \leq \bar{\gamma}_0^2 \leq \frac{1}{4} \right) \quad (3.3.35)$$

Способ и схема решения прежние.

### 3. Рассмотрим численный пример.

В рамках предложенной теории безразмерные значения расчетных величин оболочки имеют выражения:

$$\begin{aligned} \bar{T}_1 &= sH \left( \frac{d\bar{u}}{d\bar{\alpha}} + mn\bar{w} \right), \quad \bar{T}_2 = sH \left( m \frac{d\bar{u}}{d\bar{\alpha}} + qn\bar{w} \right) \\ \bar{N}_1 &= \frac{2}{3} H \bar{\varphi}_1 - \frac{\bar{P}stH}{24} - \frac{ts^2H^2}{12} \left( s \frac{d^2\bar{w}}{d\bar{\alpha}^2} - \chi \frac{d\bar{\varphi}_1}{d\bar{\alpha}} \right) \\ \bar{M}_1 &= -\frac{sH^3}{12} \left( s \frac{d^2\bar{w}}{d\bar{\alpha}^2} - \chi \frac{d\bar{\varphi}_1}{d\bar{\alpha}} \right), \quad \bar{M}_2 = m\bar{M}_1 \end{aligned} \quad (3.3.36)$$

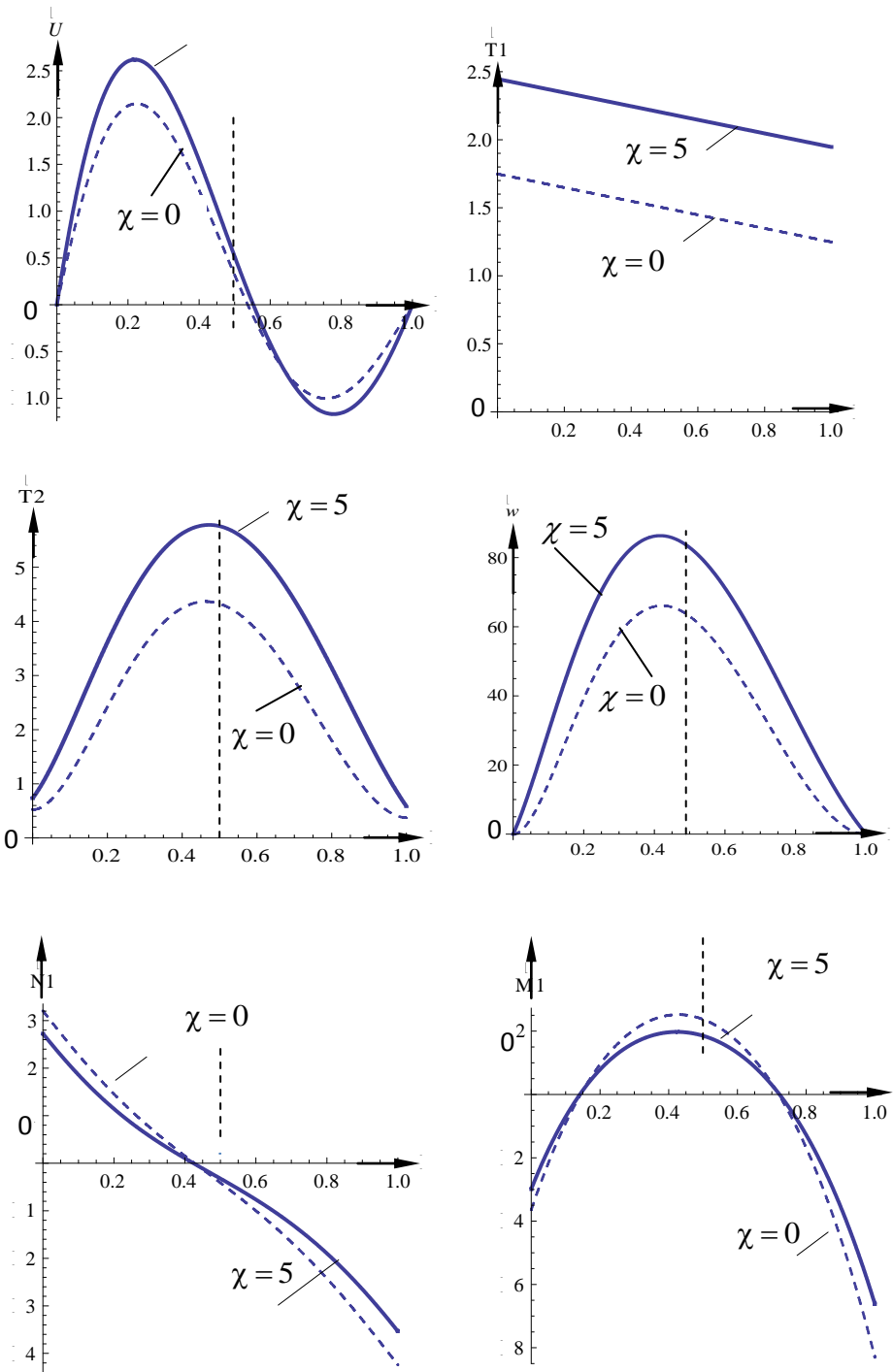
В случае оболочки постоянной толщины в рамках теории [30] имеем:

$$\begin{aligned} \bar{T}_1 &= s \left( \frac{d\bar{u}}{d\bar{\alpha}} + mn\bar{w} \right), \quad \bar{T}_2 = s \left( m \frac{d\bar{u}}{d\bar{\alpha}} + qn\bar{w} \right) \\ \bar{N}_1 &= \bar{\varphi}, \quad \bar{M}_1 = -\frac{s}{12} \left( s \frac{d^2\bar{w}}{d\bar{\alpha}^2} - \frac{6}{5} \chi \frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{\alpha}} \right), \\ \bar{M}_2 &= m\bar{M}_1, \quad (\bar{\varphi} = \varphi h^2 / 12B_{11}) \end{aligned} \quad (3.3.37)$$

В рамках предложенной технической уточненной теории представлены графики изменения безразмерных расчетных величин цилиндрической оболочки линейно-переменной толщины по координате  $\bar{\alpha}$  при некоторых значениях механических и геометрических параметров. Нетрудно заметить, что эти графики несимметричны относительно середины оболочки  $\bar{\alpha} = 0,5$ , что является следствием несимметричной переменности толщины.

Результаты численного решения приводят к следующим заключениям:





$t=1; m=0,3; p=1; s=0,1; n=1; q=0,5$

Рис.3.3.1

1. Процесс вычисления по методу коллокаций для рассматриваемой задачи обладает хорошей сходимостью;
2. Расхождения между значениями расчетных величин оболочки, соответствующими предложенной технической теории и общей уточненной теории [111], с увеличением относительной длины оболочки (с увеличением параметра « $n$ ») возрастает. Это означает, что, как и отмечается в [30] (стр.126), техническая теория применима для достаточно коротких замкнутых оболочек;
3. В случае постоянной толщины ( $t=0, H=1$ ) результаты, полученные по технической уточненной теории Амбарцумяна [30] и по предложенной теории, практически совпадают;
4. Учет поперечного сдвига приводит к увеличению осевого и кольцевого усилий оболочки  $\bar{T}_1$  и  $\bar{T}_2$ . Это объясняется тем, что в выражениях соответствующих деформаций в качестве слагаемого участвует прогиб оболочки, который при учете поперечного сдвига увеличивается. Этот эффект для пластин отсутствует, поскольку их плоская задача отделяется от задачи изгиба, в силу чего в выражениях тангенциальных деформаций прогиб пластинки не участвует.

### **§3.4 Модель устойчивости ортотропной колонны переменного поперечного сечения при учете поперечного сдвига и собственного веса**

В этом параграфе учитывая характер дифференциальных уравнений равновесия сплошной среды, по аналогии [29] строится прикладная уточненная теория устойчивости ортотропной колонны переменного прямоугольного поперечного сечения, учитывающая влияния собственного веса и деформации поперечного сдвига. Приводятся наиболее часто встречающиеся краевые условия.

**Постановка задач.-** 1. Рассмотрим ортотропную колонну малой сдвиговой жесткости с прямоугольным переменным сечением  $b \times h$  и длиной  $l$ . Колонна находится под действием вертикально приложенной сосредоточенной осевой силы  $P$  и собственного веса. Колонну отнесем к системе прямоугольных декартовых

координатах  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , оси которых параллельны главным направлениям анизотропии материала. Координатную ось  $x$  направим по оси симметрии колонны, а оси  $y$  и  $z$  в плоскости ее поперечного сечения так, чтобы образовалась правая система координат (рис 3.4.1).

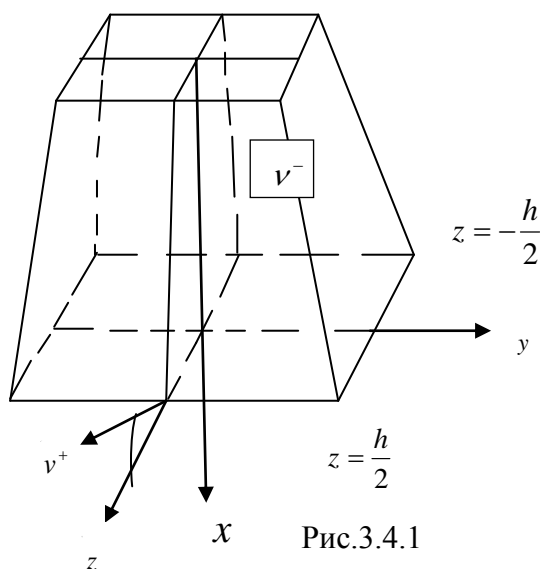


Рис.3.4.1

Попытаемся построить прикладную теорию устойчивости, способную учитывать влияния поперечного сдвига и собственного веса колонны. При этом влияниями нормального напряжения  $\sigma_z$  и деформацию обжатия  $\varepsilon_z$  будем пренебрегать.

Следуя [29] воспользуемся методом представления решений в виде степенных многочленов по поперечной координате  $z$ . Имея в виду дифференциальные уравнения равновесия сплошной среды заключаем, что для соблюдения одинакового порядка в выражении основного напряжения  $\sigma_x$  следует удерживать на один член меньше чем в выражении поперечного касательного напряжения  $\tau_{xz}$ . Очевидно, что для построения самой простой теории, описывающей плоское деформирования (растяжение, сжатие) и изгиб колонны, необходимо в выражении напряжения  $\sigma_x$  удерживать лишь первые два члена, т.е. для него принимать линейный закон распределения по толщине колонны. Это влечет за собой линейность распределения по толщине основной деформации  $\varepsilon_x$ , а следовательно и перемещения  $u_x$ . Тогда, на

основе вышесказанного, в выражении поперечного касательного напряжения следует удерживать три члена. Итак, примем

$$\tau_{xz} = \varphi_1 + z\varphi_2 + z^2\varphi_3 \quad (3.4.1)$$

где  $\varphi_i (i=1,2,3)$  - искомые функции только координаты  $x$ . Кроме этого будем считать, что пригиб  $w$  одинаков для всех точек поперечного сечения колонны.

С учетом (3.4.1) и обобщенного закона Гука ортотропного тела [107] можно написать:

$$\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{dw}{dx} = a_{55} (\varphi_1 + z\varphi_2 + z^2\varphi_3) \quad (3.4.2)$$

Здесь  $\varepsilon_{xz}$  - деформация поперечного сдвига,  $a_{55}$  - величина, обратная модулю сдвига материала в поперечном направлении. Интегрируя (3.4.2) по  $z$  и ограничиваясь линейным распределением перемещения  $u_x$  по толщине колонны, получим:

$$u_x = u - z \left( \frac{dw}{dx} - a_{55}\varphi_1 \right) \quad (3.4.3)$$

Здесь  $u$  - осевое перемещение колонны. Выражение (3.4.3) равносильно принятию гипотезы о плоском сечении, только с той разницей, что после изгиба сечения больше не остаются перпендекулярными криволинейной оси деформированной колонны.

Из геометрически линейного соотношения для деформации  $\varepsilon_x$  можно написать:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{du}{dx} - z \left( \frac{d^2w}{dx^2} - a_{55} \frac{d\varphi_1}{dx} \right) \quad (3.4.4)$$

Применив закон Гука находим:

$$\sigma_x = E \frac{du}{dx} - zE \left( \frac{d^2w}{dx^2} - a_{55} \frac{d\varphi_1}{dx} \right) \quad (3.4.5)$$

Здесь  $E$  -модуль Юнга материала по направлению оси  $x$  .

Рассмотрим поверхностные условия колонны. Будем считать, что вся боковая поверхность колонны свободна от нагрузок.

Направляющие косинусы внешних нормалей  $\nu^+$  и  $\nu^-$  имеют вид:

$$l^\pm = -\sin \alpha = -\frac{\frac{dh}{dx}}{\sqrt{4 + \left(\frac{dh}{dx}\right)^2}}, n^+ = \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{4 + \left(\frac{dh}{dx}\right)^2}}, n^- = -\cos \alpha = -\frac{2}{\sqrt{4 + \left(\frac{dh}{dx}\right)^2}} \quad (3.4.6)$$

Поверхностные условия, записанные для точек  $z = \pm \frac{h}{2}$  будут

$$\sigma_x^\pm l^\pm + \tau_{xz}^\pm n^\pm = 0 \quad (3.4.7)$$

С учетом (3.4.1), (3.4.3) и (3.4.6) эти условия примут вид:

$$\begin{aligned} - \left[ E \frac{du}{dx} - E \frac{h}{2} \left( \frac{d^2w}{dx^2} - a_{55} \frac{d\varphi_1}{dx} \right) \right] \frac{dh}{dx} + 2\varphi_1 + h\varphi_2 + \frac{h^2}{2} \varphi_3 &= 0 \\ - \left[ E \frac{du}{dx} + \frac{h}{2} \left( \frac{d^2w}{dx^2} - a_{55} \frac{d\varphi_1}{dx} \right) \right] \frac{dh}{dx} - 2\varphi_1 + h\varphi_2 - \frac{h^2}{2} \varphi_3 &= 0 \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

Решая систему (3.4.8) относительно  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$  получим

$$\varphi_2 = \frac{E}{h} \frac{du}{dx} \frac{dh}{dx}, \quad (3.4.9)$$

$$\varphi_3 = -\frac{1}{h^2} \left[ 4\varphi_1 + Eh \left( \frac{d^2w}{dx^2} - a_{55} \frac{d\varphi_1}{dx} \right) \frac{dh}{dx} \right] \quad (3.4.10)$$

С учетом (3.4.5) для осевой силы можно написать:

$$T_x = Ebh \frac{du}{dx} = P + \gamma \int_0^x bhdxdx \quad (3.4.11)$$

Здесь  $\gamma$  удельный вес материала.

Имея в виду (3.4.11) из (3.4.9) для  $\varphi_2$  получим:

$$\varphi_2 = \frac{1}{bh^2} \left[ P + \gamma \int_0^x bhdxdx \right] \frac{dh}{dx} \quad (3.4.12)$$

Отметим, что  $\varphi_2$  понадобится только для вычисления поперечного касательного напряжения .

Используя (3.4.1), (3.4.5) и (3.4.10) для поперечной силы  $N_x$  и изгибающего  $M_x$  момента получим:

$$N_x = \int_F \tau_{xz} dF = \frac{b \cdot h}{12} \left[ 8\varphi_1 - Eh \left( \frac{d^2w}{dx^2} - a_{55} \frac{d\varphi_1}{dx} \right) \frac{dh}{dx} \right] \quad (3.4.13)$$

$$M_x = \int_F z \sigma_x dF = -\frac{Ebh^3}{12} \left( \frac{d^2w}{dx^2} - a_{55} \frac{d\varphi_1}{dx} \right) \quad (3.4.14)$$

Дифференциальные уравнения равновесия колонны имеют вид [29]

$$\frac{dM_x}{dx} = N_x, \quad \frac{dN_x}{dx} = -Z \quad (3.4.15)$$

Интенсивность фиктивной поверхностной нагрузки  $Z$  будет [107]

$$Z = -\left(P + \gamma \int_0^x b h dx\right) \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (3.4.16)$$

С учетом (3.4.13), (3.4.14) и (3.4.16) уравнения (3.4.15) примуд вид:

$$b \frac{d^3 w}{dx^3} + \left(h \frac{db}{dx} + 2b \frac{dh}{dx}\right) \frac{d^2 w}{dx^2} - b a_{55} \frac{d^2 \varphi_1}{dx^2} - a_{55} \left(h \frac{db}{dx} + 2b \frac{dh}{dx}\right) \frac{d \varphi_1}{dx} + \frac{8b \varphi_1}{Eh} = 0 \quad (3.4.17)$$

$$E b h^2 \frac{dh}{dx} \frac{d^3 w}{dx^3} + E h \left[ \left(h \frac{db}{dx} + 2b \frac{dh}{dx}\right) \frac{dh}{dx} + b h \frac{d^2 h}{dx^2} \right] \frac{d^2 w}{dx^2} - E b h^2 a_{55} \frac{dh}{dx} \frac{d^2 \varphi_1}{dx^2} - \quad (3.4.18)$$

$$h \left\{ 8b + E a_{55} \left[ \left(h \frac{db}{dx} + 2b \frac{dh}{dx}\right) \frac{dh}{dx} + b h \frac{d^2 h}{dx^2} \right] \right\} \frac{d \varphi_1}{dx} - 8 \left(h \frac{db}{dx} + 2b \frac{dh}{dx}\right) \varphi_1 = 12Z$$

Умножив (3.4.17) на  $E \frac{dh}{dx}$  и из полученного уравнения вычетов (3.4.18)

получим

$$E b h^2 \frac{d^2 h}{dx^2} \frac{d^2 w}{dx^2} - b h \left( 8 + E a_{55} h \frac{d^2 h}{dx^2} \right) \frac{d \varphi_1}{dx} - 8 \left(h \frac{db}{dx} + 2b \frac{dh}{dx}\right) \varphi_1 = 12Z \quad (3.4.19)$$

Разделив (3.4.19) на  $Eh$  и соединив полученное уравнение с (3.4.17), приходим к следующей системе уравнений задачи устойчивости колонны

$$b h \frac{d^3 w}{dx^3} + \left(h \frac{db}{dx} + 2b \frac{dh}{dx}\right) \frac{d^2 w}{dx^2} - b h a_{55} \frac{d^2 \varphi_1}{dx^2} - a_{55} \left(h \frac{db}{dx} + 2b \frac{dh}{dx}\right) \frac{d \varphi_1}{dx} + \frac{8b \varphi_1}{Eh} = 0 \quad (3.4.20)$$

$$b h \frac{d^2 h}{dx^2} \frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{b}{E} \left( 8 + E a_{55} h \frac{d^2 h}{dx^2} \right) \frac{d \varphi_1}{dx} - 8 \left(h \frac{db}{dx} + 2b \frac{dh}{dx}\right) \varphi_1 = \frac{12Z}{Eh}$$

Считая, что размеры поперечного сечения колонны пропорциональны друг другу

$$b = \alpha h \quad (3.4.21)$$

и принимая обезразмеривающие обозначения

$$x = l \cdot \bar{x}, \quad w = h_0 \bar{w}, \quad \frac{h_0}{l} = s, \quad h = h_0 H, \quad \varphi_1 = E \varphi, \quad (3.4.22)$$

$$a_{55} E = \chi, \quad P = E h_0^2 \bar{P} \cdot 10^{-4}, \quad \gamma = \frac{E}{h} \bar{\gamma} \cdot 10^{-5}$$

(через  $h_0$  обозначена средняя толщина колонны).

Систему (3.4.20) с учетом (3.4.16) можно привести к виду

$$\frac{d^3\bar{w}}{d\bar{x}^3} + \frac{3}{H} \frac{dH}{d\bar{x}} \frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}^2} - \frac{\chi}{s} \frac{d^2\varphi}{d\bar{x}^2} - \frac{3\chi}{sH} \frac{dH}{d\bar{x}} \frac{d\varphi}{d\bar{x}} + \frac{8\varphi}{s^3H^2} = 0$$

$$\left[ s^3H^3 \frac{d^2H}{d\bar{x}^2} + 12 \left( \frac{s\bar{P}}{\alpha} + \bar{\gamma} \int_0^{\bar{x}} H^2 d\bar{x} \right) \right] \frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}^2} - H^2 \left( 8 + \chi s^2 H \frac{d^2H}{d\bar{x}^2} \right) \frac{d\varphi}{d\bar{x}} - 24H \frac{dH}{d\bar{x}} \varphi = 0 \quad (3.4.23)$$

Эта система имеет четвертый порядок. В силу этого на каждом краю колонны нужно ставить по два краевых условия.

2. Рассмотрим линейное множество толщин колонн одинакового объема

$$h = \beta h_0 + h_1 x \quad (3.4.24)$$

Здесь  $h_0$  средняя толщина, параметры  $\beta$  и  $h_1$  описывают характер возрастания толщины по направлению от верхнего конца к нижнему концу колонны. Для данного фиксированного значения объема существует определенная связь между этими параметрами. Фактически (3.4.24) является однопараметрическим множеством толщин. Так как объем колонны  $V$  можно представить в виде

$$V = \alpha h_0^2 l = \alpha \int_0^l h^2 dx \quad (3.4.25)$$

то, с учетом (3.4.23), из (3.4.24) находим:

$$h_1 = \frac{h_0}{2l} \left( \sqrt{12 - 3\beta^2} - 3\beta \right) \quad (3.4.26)$$

Подставляя это выражение в (3.4.24), с учетом (3.4.22) для безразмерной толщины колонны получим:

$$H = \beta + \left( \sqrt{12 - 3\beta^2} - 3\beta \right) \frac{\bar{x}}{2} \quad (3.4.27)$$

Нетрудно заметить, что значения параметра  $\beta$  изменится в промежутке

$$0 < \beta \leq 1 \quad (3.4.28)$$

Значению  $\beta = 1$  соответствует колонна постоянного поперечного сечения

$$h = h_0 = \sqrt{\frac{V}{\alpha l}}, \quad b = \alpha h_0 \quad (3.4.29)$$

В разрешающей системе задачи устойчивости (3.4.23) участвуют еще четыре параметра  $\alpha, \chi, \bar{\gamma}, s$ . Для  $\alpha$  разумно рассмотреть промежуток изменения  $\alpha \geq 1$ , т.е.  $h \leq b$ , что и предполагалось при выводе системы (3.4.23). Параметр  $\chi$  характеризует сдвиговое свойство материала в поперечном направлении. В классической постановке

задачи  $\chi = 0$ . При учете поперечного сдвига  $\chi$  принимает соответствующее положительное значение.  $\bar{\gamma}$  - представляет безразмерное значение удельного веса материала колонны. Параметр  $s$  для заданного значения величины  $\sqrt{V/l^3}$  определяется формулой

$$s = \frac{h_0}{l} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{V/l^3} \quad (3.4.30)$$

Поскольку значение осевой сосредоточенной силы имеет выражение

$$P = Eh_0^2 \bar{P} = \frac{EV}{l} \frac{\bar{P}}{\alpha}, \quad (3.4.31)$$

то оно свое наибольшее значение принимает когда  $\bar{P}/\alpha$  является наибольшим.

Определение значения  $\bar{P}/\alpha$  для каждой совокупности параметров задачи сводится к нахождению первого собственного числа однородной системы (3.4.23) при данном варианте краевых условий колонны.

С учетом (3.4.13), (3.4.14) и (3.4.22) для наиболее часто встречающихся краевых условий получим

а) Условия свободного от опоры края:

$$\begin{aligned} s \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} - \chi \frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{x}} &= 0; \quad (M = 0), \\ 8\bar{\varphi} - s^2 H \frac{dH}{d\bar{x}} \left( s \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} - \chi \frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{x}} \right) - \frac{12s}{\alpha H^2} \bar{P} \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} &= 0; \quad \left( N = P \frac{dw}{dx} \right) \end{aligned} \quad (3.4.32)$$

б) Условия шарнирно опертого края

$$\bar{w} = 0, \quad s \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} - \chi \frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{x}} = 0 \quad (M = 0) \quad (3.4.33)$$

в) Условия заделанного края

$$\bar{w} = 0, \quad s \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} - \chi \bar{\varphi} = 0 \quad (u = 0) \quad (3.4.34)$$

(Через  $u$  обозначено осевое перемещение точек поперечного сечения колонны).

**Выводы:** Пользуясь современными численными методами в рамках построенной теории можно решить как обычную задачу устойчивости колонны заданного переменного сечения, так и оптимизационную задачу, т.е. определить то переменное сечение, которому соответствует наибольшая критическая сила.



## ГЛАВА IV.

### УСТОЙЧИВОСТЬ ТОНКОСТЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ НАЛИЧИИ УПРУГО-ЗАЩЕМЛЕННОЙ ОПОРЫ

#### §4.1 Устойчивость стержня при наличии упруго защемленной опоры

В работе [114], при рассмотрении задачи поперечного изгиба балки, сформулированы условия упруго-защемленной опоры общего типа. В настоящей работе эти условия обобщаются, распространив на задачи устойчивости стержней. С использованием этих условий решаются три задачи статической устойчивости сжатого стержня при наличии упруго защемленной опоры. Анализируя полученные результаты, делаются качественные заключения.

1. В правой системе декартовых координат  $x, y, z$  рассмотрим упруго защемленную опору общего типа (рис.4.1.1,а). Краевая часть стержня вставлена в упруго деформируемый массив. Длина этой части  $2a$  достаточно мала относительно длины стержня  $l$ . Из-за малости длины будем считать, что значение угла вращения в пределах вставленной части постоянно.

В работе [114] получены условия рассматриваемой упруго защемленной опоры балки, когда балка деформируется только поперечным изгибом. Эти условия имеют вид:

при  $x = 0$

$$\frac{dw}{dx} = D(aN_x - M_x), \quad w = a \frac{dw}{dx} + BN_x \quad (4.1.1)$$

Здесь  $w$  - прогиб,  $N_x$  - поперечная сила,  $M_x$  - изгибающий момент,  $D$  и  $B$  параметры упруго защемленной опоры.

Рассмотрим теперь задачу устойчивости сжатого стержня.

На (рис.4.1.1,б) показана вставленная в упругий массив часть незначительно возмущенного стержня. Для наглядности угол вращения вставленной части  $\alpha$  и ее смещение показаны существенно увеличенно.

В нижеприведенных рассуждениях будем считать, что тангенс угла вращения вставленной части  $\frac{dw}{dx}$  прямо пропорционален вращающим моментам с коэффициентом  $D$ . Нетрудно заметить, что в принятой системе координат

отрицательные моменты стремятся увеличить а положительные, наоборот, уменьшить значение производной  $\frac{dw}{dx}$

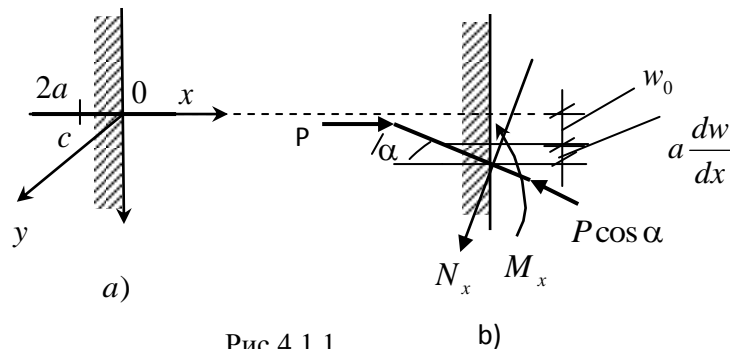


Рис.4.1.1

Поступательное же перемещение вставленной части стержня будем считать прямо пропорциональным действующим перпендикулярным силам с коэффициентом пропорциональности  $B$ .

Строго говоря в любом сечении поперечная сила  $N_x$  не вертикальна, а перпендикулярна оси возмущенного стержня. На правом конце вставленной части стержня  $x=0$  (рис.4.5.1,б) действуют две взаимоперпендикулярные силы- поперечная сила  $N_x$  и осевая сила  $P \cos \alpha$ . Кроме этих сил в сечении  $x=0$  действует еще и изгибающий момент  $M_x$ . Осевая сила не влияет ни на вращение, ни на вертикальное смещение вставленной части стержня. Поперечная сила  $N_x$  относительно середины вставленной части стержня  $c$  дает вращающий момент  $(-aN_x)$ , который вместе с моментом  $M_x$  стремится вращать вставленную часть стержня на угол, тангенс которого равен  $D(aN_x - M_x)$ . На левом конце вставленной части стержня действует горизонтальная внешняя сила  $P$ , которая относительно точки  $c$  дает момент  $(-Pa \frac{dw}{dx})$ , стремящийся увеличить тангенс угла вращения на величину  $DPa \frac{dw}{dx}$ . Поэтому тангенс полного угла вращения вставленной части стержня будет:

$$\left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} = D \left( aN_x + aP \frac{dw}{dx} - M_x \right) \quad (4.1.2)$$

Рассмотрим теперь вопрос о вертикальном смещении вставленной части. Поперечная сила  $N_x$  сообщает этой части стержня перемещение своего направления  $BN_x$ . Горизонтальная же сила левого конца  $P$  имеет составляющую  $P \sin \alpha \approx P \operatorname{tg} \alpha = P \frac{dw}{dx}$ , перпендикулярную вставленной части, которая стремится уменьшить это смещение на величину  $BP \frac{dw}{dx}$ . Поэтому полное смещение вставленной части стержня будет  $B \left( N_x - P \frac{dw}{dx} \right)$ . Из за малости угла  $\alpha$  это смещение от своей вертикальной составляющей  $w_0$  практически не отличается. Поэтому чтобы получить прогиб стержня в сечении  $x=0$  следует к значению  $w_0 = B \left( N_x - P \frac{dw}{dx} \right)$  добавить величину  $a \frac{dw}{dx}$ , возникшую от уклона вставленной части.

Следовательно,

$$w|_{x=0} = a \frac{dw}{dx} + B \left( N_x - P \frac{dw}{dx} \right) \quad (4.1.3)$$

Выражения (4.1.2) и (4.1.3) являются условиями упруго защемленной опоры для задачи устойчивости сжатого стержня. При  $P=0$  они совпадают с условиями (4.1.1).

2. Рассмотрим задачу устойчивости изотропного стержня постоянного поперечного сечения. Уравнение устойчивости стержня, сжатого постоянными осевыми силами  $P$ , имеет вид :

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + k^2 \frac{d^2 w}{dx^2} = 0, \quad k^2 = \frac{P}{EJ} \quad (4.1.4)$$

Здесь  $E$  - модуль Юнга материала,  $J$  - минимальный момент инерции поперечного сечения стержня относительно центральной оси  $Oy$ .

Решение уравнения (4.1.4) представим в виде

$$w = c_1 + c_2 x + c_3 \cos kx + c_4 \sin kx \quad (4.1.5)$$

где  $c_i$  постоянные интегрирования. Рассмотрим три случая. Во всех этих случаях левый край стержня  $x=0$  имеет упруго защемленную опору. Правый же край  $x=l$  в первом случае шарнирно оперт, во втором случае свободен, а в третьем случае жестко защемлен.

Случай - I

Краевые условия имеют вид:

при  $x = 0$

$$\frac{dw}{dx} = D \left( aN_x + Pa \frac{dw}{dx} - M_x \right), \quad w = a \frac{dw}{dx} + B \left( N_x - P \frac{dw}{dx} \right) \quad (4.1.6)$$

при  $x = l$

$$w = 0, \quad M_x = 0 \quad (4.1.7)$$

Изгибающий момент  $M_x$  и поперечная сила  $N_x$  имеют выражения :

$$M_x = -EJ \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad N_x = -EJ \frac{d^3 w}{dx^3} \quad (4.1.8)$$

С учетом (4.1.4) и (4.1.5) имеем:

$$\begin{aligned} M_x &= P(c_3 \cos kx + c_4 \sin kx), \\ N_x &= -kP(c_3 \sin kx - c_4 \cos kx) \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

Примем обезразмеривающие обозначения:

$$\begin{aligned} a &= nl, \quad c_1 = l\bar{c}_1, \quad c_2 = l\bar{c}_2, \quad c_3 = l\bar{c}_3, \quad c_4 = l\bar{c}_4 \\ k &= \bar{k}/l, \quad P = \bar{k}^2 EJ/l^2, \quad B = l^3 \bar{B}/EJ, \quad D = l\bar{D}/EJ \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

Краевые условия (4.1.6), (4.1.7) с учетом этих обозначений примут вид:

$$\begin{cases} (1 - \bar{D}\bar{n}\bar{k}^2)\bar{c}_2 + \bar{D}\bar{k}^2\bar{c}_3 + \bar{k}(1 - 2n\bar{D}\bar{k}^2)\bar{c}_4 = 0 \\ \bar{c}_1 - (n - \bar{k}^2\bar{B})\bar{c}_2 + \bar{c}_3 - \bar{k}n\bar{c}_4 = 0 \\ \bar{c}_1 + \bar{c}_2 = 0 \\ \bar{c}_3 \cos \bar{k} + \bar{c}_4 \sin \bar{k} = 0 \end{cases} \quad (4.1.11)$$

По условию существования нетривиальных решений определитель системы (4.1.11) должна быть равной нулю. Это приводит к уравнению

$$\bar{k} \left[ 1 - \bar{B}\bar{k}^2 - \bar{D}\bar{k}n(2\bar{k} - 2\bar{B}\bar{k}^3 + \bar{k}n) \right] \cos \bar{k} - \left[ 1 + \bar{D}\bar{k}^2(1 - \bar{B}\bar{k}^2) \right] \sin \bar{k} = 0 \quad (4.1.12)$$

Таким образом, критическая сила стержня  $P_{кр} = \bar{k}^2 EJ/l^2$  определится с помощью наименьшего нетривиального решения уравнения (4.1.12). В случае, когда в место упруго защемленной опоры будет абсолютно жестко защемленная опора, то есть  $\bar{B} = \bar{D} = 0$ , уравнение (4.1.12) примет вид:

$$tg \bar{k} - \bar{k} = 0 \quad (4.1.13)$$

Так как наименьшим нетривиальным решением уравнения (4.1.13) является  $\bar{k} = 4.4934 \approx \sqrt{2.0458\pi} \approx \sqrt{2}\pi$ , то критическая сила стержня, как и известно, будет:

$$P_{кр} = \frac{2\pi^2 EJ}{l^2} \quad (4.1.14)$$

### Случай - II

Краевые условия этого случая отличается от краевых условий первого случая только тем, что вместо первого условия (4.1.7) имеем

$$N_x|_{x=l} = P \frac{dw}{dx}|_{x=l} \quad (4.1.15)$$

С учетом (4.1.5) и (4.1.9) из (4.1.15) следует

$$c_2 = 0 \quad (4.1.16)$$

Имея в виду это обстоятельство, из равенства нулю определителя системы уравнений, соответствующих краевым условиям, для второго случая получим:

$$\bar{D}\bar{k} \sin \bar{k} + (2n\bar{D}\bar{k}^2 - 1)\cos \bar{k} = 0 \quad (4.1.17)$$

Следовательно, критическая сила во втором случае определится наименьшим нетривиальным корнем уравнения (4.1.17). В случае когда в место упруго защемленной опоры будет жестко защемленная опора, то  $\bar{B} = \bar{D} = 0$  и уравнение (4.5.17) примет вид:

$$\cos \bar{k} = 0 \quad (4.1.18)$$

Тогда

$$\bar{k} = \pi/2 \Rightarrow P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2} \quad (4.1.19)$$

### Случай - III

Краевые условия этого случая от краевых условий первого случая отличаются только тем, что в место второго условия (4.1.7) имеет место условие

$$\frac{dw}{dx}|_{x=l} = 0 \quad (4.1.20)$$

Тогда, из равенства нулю определителя однородной системы алгебраических уравнений, полученных из краевых условий третьего случая, получим

$$2 - \bar{D}\bar{k}^2 n - \left[ 2 + \bar{D}\bar{k}^2 (1 - \bar{B}\bar{k}^2 - 2n + c \cos \bar{k}) \right] \cos \bar{k} - \bar{k} \left[ 1 - \bar{D} - \bar{B}\bar{k}^2 - \bar{D}\bar{k}n (2\bar{k} - 2\bar{B}\bar{k}^3 + \bar{k}n - \sin \bar{k}) \right] \sin \bar{k} = 0 \quad (4.1.21)$$

В случае, когда в место упруго защемленной опоры будет жестко защемленная опора, то  $\bar{B} = \bar{D} = 0$  и уравнение (4.1.21) принимает вид:

$$2 - 2\cos \bar{k} - \bar{k} \sin \bar{k} = 0 \quad (4.1.22)$$

Наименьшим нетривиальным решением этого уравнение является  $\bar{k} = 2\pi$ . Следовательно, как и известно,

$$P_{кр} = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2} \quad (4.1.23)$$

3. Рассмотрим численный пример. Согласно [112] и обозначений (4.1.10)

$$\frac{D}{B} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow \bar{D} = \frac{3\bar{B}}{n^2} \quad (4.1.24)$$

Из (4.1.13), (4.1.18) и (4.1.22) видно, что при  $\bar{B} = 0$  значения  $\bar{k}$  не зависят от  $n$  и равны известным значениям, соответствующим случаю, когда вместо упруго защемленной опоры имеются жестко защемленная опора.

Табл. 4.1.1

$\bar{B}$	$\bar{k}$			$\bar{P}_{кр}$		
	Случаи			случаи		
	I	II	III	I	II	III
0	4.493	1.571	6.283	20.191	2.467	39.478
0.001	3.097	0.780	4.254	9.591	0.609	18.101
0.01	2.883	0.272	3.963	8.312	0.074	15.708
0.1	2.836	0.087	2.956	8.044	0.007	8.739
1	1.001	0.027	1.675	1.002	0.001	2.806
10	0.317	0.009	1.456	0.100	0	2.119
100	0.100	0.003	1.432	0.010	0	2.049
1000	0.032	0.001	1.429	0.001	0	2.042
10000	0.010	0	1.429	0.000	0	2.042
20000	0.007	0	1.429	0	0	2.042
$\infty$	0	0	1.429	0	0	2.042

В табл.(4.1.1) приведены значения  $\bar{k}$  и безразмерной критической силы

$$\bar{P}_{кр} = \frac{P_{кр} l^2}{EJ} = \bar{k}^2 \quad (4.1.25)$$

при  $n = 0.05$ , когда значение  $\bar{B}$  изменяется от нуля до бесконечности.

В табл.(4.1.2) приведены значения этих же величин III-его случая для некоторых  $n$ , при  $\bar{B} = \infty$ .

Табл. 4.1.2

$n$	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1
$\bar{k}$	1.429	1.404	1.380	1.357	1.335	1.314
$\bar{P}_{кр}$	2.042	1.971	1.904	1.841	1.782	1.728

Полученные результаты приводят к следующим заключениям.

- 1.) При  $\bar{B} = 0$ , т.е. когда опора является жестко заземленной, значение  $\bar{k}$ , а следовательно и значения критической силы стержня, во случаях совпадают с соответствующими известными значениями.
- 2.) При незначительном увеличении значения параметра  $\bar{B}$  упруго заземленная опора резко ослабевает и значение  $\bar{k}$ , следовательно и критической силы, во всех случаях существенно уменьшается.
- 3.) Когда значение параметра  $\bar{B}$  стремится к бесконечности упруго заземленная опора исчезает и левый край стержня становится свободным концом. Тогда длина стержня становится равной не  $l$ , а  $(1 + 2n)l$ .
- 4.) При  $\bar{B} \rightarrow \infty$  в первом случае левый край стержня свободен, а правый край лежит на шарнирной опоре. Во втором же случае оба конца стержня свободны. Поэтому в первых двух случаях, при отсутствии промежуточных опор, стержень превращается в механизм и любое незначительное возмущение нарушает равновесие. В этих случаях критическая сила равна нулю.
- 5.) В третьем случае при  $\bar{B} \rightarrow \infty$  левый край стержня становится свободным, а правый край остается жестко заземленным. Однако значение  $\bar{k}$  стремится не к  $\frac{\pi}{2}$ ,

а к  $\frac{\pi}{2(1+2n)}$ . Это является следствием того, что длина стержня уже равна не  $l$ , а  $(1+2n)l$ . В силу этого

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{4[(1+2n)l]^2} \quad (4.1.26)$$

#### **§4.2 Устойчивость стержня при учете уменьшения сжимающей силы упруго-защемленной опорой**

Основной целью настоящего параграфа является обобщение условий упруго защемленной опоры поперечного изгибаемой балки для задачи устойчивости сжатого стержня и обоснование этих условий, когда учитывается уменьшение сжимающей внешней силы вследствие трения краевой части стержня, вставленной в упругий массив. Предлагается способ учета силы трения, с применением которого решается задача устойчивости изотропного стержня постоянного поперечного сечения, когда один край стержня упруго защемлен, а другой край защемлен абсолютно жестко. Рассматривается численный пример. На основе полученных безразмерных результатов делаются заключения о зависимости действительной критической силы от жесткости упруго защемленной опоры.

В строительных сооружениях широко применяются упруго защемленные опоры. По этому практическую важность имеют разработка конструкций и исследование свойств таких опор. Этим вопросам посвящены много работ ([73],[118],[119],[130]-[134],[157],[179],[180],[182]) и др.). В книгах [157] и [182] рассматриваются теоретические модели упруго защемленной опоры, не указывая их конкретные конструкции. В настоящей параграфе рассматривается упруго защемленная опора следующей конструкции: краевая часть стержня малой длиной вставлен в упруго деформируемый массив. Считается, что эта часть совершает перемещение и вращение без деформирования, вследствие чего прогиб и его производная в опорном сечении, в отличие от абсолютно жесткой опоры, отличны от нуля. В задачах устойчивости стержня на свободном конце опоры действует сжимающая сила, под действием которой происходит трение вставленной части с упругим массивом и на стержень действует только часть внешней силы. В настоящей работе обобщаются условия



упруго защемленной опоры изгибаемой балки для задачи устойчивости стержня при учете уменьшения сжимающей силы опорой. Решается задача устойчивости стержня один край которого упруго защемлен, а другой край защемлен абсолютно жестко. На основе полученных безразмерных результатов решения делаются заключения о зависимости действительной критической силы от жесткости упруго защемленной опоры.

**1. Упруго защемленная опора поперечно изгибаемой балки.** Краевая часть балки вставлена в упругий массив. Длина этой части составляет  $2a$ , что достаточно мало относительно длины балки. Из-за малости длины будем считать, что вставленная часть при изгибе балки, подобно абсолютно твердому элементу, будет поступательно перемещаться и вращаться как одно целое без деформирования. По этому в ее пределах значение производной прогиба  $\frac{dw}{dx}$  будем считать постоянным. Вставленная часть балки фактически образует упруго защемленную опору, которая существует во всех строительных сооружениях.

На рис. 4.2.1. для наглядности изменение положения вставленной части балки при изгибе представлено существенно увеличенно. В опорном сечении балки  $x = 0$  возникнут только поперечная сила  $N_x$  и изгибающий момент  $M_x$ . Для простоты в принятой правой системе декартовых координат  $x, y, z$  положим  $N_x > 0, M_x < 0$

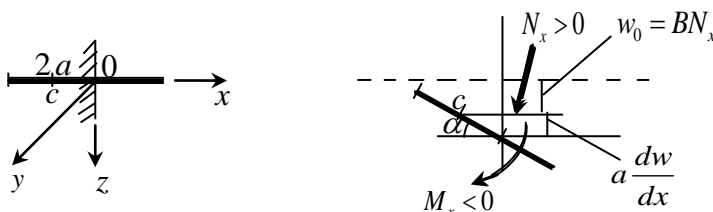


рис. 4.2.1

Под действием момента поперечной силы относительно середины вставленной части « $-aN_x$ » и момента  $M_x$  вставленная часть будет вращаться на некоторый угол  $\alpha$ . Будем считать, что тангенс этого угла прямо пропорционален сумме этих моментов. Так как  $\frac{dw}{dx} > 0$  при отрицательном моменте, то можно написать

$$\left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} = D(aN_x - M_x) \quad (4.2.1)$$

Постоянный параметр  $D$  является обратной величиной жесткости упруго заземленной опоры на вращение. В СИ имеет размерность  $H^{-1} \text{ м}^{-1}$ .

Прогиб балки в опорном сечении  $w(x=0)$  состоит из двух частей. Одна из них возникает от вертикального поступательного перемещения вставленной части балки. По аналогии с гипотезой Фусса – Винклера будем считать, что значение этой части прогиба  $w_0$  прямо пропорционально поперечной силе  $N_x(x=0)$ . Вторая часть прогиба является следствием вращения вставленной части и имеет значение  $a \frac{dw}{dx}$ . В

итоге получим:

$$w|_{x=0} = BN_x + a \frac{dw}{dx} \quad (4.2.2)$$

Постоянная « $B$ » является обратной величиной жесткости упруго заземленной опоры на поступательное вертикальное перемещение. В СИ имеет размерность  $H^{-1} \text{ м}$ .

Выражения (4.2.1) и (4.2.2) являются условиям упруго заземленной опоры при поперечном изгибе балки.

Рассмотрим предельные случаи.

1) Пусть  $D \rightarrow 0, B \rightarrow 0$

Тогда из (4.2.1) и (4.2.2) следует:

$$\left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} \rightarrow 0, \quad w|_{x=0} \rightarrow 0 \quad (4.2.3)$$

Следовательно, в этом случае упруго заземленная опора стремится к абсолютно жесткой опоре.

2)  $D \rightarrow \infty, B \rightarrow \infty$

Нетрудно заметить, что в этом случае

$$N_x|_{x=0} \rightarrow 0, \quad M_x|_{x=0} \rightarrow 0 \quad (4.2.4)$$

т.е. упруго заземленная опора стремится к свободному краю балки.

## 2. Экспериментальное определение параметров упруго заземленной опоры.

Для этого надо изготовить опытный образец опоры натуральных размеров и вместо балки сделать выступ малой длины. К сечению  $x = 0$  надо приложить только вертикальную силу достаточно большой величины  $Q$ .

Измерив значения прогиба  $w$  и его производной  $\frac{dw}{dx}$  при  $x = 0$  можно определить параметры  $D$  и  $B$ . Так как

$$N_x|_{x=0} = Q, \quad M_x|_{x=0} = 0 \quad (4.2.5)$$

То из (4.2.1) и (4.2.2) следует:

$$D = \frac{1}{aQ} \frac{dw}{dx} \Big|_{x=0}, \quad B = \frac{w - a \frac{dw}{dx}}{Q} \Big|_{x=0} \quad (4.2.6)$$

### 3. Связь между параметрами упруго защемленной опоры.

Пользуясь гипотезой Фусса – Винклера будем считать, что нормальные напряжения, которые действуют на верхней и нижней поверхностях вставленной части балки, прямо пропорциональны поступательному вертикальному перемещению  $w_0$  с коэффициентом пропорциональности  $K_1$ . Касательные же напряжения действуют на боковых поверхностях вставленной части. Они прямо пропорциональны касательным вертикальным перемещениям с коэффициентом пропорциональности  $K_2$ . Эти напряжения возникают по двум причинам: от поступательного вертикального перемещения вставленной части  $w_0$  и от ее вращения относительно центра «с». Первая составляющая постоянна, а вторая – линейно знакопеременная. Коэффициенты  $K_1$  и  $K_2$  в СИ имеют размерность  $H \cdot m^{-3}$ .

Пользуясь вышесказанным, из условий равновесия вставленной части балки получим:

$$4a w_0 (bK_1 + hK_2) = N_x = \frac{w_0}{B} \quad (4.2.7)$$

$$\frac{4}{3} a^2 \frac{dw}{dx} (bK_1 + hK_2) = a N_x - M_x = \frac{1}{D} \frac{dw}{dx}$$

Через  $b$  и  $h$  обозначены ширина и толщина поперечного сечения вставленной части балки. Из этих равенств получим следующую связь между параметрами упруго защемленной опоры:

$$D = \frac{3B}{a^2} \quad (4.2.8)$$

#### 4. Условия упруго защемленной опоры для задачи устойчивости сжатого стержня.

Рассмотрим задачу устойчивости сжатого стержня при наличии упруго защемленной опоры. Будем считать, что левый край стержня упруго защемлен, а правый край неподвижен. На наружном конце упруго защемленной опоры приложена горизонтальная осевая сжимающая сила  $P$ . На рис.4.2.2 схематически представлен вид упруго защемленной опоры при незначительном возмущении стержня. Для наглядности угол вращения вставленной части  $\alpha$  и вертикальное перемещение  $w_0$  показаны существенно увеличенно.

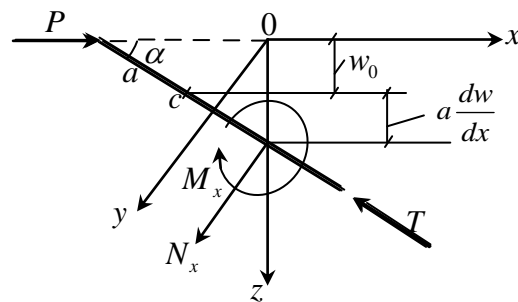


рис.4.2.2

Строго говоря поперечная сила  $N_x$  не вертикальна, а перпендикулярна оси возмущенного стержня. На правом конце вставленной части действуют изгибающий момент  $M_x$  и две взаимоперпендикулярные силы. Осевая сила  $T$  не влияет ни на вращение, ни на вертикальное смещение вставленной части. Поперечная сила  $N_x$  относительно центра вставленной части « $c$ » дает вращающий момент  $(-aN_x)$ , который вместе с моментом  $M_x$  стремится вращать вставленную часть на угол, тангенс которого равен  $D(aN_x - M_x)$ . На левом конце вставленной части действует горизонтальная сила  $P$ , которая относительно точки « $c$ » дает момент  $\left(-Pa \frac{dw}{dx}\right)$ ,

стремящийся увеличить тангенс угла вращения на величину  $\left( D P a \frac{dw}{dx} \right)$ . По этому тангенс полного угла вращения вставленной части будет:

$$\left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} = D \left( a N_x - M_x + P a \frac{dw}{dx} \right) \quad (4.2.9)$$

Рассмотрим теперь вопрос о вертикальном смещении вставленной части. Поперечная сила  $N_x$  сообщает этой части стержня перемещение своего направления  $BN_x$ .

Горизонтальная же сила левого конца  $P$  имеет составляющую  $P \sin \alpha \approx P \operatorname{tg} \alpha = P \frac{dw}{dx}$ , перпендикулярную вставленной части, которая стремится уменьшить это смещение на величину  $BP \frac{dw}{dx}$ . Из – за малости угла  $\alpha$  все компоненты перемещения можно

считать вертикальными. По этому значение прогиба сечения  $x = 0$  будет:

$$w|_{x=0} = a \frac{dw}{dx} + BN_x - BP \frac{dw}{dx} \quad (4.2.10)$$

Выражения (4.6.9) и (4.6.10) являются условиями рассматриваемой упруго защемленной опоры для задачи устойчивости сжатого стержня.

### 5. Уменьшение сжимающей силы упруго защемленной опорой

В отличие от традиционной постановки задачи устойчивости попытаемся учитывать уменьшение сжимающей силы, которое происходит по причине трения вставленной части стержня с упругим массивом под действием приложенной внешней силы  $P$ . Не трудно заметить, что условия упруго защемленной опоры (4.2.9) и (4.2.10) справедливы и в этом случае, поскольку касательные напряжения трения, действующие на поверхности контакта с упругим массивом, параллельны оси вставленной части, в силу чего они не влияют на значения прогиба и его производной. Вследствие трения на стержень будет действовать не сила  $P$ , а ее некоторая часть  $T$ . Будем считать, что вставленная часть стержня не скользит внутри упругого массива. Тогда можно считать, что сила трения прямо пропорциональна внешней силе  $P$ . Следовательно на стержень будет действовать сила

$$T = P - mP \quad (4.2.11)$$

Значение коэффициента  $m$  зависит от жесткостей упруго защемленной опоры. Так как параметры  $D$  и  $B$  связаны соотношением (4.2.8), то эту зависимость можно

представить как функцию от одного из них, например от параметра  $B$ . Очевидно, что зависимость  $m = m(B)$  является убывающей функцией. При  $B = 0$  упруго защемленная опора является абсолютно жесткой опорой и всю силу  $P$  целиком берет на себя, т.е. при  $B = 0$ ;  $m = 1$ . Конечно этот предельный случай в действительности не существует и всегда  $m < 1$  и  $T > 0$ .

С ростом  $B$  упруго защемленная опора слабеет, в результате которого коэффициент  $m$  уменьшается и при  $B \rightarrow \infty$  его значение стремится к нулю, т.е. сила трения исчезает и упруго защемленная опора превращается в свободный конец. Длина стержня уже становится  $l + 2a$ .

На рис. 4.2.3 представлена качественная картинка зависимости  $m = m(B)$ .

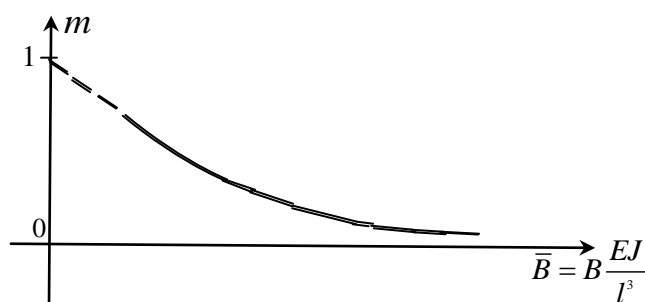


рис.4.6.3

Этим свойством обладает, например, функция

$$m = \frac{1}{1 + \bar{B}^\beta}, \quad \beta > 0, \quad (4.2.12)$$

где  $E$  -модуль Юнга материала,  $J$  -наименьший момент инерции поперечного сечения стержня. Значение  $\beta$  для конкретной упруго защемленной опоры можно определить экспериментально. В ниже рассматриваемой задаче для простоты будем считать  $\beta = 1$ .

### 6. Задача устойчивости стержня при учете уменьшения сжимающей силы упруго защемленной опорой.

В правой системе декартовых координат  $x, y, z$  рассмотрим изотропный стержень длины  $l$  и постоянного поперечного сечения произвольной симметричной формы (рис. 4.2.4). Левый край стержня малой длиной  $2a$  вставлен в упругий массив,

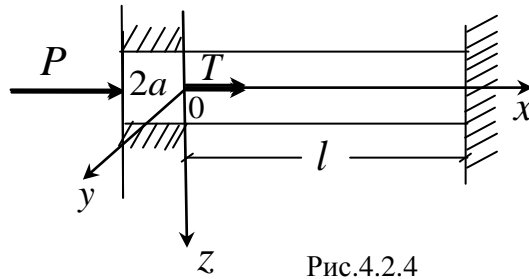


Рис.4.2.4

образуя упруго защемленную опору, а другой край стержня жестко защемлен. К свободному концу упруго защемленной опоры приложена осевая сила  $P$ . Из – за трения вставленной части стержня с упругим массивом на стержень действует сила  $T$ :

$$T = (1 - m)P, \quad m = \frac{1}{1 + B \frac{EJ}{l^3}} \quad (4.2.13)$$

Дифференциальное уравнение задачи устойчивости рассматриваемого стержня имеет известный вид [42]:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + k^2 \frac{d^2 w}{dx^2} = 0, \quad k^2 = \frac{T}{EJ} = \frac{(1 - m)P}{EJ} \quad (4.2.14)$$

Общее решение уравнения (4.2.14) будет

$$w = c_1 + c_2 x + c_3 \cos kx + c_4 \sin kx \quad (4.2.15)$$

где  $c_i$  - постоянные интегрирования. В качестве краевых условий задачи будут условия упруго защемленной опоры (4.2.9) (4.2.10) и условия жестко защемления края стержня  $x = l$ :

$$w|_{x=l} = \frac{dw}{dx}|_{x=l} = 0 \quad (4.2.16)$$

Изгибающий момент  $M_x$  и поперечная сила  $N_x$  возмущенного стержня имеют известные выражения

$$\begin{aligned} M_x &= -EJ \frac{d^2 w}{dx^2} = EJk^2 (c_3 \cos kx + c_4 \sin kx) \\ N_x &= -EJ \frac{d^3 w}{dx^3} = EJk^3 (c_4 \cos kx - c_3 \sin kx) \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

Примем безразмеривающие обозначения:

$$x = l\bar{x}, \quad a = nl, \quad k = \frac{\bar{k}}{l}, \quad \bar{T} = \frac{Tl^2}{EJ}, \quad \bar{P} = \frac{Pl^2}{EJ}, \quad (T = k^2 EJ \Rightarrow \bar{T} = \bar{k}^2, \quad \bar{P} = \alpha\bar{k}^2),$$

$$B = \frac{\bar{B}l^3}{EJ}, \quad D = \frac{\bar{D}l}{EJ}, \quad \left( D = \frac{3B}{a^2} \Rightarrow D = \frac{3\bar{B}l}{n^2 EJ} \right), \quad c_1 = l\bar{c}_1, \quad c_2 = \bar{c}_2, \quad c_3 = l\bar{c}_3, \quad (4.2.18)$$

$$c_4 = l\bar{c}_4, \quad \alpha = \frac{1}{1-m} = 1 + \frac{1}{B}$$

Краевые условия (4.2.9), (4.2.10) и (4.2.16) с учетом (4.2.17) и обозначений (4.2.18) приводят к следующей системе четырех однородных уравнений относительно безразмерных постоянных интегрирования  $\bar{c}_i$ .

$$\begin{cases} n(n - 3\bar{B}\alpha\bar{k}^2)\bar{c}_2 + 3\bar{B}\bar{k}^2\bar{c}_3 + n\bar{k}(n - 3\bar{B}(1 + \alpha)\bar{k}^2)\bar{c}_4 = 0 \\ \bar{c}_1 + (\bar{B}\alpha\bar{k}^2 - n)\bar{c}_2 + \bar{c}_3 + \bar{k}(\bar{B}(\alpha - 1)\bar{k}^2 - n)\bar{c}_4 = 0 \\ \bar{c}_1 + \bar{c}_2 + \bar{c}_3 \cos \bar{k} + \bar{c}_4 \sin \bar{k} = 0 \\ \bar{c}_2 - \bar{c}_3 \bar{k} \sin \bar{k} + \bar{c}_4 \bar{k} \cos \bar{k} = 0 \end{cases} \quad (4.2.19)$$

Безразмерные значения действительной критической силы  $\bar{P} = \alpha\bar{k}^2$  определяются с помощью условия существования нетривиальных решений однородной системы (4.2.19), т.е. равенства нулю ее определителя.

## 7. Численный пример.

Пусть

$$n = 0.1, \quad \alpha = 1 + \frac{1}{B} \quad (4.2.20)$$

В нижеприведенной таблице представлены результаты решения задачи для достаточно большого промежутка изменения параметра упруго зашеченной опоры ( $0.01 \leq \bar{B} \leq 10000$ ), т.е. практически от абсолютно жесткого защемления ( $\bar{B} = 0.01$ ) до свободного конца стержня ( $\bar{B} = 10000$ ).



Табл. 4.2.1

	$\bar{B}$						
	0.01	0.1	1	10	100	1000	10000
$m$	0.9900	0.9091	0.5	0.0909	0.0099	0.0010	0.0001
$\alpha$	101	11	2	1.1	1.01	1.001	1.0001
$\bar{k}$	0.557	0.801	1.052	1.266	1.309	1.313	1.314
$\bar{T}$	0.310	0.641	1.107	1.603	1.712	1.725	1.726
$\bar{P}$	31.333	7.049	2.215	1.763	1.730	1.726	1.726

Таблица 4.2.1 относится к наиболее важной, т. е. первой, форме потеря устойчивости стержня.

При  $\bar{B} = 10000$  упруго защемленная опора практически исчезает, превращаясь в свободный конец и длина стержня становится равной  $l + 2a = 1.2l$ . Пользуясь формулой Эйлера и коэффициентом приведения длины, для этого случая получим:

$$P = \frac{\pi^2 E J}{4(1.2l)^2} \Rightarrow \bar{P} = 1.713 \quad (4.2.21)$$

Это значение меньше соответствующего значения таблицы 1.726 на 0.76%.

## 8. Основные выводы

Данные таблицы приводят к следующим заключениям

1. Из-за трения вставленной части стержня с упругим массивом значение внешней (действительной) критической силы  $P$  больше значения силы  $T$ , действующей на стержень.
2. С ростом параметра  $\bar{B}$ , т.е. с ослаблением упруго защемленной опоры, значения  $P$  и  $T$  уменьшаются.
3. При  $\bar{B} = 10000$ , когда упруго защемленная опора практически исчезает, превращаясь в свободный конец, силы  $P$  и  $T$  принимают одинаковое значение.
4. Это значение отличается от значения критической силы стержня длины  $l + 2a$ , один конец которого свободен а другой жестко защемлен, меньше одного процента. Эта разница является следствием того, что при выводе условий упруго

защемленной опоры, пользуясь относительной малостью длины этой опоры, было принято допущение, согласно которому часть стержня, вставленная в упругий массив, поступательно перемещается и вращается без деформирования.

### **§4.3 Неклассическая задача упруго защемленной ортотропной балки переменной толщины при совместном действии сжимающих сил и поперечной нагрузки**

На основе уточненной теории ортотропных пластин переменной толщины [107] получаются уравнения задачи изгиба балки при одновременном действии сжимающих сил и поперечной нагрузки. Считается, что края балки имеют упруго защемленную опору и учитывается уменьшение сжимающей силы опорой вследствие трения. Переходя к безразмерным величинам решается конкретная задача. Обсуждается вопрос устойчивости балки. На основе полученных результатов делаются заключения.

В современных сооружениях и приборах часто встречаются случаи, когда на тонкостенные элементы переменной толщины одновременно действуют поперечные и продольные нагрузки. Существуют работы, в которых вопросы напряженно деформированного состояния и устойчивости таких элементов исследуются в рамках классической теории механики (например [65]).

Применение современных материалов привело к необходимости проведения отмеченных исследований по уточненным теориям, учитывающим влияния тех факторов, которые в классической теории пренебрегаются.

В настоящей параграфе делается попытка частично восполнить этот пробел.

1. В правой системе декартовых координат  $x, y, z$  рассмотрим ортотропную балку длины  $l$ , постоянной ширины  $b$  и переменной толщины  $h$ . Главные направления анизотропии материала параллельны координатным осям. Концы балки малой длиной  $2a$  и постоянной толщиной  $h_0$  вставлены в упругий массив, образуя упруго защемленную опору [131-134]. На концах балки действуют сжимающие силы осевого направления  $P$  и балка одновременно несет равномерно распределенную поперечную нагрузку постоянной поверхностной интенсивности  $q$  (рис. 4.3.1).

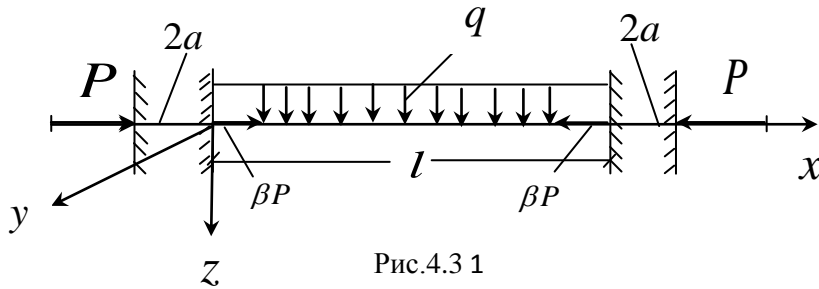


Рис.4.3 1

Пользуясь уточненной теорией ортотропных пластин переменной толщины ([107], стр.18) получим следующие разрешающие уравнения задачи изгиба рассматриваемой балки:

$$\left( Eh^2 \frac{d^2 h}{dx^2} + \frac{12}{b} \beta P \right) \frac{d^2 w}{dx^2} - h \left( 8 + Ea_{55} h \frac{d^2 h}{dx^2} \right) \frac{d \varphi_1}{dx} - 16 \frac{dh}{dx} \varphi_1 = 12q$$

$$Eh^2 \frac{d^3 w}{dx^3} + 2Eh \frac{dh}{dx} \frac{d^2 w}{dx^2} - Ea_{55} h^2 \frac{d^2 \varphi_1}{dx^2} - 2Ea_{55} h \frac{dh}{dx} \frac{d \varphi_1}{dx} + 8 \varphi_1 = 0 \quad (4.3.1)$$

Здесь, из-за отсутствия напряжения  $\sigma_y$  и пренебрежения напряжения  $\sigma_z$ , параметр материала  $B_{11}$  заменен модулем Юнга материала осевого напряжения  $E$ .  $a_{55}$  - известная постоянная упругости материал [29], связывающая деформацию поперечного сдвига  $e_{xz}$  и касательного напряжения  $\tau_{xz}$ ,  $w$ -прогиб,  $\varphi_1$ -функция характеризующая распределение касательного напряжения  $\tau_{xz}$  в срединной плоскости балки  $z=0$ . Коэффициент  $\beta$  учитывает уменьшение сжимающей силы  $P$ , которое происходит в результате трения вставленной части балки с упругим массивом.

Коэффициент  $\beta$  изменяется в пределах  $0 \leq \beta \leq 1$ , что зависит от жесткости упруго заземленной опоры. Случай  $\beta=0$  соответствует абсолютно жесткой опоре. Тогда опора на себя берет всю внешнюю силу и на стержень сжимающая сила не действует. С возрастанием параметра  $\beta$  опора слабеет, в результате которого пропорциональным образом увеличивается часть внешней силы, действующей на стержень. Случай  $\beta=1$  соответствует отсутствию опоры. Тогда вся приложенная

сила  $P$  действует на стержень. Следовательно, обобщая вышесказанное, можно сказать, что на стержень всегда действует сжимающая сила  $\beta P$ .

Отметим, что в выражении грузового члена  $Z_2$  [29] к поверхностной интенсивности поперечной нагрузки  $q$  добавлена интенсивность той поперечной нагрузки, которая возникает в результате сжатия искривленной балки.

Примем следующие безразмеривающие обозначения:

$$\begin{aligned} x &= l\bar{x}, \quad h = h_0 H, \quad h_0 = m_1 l, \quad b = m_2 l, \quad w = h_0 \bar{w}, \quad Ea_{55} = \chi, \\ \varphi_1 &= E\bar{\varphi}, \quad q = E\bar{q}m_1^3, \quad P = Eh_0^2\bar{P}, \quad N_x = Eh_0^2\bar{N}_x, \quad M_x = Eh_0^3\bar{M}_x \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Параметр  $\chi$  учитывает влияние деформации поперечного сдвига  $e_{xz}$ . При пренебрежении этого влияния надо положить  $\chi = 0$ . Уравнения (4.3.1) в обозначениях (4.3.2) принимает вид:

$$\left\{ \begin{aligned} & m_1^2 \left( m_1 m_2 H^2 \frac{d^2 H}{d\bar{x}^2} + 12\beta\bar{P} \right) \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} - m_2 H \left( 8 + \chi m_1^2 H \frac{d^2 H}{d\bar{x}^2} \right) \frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{x}} - \\ & - 16m_2 \frac{dH}{d\bar{x}} \bar{\varphi} = 12m_2 \bar{q} m_1^2 \\ & m_1^3 H^2 \frac{d^3 \bar{w}}{d\bar{x}^3} + 2m_1^3 H \frac{dH}{d\bar{x}} \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} - \chi m_1^2 H^2 \frac{d^2 \bar{\varphi}}{d\bar{x}^2} - 2\chi m_1^2 H \frac{dH}{d\bar{x}} \frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{x}} + 8\bar{\varphi} = 0 \end{aligned} \right. \quad (4.3.3)$$

Так как для получения выражений поперечной силы балки  $N_x$  и изгибающего момента  $M_x$  нужно соответствующие выражения пластинки [107] (стр. 13, 17) умножить на ширину балки  $b$ , то для безразмерных поперечной силы  $\bar{N}_x$  и изгибающего момента  $\bar{M}_x$  с учетом обозначений (4.3.2) получим:

$$\bar{N}_x = \frac{m_2 H}{12m_1} \left[ 8\bar{\varphi} - m_1^2 H \frac{dH}{d\bar{x}} \left( m_1 \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} - \chi \frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{x}} \right) \right], \quad \bar{M}_x = -\frac{m_2 H^3}{12} \left( m_1 \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} - \chi \frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{x}} \right) \quad (4.3.4)$$

При наличии осевой сжимающей силы условия упругого защемления балки имеет вид [131]:

$$w = (a - \beta BP) \frac{dw}{dx} + BN_x, \quad \frac{dw}{dx} = D \left( aN_x - M_x + \beta aP \frac{dw}{dx} \right) \quad (4.3.5)$$

Параметры опоры связаны соотношением [133]

$$D = \frac{3B}{a^2} \quad (4.3.6)$$

При обозначени

$$a = m_3 l, \quad B = \frac{\bar{B}}{El} \quad (4.3.7)$$

Краевые условия задачи (4.3.5) примут вид:

при  $\bar{x} = 0$  и  $\bar{x} = 1$

$$12\bar{w} - 12(m_3 - \beta m_1^2 \bar{B}\bar{P}) \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} - m_2 \bar{B}H \left[ 8\bar{\varphi} - m_1^2 H \left( m_1 \frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}^2} - \chi \frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{x}} \right) \frac{dH}{d\bar{x}} \right] = 0 \quad (4.3.8)$$

$$4m_3 (m_3 - 3\beta \bar{B}m_1^2 \bar{P}) \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} - m_2 \bar{B}H \left[ 8m_3 \bar{\varphi} + m_1^2 H \left( H - m_3 \frac{dH}{d\bar{x}} \right) \left( m_1 \frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}^2} - \chi \frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{x}} \right) \right] = 0$$

Таким образом, решение неклассической задачи изгиба упруго защемленной ортотропной балки переменной толщины при совместном действием сжимающих осевых сил и распределенной поперечной нагрузки свелось к решению системы дифференциальных уравнений четвертого порядка (4.4.3) с краевыми условиями (4.3.8).

Отметим, что при  $\bar{q} = 0$  получится задача устойчивости рассматриваемой балки.

2. Рассмотрим случай, когда толщина балки изменяется по линейному закону

$$h = h_0 + h_1 x \Rightarrow H = 1 + \gamma \bar{x}, \quad \gamma = \frac{h_1}{m_1} \quad (4.3.9)$$

В этом случае система уравнений (4.3.3) и краевые условия (4.3.8) примут вид:

$$\begin{cases} 3m_1^2 \beta \bar{P} \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} - 2m_2 (1 + \gamma \bar{x}) \frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{x}} - 4m_2 \gamma \bar{\varphi} = 3m_2 \bar{q} m_1^2 \\ m_1^3 (1 + \gamma \bar{x})^2 \frac{d^3 \bar{w}}{d\bar{x}^3} + 2m_1^3 \gamma (1 + \gamma \bar{x}) \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} - \\ - \chi m_1^2 (1 + \gamma \bar{x})^2 \frac{d^2 \bar{\varphi}}{d\bar{x}^2} - 2\chi m_1^2 \gamma (1 + \gamma \bar{x}) \frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{x}} + 8\bar{\varphi} = 0 \end{cases} \quad (4.3.10)$$

при  $\bar{x} = 0$  и  $\bar{x} = 1$

$$\begin{cases} 12\bar{w} - 12(m_3 - \beta m_1^2 \bar{B} \bar{P}) \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} - \\ - m_2 \bar{B} (1 + \gamma \bar{x}) \left[ 8\bar{\varphi} - m_1^2 \gamma (1 + \gamma \bar{x}) \left( m_1 \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} - \chi \frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{x}} \right) \right] = 0 \\ 4m_3 (m_3 - 3\beta \bar{B} m_1^2 \bar{P}) \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} - \\ - m_2 \bar{B} (1 + \gamma \bar{x}) \left[ 8m_3 \bar{\varphi} + m_1^2 (1 + \gamma \bar{x}) (1 + \gamma (\bar{x} - m_3)) \left( m_1 \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} - \chi \frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{x}} \right) \right] = 0 \end{cases} \quad (4.3.11)$$

Выражения безразмерной поперечной силы и изгибающего момента будут:

$$\begin{aligned} \bar{N}_x &= \frac{m_2 (1 + \gamma \bar{x})}{12m_1} \left[ 8\bar{\varphi} - m_1^2 \gamma (1 + \gamma \bar{x}) \left( m_1 \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} - \chi \frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{x}} \right) \right] \\ \bar{M}_x &= -\frac{m_2 (1 + \gamma \bar{x})^3}{12} \left( m_1 \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} - \chi \frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{x}} \right) \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

Задачу удобно решать методом коллокаций. С этой целью неизвестные функции  $\bar{w}$  и  $\bar{\varphi}$  представим в виде многочленов

$$\bar{w} = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \bar{x}^i, \quad \bar{\varphi} = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i \bar{x}^i \quad (4.3.13)$$

Промежуток  $0 \leq \bar{x} \leq 1$  разделим на  $n$  части. Удовлетворив уравнениям (4.3.10) в точках деления и краевым условиям (4.3.11), относительно неизвестных постоянных  $a_0, a_i$  и  $b_0, b_i$  получим систему  $2(n+1)$  линейных алгебраических уравнений с

постоянными коэффициентами. Решая эту систему определим значения функций  $\bar{w}$  и  $\bar{\varphi}$ . Расчеты будем повторять с увеличением числа деления до практической сходимости процесса вычислений.

Табл. 4.3.1

			$\bar{x}$													
			0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1			
$\beta=0.5$		$\chi=0$	$\bar{w}$	0.048	0.294	0.675	0.959	1.067	1.001	0.803	0.537	0.273	0.079	0.022		
			$\bar{N}_x$	0.854	0.112	-0.07	-0.05	0.014	0.052	0.046	-0.001	-0.085	-0.195	-0.339		
			$\bar{M}_x$	-0.149	-0.038	0.047	0.100	0.122	0.112	0.070	-0.002	-0.104	-0.235	-0.392		
		$\chi=5$	$\bar{w}$	0.048	0.297	0.682	0.968	1.075	1.005	0.805	0.537	0.272	0.081	0.030		
			$\bar{N}_x$	1.062	0.229	-0.015	-0.032	0.007	0.032	0.021	-0.03	-0.115	-0.225	-0.355		
			$\bar{M}_x$	-0.187	-0.074	0.009	0.063	0.084	0.074	0.032	-0.04	-0.143	-0.274	-0.435		
		$\chi=10$	$\bar{w}$	0.048	0.301	0.691	0.979	1.086	1.013	0.809	0.538	0.272	0.083	0.037		
			$\bar{N}_x$	1.304	0.355	0.043	-0.014	0.002	0.014	-0.004	-0.058	-0.144	-0.254	-0.383		
			$\bar{M}_x$	-0.224	-0.112	-0.028	0.025	0.046	0.035	-0.007	-0.079	-0.182	-0.314	-0.475		
		$\beta=0.5$		$\chi=0$	$\bar{w}$	0.049	0.302	0.697	0.992	1.104	1.034	0.828	0.553	0.280	0.082	0.025
					$\bar{N}_x$	0.869	0.123	-0.073	-0.051	0.016	0.056	0.049	-0.003	-0.091	-0.203	-0.337
					$\bar{M}_x$	-0.154	-0.039	0.048	0.104	0.127	0.116	0.072	-0.003	-0.109	-0.243	-0.402
$\chi=5$	$\bar{w}$			0.049	0.313	0.721	1.024	1.135	1.059	0.845	0.562	0.284	0.085	0.033		
	$\bar{N}_x$			1.092	0.245	-0.018	-0.036	0.008	0.036	0.023	-0.033	-0.122	-0.234	-0.359		
	$\bar{M}_x$			-0.191	-0.076	0.012	0.068	0.089	0.078	0.034	-0.042	-0.148	-0.282	-0.443		
$\chi=10$	$\bar{w}$			0.049	0.324	0.749	1.059	1.171	1.088	0.865	0.573	0.289	0.088	0.040		
	$\bar{N}_x$			1.339	0.378	0.043	-0.018	0.003	0.017	-0.003	-0.062	-0.152	-0.263	-0.388		
	$\bar{M}_x$			-0.229	-0.114	-0.026	0.029	0.052	0.039	-0.005	-0.081	-0.188	-0.322	-0.483		

$\beta=0.75$	$\chi = 0$	$\bar{w}$	0.049	0.311	0.721	1.028	1.143	1.069	0.854	0.569	0.288	0.085	0.028
		$\bar{N}_x$	0.885	0.135	-0.079	-0.057	0.018	0.062	0.053	-0.005	-0.098	-0.213	-0.334
		$\bar{M}_x$	-0.159	-0.042	0.050	0.109	0.132	0.119	0.073	-0.006	-0.114	-0.251	-0.413
	$\chi = 5$	$\bar{w}$	0.050	0.331	0.766	1.087	1.203	1.119	0.890	0.589	0.297	0.089	0.357
		$\bar{N}_x$	1.126	0.263	-0.023	-0.041	0.009	0.408	0.025	-0.036	-0.129	-0.243	-0.365
		$\bar{M}_x$	-0.197	-0.079	0.014	0.073	0.096	0.083	0.035	-0.044	-0.154	-0.291	-0.452
	$\chi = 10$	$\bar{w}$	0.052	0.353	0.818	1.155	1.271	1.176	0.930	0.613	0.308	0.094	0.044
		$\bar{N}_x$	1.381	0.405	0.041	-0.022	0.004	0.021	-0.002	-0.067	-0.161	-0.274	-0.393
		$\bar{M}_x$	-0.235	-0.117	-0.024	0.035	0.058	0.045	-0.004	-0.084	-0.194	-0.331	-0.493
$\bar{B} = 0.5, \gamma = 1,$ $\bar{p} = 0.04, \bar{q} = 0.01,$ $m_1 = 0.1, m_2 = 0.3,$ $m_3 = 0.1$			$\bar{x}$										
			0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$\beta=1$	$\chi = 0$	$\bar{w}$	0.049	0.321	0.747	1.066	1.185	1.107	0.883	0.586	0.296	0.088	0.031
		$\bar{N}_x$	0.901	0.148	-0.087	-0.063	0.020	0.068	0.057	-0.007	-0.105	-0.223	-0.329
		$\bar{M}_x$	-0.165	-0.044	0.052	0.114	0.138	0.124	0.074	-0.008	-0.120	-0.259	-0.425
	$\chi = 5$	$\bar{w}$	0.052	0.351	0.817	1.159	1.279	1.187	0.941	0.621	0.312	0.094	0.039
		$\bar{N}_x$	1.165	0.285	-0.028	-0.047	0.012	0.047	0.027	-0.039	-0.139	-0.254	-0.370
		$\bar{M}_x$	-0.203	-0.081	0.016	0.079	0.102	0.088	0.037	-0.047	-0.160	-0.300	-0.462
	$\chi = 10$	$\bar{w}$	0.055	0.388	0.901	1.269	1.391	1.281	1.007	0.659	0.329	0.101	0.048
		$\bar{N}_x$	1.431	0.439	0.039	-0.028	0.006	0.026	-0.001	-0.073	-0.173	-0.286	-0.399
		$\bar{M}_x$	-0.243	-0.120	-0.021	0.043	0.066	0.050	-0.002	-0.087	-0.202	-0.342	-0.503



Табл.4.3.2

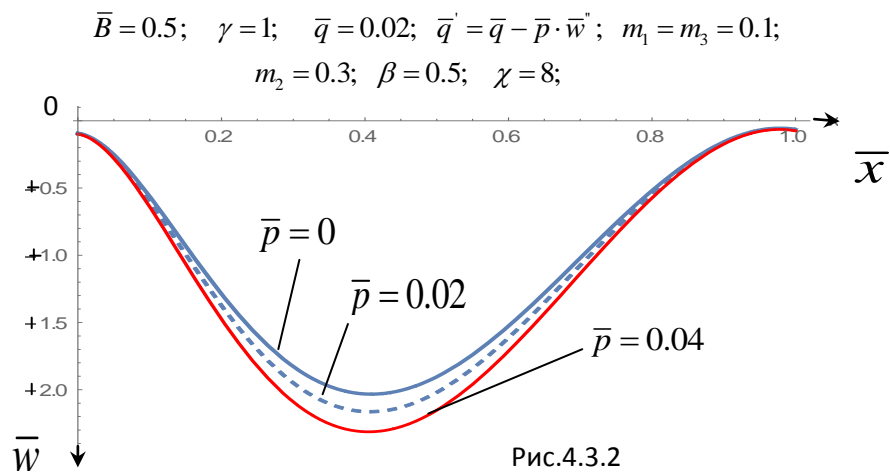
$\bar{B} = 0.5, \gamma = 1$ $\bar{q} = 0.02, \chi = 8$ $\beta = 0.75, m_1 = 0.1$ $m_2 = 0.3, m_3 = 0.1$		$\bar{x}$											
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	
$\bar{p}$	0	$\bar{w}$	0.092	0.562	1.288	1.827	2.032	1.904	1.527	1.021	0.519	0.157	0.064
		$\bar{q}'$	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
		$\bar{N}_x$	4.744	1.165	0.085	-0.081	0.0035	0.068	0.017	-0.170	-0.486	-0.908	-1.425
		$\bar{M}_x$	-0.409	-0.189	-0.028	0.073	0.113	0.094	0.015	-0.124	-0.323	-0.582	-0.904
	0.02	$\bar{w}$	0.095	0.598	1.375	1.949	2.162	2.020	1.615	1.075	0.545	0.165	0.069
		$\bar{q}'$	-2.46	-0.436	0.473	0.771	0.743	0.553	0.289	0.002	-0.283	-0.550	-0.783
		$\bar{N}_x$	4.861	1.232	0.079	-0.094	0.006	0.079	0.021	-0.181	-0.513	-0.939	-1.442
		$\bar{M}_x$	-0.418	-0.193	-0.025	0.081	0.123	0.102	0.018	-0.127	-0.332	-0.596	-0.918
	0.04	$\bar{w}$	0.099	0.639	1.475	2.090	2.312	2.153	1.714	1.136	0.574	0.174	0.075
		$\bar{q}'$	-5.343	-0.964	1.012	1.649	1.576	1.151	0.576	-0.039	-0.636	-1.186	-1.67
		$\bar{N}_x$	4.99	1.307	0.071	-0.109	0.009	0.091	0.026	-0.195	-0.541	-0.973	-0.459
		$\bar{M}_x$	-0.428	-0.198	-0.022	0.090	0.133	0.110	0.020	-0.131	-0.343	-0.612	-0.934

Табл.4.3.3

$\bar{B} = 0.5, \gamma = 1$ $m_1 = 0.1$ $m_2 = 0.3$ $m_3 = 0.1$	$\beta = 0.25$		$\beta = 0.5$		$\beta = 0.75$		$\beta = 1$	
	$\chi$		$\chi$		$\chi$		$\chi$	
	0	10	0	10	0	10	0	10
$\bar{P}_{кр.}$	1.198	0.552	0.599	0.276	0.399	0.184	0.299	0.138
$\bar{x}_{max}$	0.38	0.31	0.38	0.31	0.38	0.31	0.38	0.31

Табл.4.3.4

$B = 0.5, \bar{q} = 0.01$ $\beta = 0.5 \quad \gamma = 1$ $m_1 = m_3 = 0.1, m_2 = 0.3$		$\frac{\bar{p}}{\bar{p}_{кр.}}$					
		0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$\chi = 0$	$\bar{w}_{max}$	1.033	1.280	1.690	2.502	4.890	180.86
	$\bar{P}_{кр.} = 0.599$	$\bar{x}_{max}$	0.41	0.41	0.4	0.4	0.39
$\chi = 10$	$\bar{w}_{max}$	1.013	1.246	1.628	2.383	4.596	84.609
	$\bar{P}_{кр.} = 0.276$	$\bar{x}_{max}$	0.41	0.4	0.39	0.38	0.36



$$\bar{B} = 0.5; \quad \gamma = 1; \quad \bar{q} = 0.02; \quad \bar{q}' = \bar{q} - \bar{p} \cdot \bar{w}''; \quad m_1 = m_3 = 0.1; \\ m_2 = 0.3; \quad \beta = 0.5; \quad \chi = 8;$$

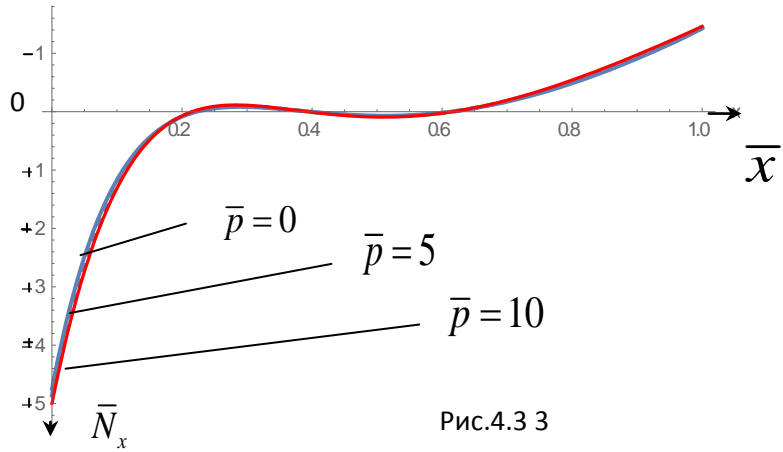


Рис.4.3.3

$$\bar{B} = 0.5; \quad \gamma = 1; \quad \bar{q} = 0.02; \quad \bar{q}' = \bar{q} - \bar{p} \cdot \bar{w}''; \quad m_1 = m_3 = 0.1; \\ m_2 = 0.3; \quad \beta = 0.5; \quad \chi = 8;$$

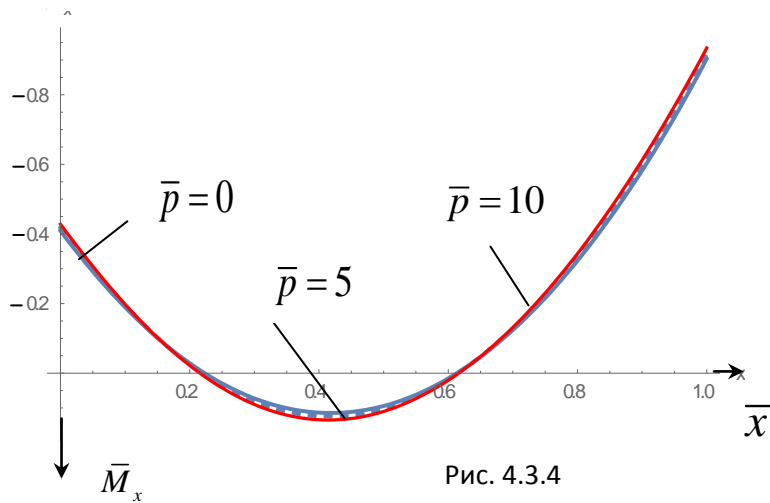


Рис. 4.3.4

$$\bar{B} = 0.5; \quad \gamma = 1; \quad \bar{q} = 0.02; \quad \bar{q}' = \bar{q} - \bar{p} \cdot \bar{w}''; \quad m_1 = m_3 = 0.1; \\ m_2 = 0.3; \quad \beta = 0.5; \quad \chi = 8;$$

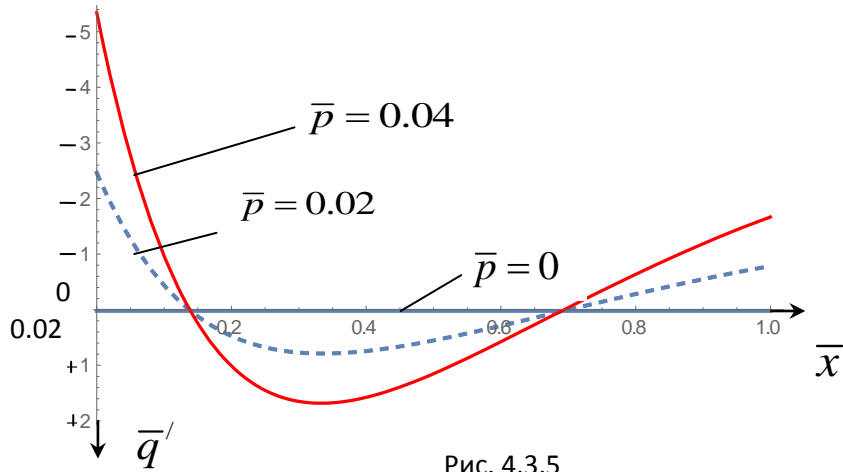


Рис. 4.3.5

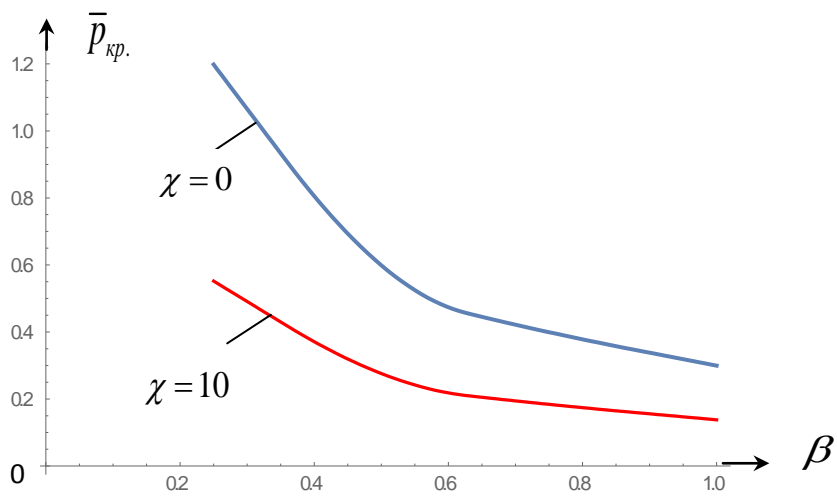


Рис.4.3.6

На основе полученных результатов вычислений составлены таблицы безразмерных расчетных величин и для наглядности построены графики.

Данные таблиц и графики рисунков приводят к следующим заключениям.

1. Из таблицы (4.3.2) и рисунка (4.3.5) видно, что интенсивность поперечной нагрузки  $\bar{q}'$ , которая является суммой интенсивностей приложенной нагрузки  $\bar{q}$  и нагрузки, возникающей сжатием искривленной балки « $-\bar{P} d^2\bar{w}/d\bar{x}^2$ » вблизи упруго заземленных опор имеет отрицательный знак, а в остальной части балки-положительный. Нетрудно убедиться, что это является следствием противоположности знаков  $d^2\bar{w}/d\bar{x}^2$ .

2. С возрастанием параметра  $\beta$  упруго заземленная опора слабеет в результате которого пропорциональным образом увеличивается часть внешней сжимающей силы, действующей на балку. Поэтому при возрастании  $\beta$  критическое значение внешней силы  $\bar{P}_{кр}$  уменьшается. Возрастание же параметра  $\chi$  соответствует уменьшению сопротивляемости к деформированию поперечного сдвига, что как известно [131], приводит к уменьшению критической силы. Отмеченные обстоятельство демонстрированы данными таблицы 3 и графиками рисунка (4.3.6).

3. С возрастанием отношения  $\bar{P}/\bar{P}_{кр}$  значение сжимающих сил, действующих на балку, приближается к критическому значению, что приводит к увеличению прогибов балки. Когда это отношение стремится к единице, даже при незначительной интенсивности поперечной нагрузки  $\bar{q}$  максимальных прогиб балки  $\bar{w}_{max}$  резко увеличивается. Это, конечно, следствие геометрически линейной постановки задачи и допущения о неограниченной упругости материала. В действительности резкое возрастание прогибов, как правило, сопровождается появлением пластических деформаций, что обычно приводит к разрушению балки. Координата сечения максимального прогиба  $\bar{x}_{max}$  всегда меньше 0.5, т.е. сечения максимального прогиба всегда находится левее середины пролета балки. С возрастанием  $\bar{P}/\bar{P}_{кр}$  сечение максимального прогиба незначительно смещается в сторону тонкого края балки  $\bar{x} = 0$ . Эти заключения непосредственно следуют из данных таблицы (4.3.4).

Из таблицы (4.3.2) и рисунка (4.3.5) видно, что интенсивность поперечной нагрузки  $\bar{q}'$  вблизи упруго заземленных опор имеет отрицательный знак, а в остальной части балки-положительный. Нетрудно убедиться, что это является следствием

противоположности знака  $d^2\bar{w}/d\bar{x}^2$ . По этой же причине изгибающий момент также вблизи упруго-защемленных опор имеет отрицательный знак, а в остальной части балки- положительный (рис. 4.3.6).

# ГЛАВА V

## НЕ КЛАССИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ИЗГИБА СТЕРЖНЕЙ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ПРИ УЧЕТЕ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА

### §5.1 Задача изгиба ортотропной балки переменной толщины с упруго-защемленной опорой

Рассматривается ортотропная балка прямоугольного поперечного сечения переменной толщины. Один конец балки упруго защемлен, а другой лежит на классической шарнирной опоре. Краевая часть балки вставлена в упруго-деформируемый массив. Длина этой части достаточно мала относительно длины балки. Пользуясь гипотезой, аналогичной гипотезе Фусса-Винклера, определяются параметры упруго-защемленной опоры. Решается задача изгиба балки линейно переменной толщины при действии равномерно распределенной нагрузки. Получены безразмерные значения прогиба, поперечной силы и изгибающего момента балки, анализ которых привел к качественным заключениям.

1. В правой системе координат  $xuz$  рассмотрим упруго-защемленную опору общего типа (рис.5.1.1).

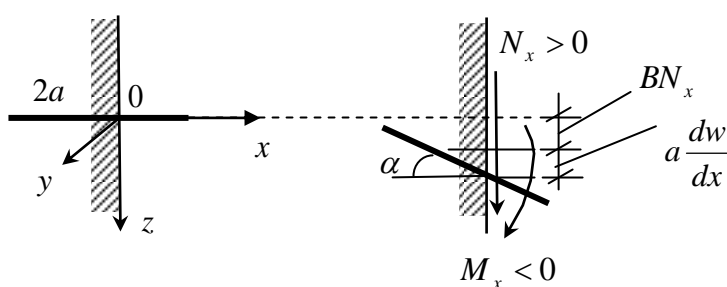


Рис.5.1.1

Краевая часть балки вставлена в упруго-деформируемый массив. Длина этой части  $2a$  достаточно мала длины балки. Для простоты положим, что балка испытывает деформирование только поперечного изгиба. Тогда в опорном сечении балки возникнут только поперечная сила  $N_x$  и изгибающий момент  $M_x$ . Не нарушая

общности, положим, что в принятой системе координат  $N_x > 0, M_x < 0$  (рис.5.1.1). Под действием момента поперечной силы относительно середины вставленной части  $aN_x$  и момента  $M_x$  ось балки в опорном сечении  $x = 0$  будет вращаться на некоторый угол  $\alpha$ . Этот угол, а следовательно и его тангенс  $dw/dx$  зависят от вращающих моментов. В работе [117] условия рассмотренной упруго-защемленной опоры представлены в виде при  $x = 0$

$$w = a \frac{dw}{dx} + BN_x, \quad \frac{dw}{dx} = D(aN_x - M_x) \quad (5.1.1)$$

В этой же работе приведены способы опытного определения параметров  $B$  и  $D$ . Очевидно, что между значениями этих параметров существует определенная связь, обусловленная физико-механическими свойствами упруго-деформированного массива и размерами вставленной части балки. Это связь примет вид [130]

$$\frac{D}{B} = \frac{3}{a^2} \quad (5.1.2)$$

2. Рассмотрим ортотропную балку прямоугольного поперечного сечения  $b \cdot h$ , ширина которого постоянна, а толщина линейно меняется по длине

$$h = h_0 + h_1 x \quad (5.1.3)$$

Здесь  $h_0$  и  $h_1$  заданные постоянные величины, а  $x$ —расстояние от левого края балки (рис.5.1.2). **Левый край** балки толщиной  $h_0$  и длиной  $2a$  вставлены в упруго-деформируемый массив. **Правый край** свободно лежит на классическую шарнирную опору. Балка несет равномерно распределенную нагрузку интенсивности  $q \text{ Н/м}^2$ .

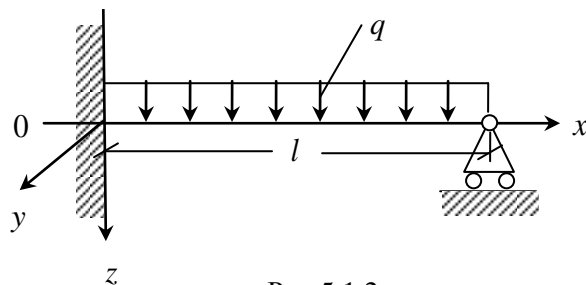


Рис.5.1.2



Дифференциальные уравнения задачи поперечного изгиба рассматриваемой балки в рамках уточненной теории [107], учитывающей влияние деформаций поперечных сдвигов, имеют вид:

$$\begin{aligned} 2h \frac{d\varphi}{dx} + 4\varphi \frac{dh}{dx} &= -3q \\ Eh^2 \frac{d^3w}{dx^3} + 2Eh \frac{d^2w}{dx^2} \frac{dh}{dx} - Ea_{55}h^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2} - 2Ea_{55}h \frac{dh}{dx} \frac{d\varphi}{dx} + 8\varphi &= 0 \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

Здесь  $E$  – модуль Юнга материала по направлению оси  $Ox$ ,  $\varphi$  – искомая функция, определяющая перерезывающую силу  $N_x$ ,  $a_{55}$  – упругая поперечная, связывающая деформацию поперечного сдвига и касательное напряжение балки в плоскости  $yOz$  [29].

Пользуясь [114], для краевых условий можно написать при  $x = 0$

$$w = a \frac{dw}{dx} + BN_x, \quad \frac{dw}{dx} = D(aN_x - M_x) \quad (5.1.5)$$

при  $x = l$

$$w = 0, \quad M_x = 0 \quad (5.1.6)$$

Примем безразмеривающие обозначения:

$$\begin{aligned} x &= l\bar{x}, \quad l = nh_0, \quad h = h_0H, \quad H = 1 + \gamma\bar{x}, \quad \gamma = nh_1 \\ w &= h_0\bar{w}, \quad q = E\bar{q}, \quad a_{55}E = \chi, \quad \varphi = E\bar{\varphi}, \quad b = kh_0, \quad a = ml \\ N_x &= Eh_0^2\bar{N}, \quad M_x = Eh_0^3\bar{M}, \quad B = \frac{\bar{B}}{Eh_0}, \quad D = \frac{\bar{D}}{Eh_0^3} \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

С учетом этих обозначений уравнения (5.1.4) и условия (5.1.5), (5.1.6) примут вид:

$$\begin{aligned} 2H \frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{x}} + 4\gamma\bar{\varphi} &= -3n\bar{q} \\ H^2 \frac{d^3\bar{w}}{d\bar{x}^3} + 2\gamma H \frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}^2} - \chi n H^2 \frac{d^2\bar{\varphi}}{d\bar{x}^2} - 2\chi\gamma n H \frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{x}} + 8n^3\bar{\varphi} &= 0 \end{aligned} \quad (5.1.8)$$

при  $\bar{x} = 0$

$$\bar{w} = m \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} + \bar{B}\bar{N}_x, \quad \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} = n\bar{D}(mn\bar{N} - \bar{M}) \quad (5.1.9)$$

при  $\bar{x} = 1$

$$\bar{w} = 0, \quad \bar{M} = 0 \quad (5.1.10)$$

В рамках теории [107] при обозначениях (5.1.7) безразмерные усилия и изгибающий момент имеют выражения:

$$\bar{N} = \frac{kH^3}{12n^3} \left[ 8n^3 \bar{\varphi} - \gamma H \left( \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} - n\chi \frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{x}} \right) \right] \quad (5.1.11)$$

$$\bar{M} = -\frac{kH^3}{12n^2} \left( \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} - n\chi \frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{x}} \right) \quad (5.1.12)$$

Задачу можно решить методом коллокаций, представив решение в виде степенных многочленов.

$$\bar{w} = a_0 + \sum_{i=1}^j a_i \bar{x}^i, \quad \bar{\varphi} = b_0 + \sum_{i=1}^j b_i \bar{x}^i \quad (5.1.13)$$

Разделив интервал  $0 \leq \bar{x} \leq 1$  на  $j$  части и записывая уравнения (5.1.18) в  $(j-1)$  точках, а краевые условия (5.1.9), (5.1.10) в точках  $\bar{x} = 0, \bar{x} = 1$ , получим систему алгебраических уравнений относительно  $2(j+1)$  неизвестных. Число многочленов (5.1.13), увеличим настолько, чтобы добиться практической сходимости процесса вычислений. Расчеты удобно делать, считая  $\bar{q} = 1$  и получить значения величин  $\bar{w}/\bar{q}$ ,  $\bar{\varphi}/\bar{q}$ ,  $\bar{N}/\bar{q}$  и  $\bar{M}/\bar{q}$ . В силу линейности задачи в конкретном случае можно эти значения умножить на соответствующее значение  $\bar{q}$  и получить решение для этого случая. Пусть

$$\begin{aligned} n = 8, \quad m = 1/16, \quad k = 0,5, \quad \gamma = 1 \\ \bar{B} = 0.5; 1; 2; \quad (\bar{D} = 12\bar{B}); \quad \chi = 0; 8 \end{aligned} \quad (5.1.14)$$

В таблице (5.1.1) иллюстрирован процесс сходимости определения значений  $\bar{w}/\bar{q}$  при  $\bar{B} = 1, \chi = 8$ . Имея в виду, что упругие постоянные материалов определяются обычно с точностью от трех до пяти процентов, нетрудно убедиться, что практическая сходимость в данном случае наступает при  $j < 7$ . Такая же картина имеется и во всех остальных случаях (5.1.14).

Таблица 5.1.1

$\bar{B}=1$	j	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
	$\chi=8$	6	26.43	71.52	117.6	152.9	172.1	174.1	160.2	132.8	94.79	49.23
7		27.45	75.48	125.1	163.3	184.3	187.2	173.1	144.3	103.9	54.82	0.0
8		27.03	74.53	123.4	160.8	181.1	183.6	169.4	140.9	101.1	53.07	0.0
9		27.17	75.08	124.4	162.1	182.8	185.3	171.1	142.4	102.3	53.77	0.0
10		27.12	74.96	124.3	161.8	182.4	184.9	170.6	141.9	101.9	53.57	0.0
11		27.14	75.02	124.3	161.9	182.5	185.1	170.8	142.1	102.1	53.65	0.0
12		27.13	75.01	124.3	161.9	182.5	185.0	170.8	142.1	102.0	53.63	0.0
$\gamma=1$												

В таблицах (5.1.2)÷(5.1.4) приведены значения  $\frac{\bar{w}}{\bar{q}}$ ,  $\frac{\bar{N}}{\bar{q}}$  и  $\frac{\bar{M}}{\bar{q}}$  при (5.1.14).

Таблица 5.1.2.

$\frac{\bar{w}}{\bar{q}}$		$\bar{B}=0$		$\bar{B}=1$		$\bar{B}=2$		$\bar{B}=5$	
		$\chi$		$\chi$		$\chi$		$\chi$	
		0	8	0	8	0	8	0	8
$\bar{x}$	0	0	0	19.86	27.13	32.07	43.03	52.52	68.15
	0.1	15.81	18.07	56.99	75.01	81.44	107.4	119.3	155.4
	0.2	45.75	52.81	97.53	124.3	128.0	164.8	174.4	223.8
	0.3	73.79	86.12	128.8	161.9	162.2	204.7	209.9	266.7
	0.4	92.63	109.4	145.9	182.5	177.2	223.7	224.1	283.1
	0.5	99.70	119.4	147.8	185.0	175.9	221.9	218.2	275.2
	0.6	95.15	115.7	135.7	170.8	159.5	201.7	194.9	246.3
	0.7	80.50	99.61	11.9	142.1	130.4	166.0	157.9	200.4
	0.8	58.03	73.26	79.46	102.0	91.99	118.2	110.7	141.5
	0.9	30.31	39.17	41.15	53.63	47.48	61.75	56.93	73.44
1	0	0	0	0	0	0	0	0	

Таблица 5.1.3.

$\frac{\bar{N}}{\bar{a}}$		$\bar{B}=0$		$\bar{B}=1$		$\bar{B}=2$		$\bar{B}=5$	
		$\chi$		$\chi$		$\chi$		$\chi$	
		0	8	0	8	0	8	0	8
$\bar{x}$	0	2.360	2.562	2.233	2.368	2.159	2.259	2.052	2.108
	0.1	1.955	2.162	1.828	1.968	1.754	1.859	1.648	1.708
	0.2	1.555	1.762	1.428	1.568	1.354	1.459	1.248	1.308
	0.3	1.155	1.362	1.028	1.168	0.954	1.059	0.848	0.908
	0.4	0.755	0.962	0.628	0.768	0.554	0.659	0.448	0.508
	0.5	0.355	0.562	0.228	0.368	0.154	0.259	0.048	0.108
	0.6	-0.045	0.162	-0.172	-0.032	-0.245	-0.140	-0.352	-0.292
	0.7	-0.445	-0.238	-0.572	-0.432	-0.645	-0.540	-0.752	-0.692
	0.8	-0.845	-0.638	-0.972	-0.832	-1.045	-0.940	-1.152	-1.092
	0.9	-1.245	-1.038	-1.372	-1.232	-1.446	-1.340	-1.552	-1.492
	1	-1.634	-1.438	-1.762	-1.632	-1.836	-1.739	-1.943	-1.892

Таблица 5.1.4.

$\frac{\bar{M}}{\bar{q}}$		$\bar{B}=0$		$\bar{B}=1$		$\bar{B}=2$		$\bar{B}=5$	
		$\chi$		$\chi$		$\chi$		$\chi$	
		0	8	0	8	0	8	0	8
$\bar{x}$	0	-2.838	-4.496	-1.821	-2.943	-1.233	-2.079	-0.382	-0.866
	0.1	-1.115	-2.607	-0.199	-1.209	0.329	-0.431	1.095	0.660
	0.2	0.289	-1.037	1.103	0.205	1.573	0.897	2.254	1.867
	0.3	1.373	0.212	2.085	1.299	2.497	1.904	3.092	2.753
	0.4	2.137	1.142	2.748	2.073	3.100	2.592	3.611	3.320
	0.5	2.581	1.751	3.090	2.528	3.384	2.960	3.809	3.567
	0.6	2.706	2.041	3.112	2.662	3.347	3.008	3.688	3.493
	0.7	2.509	2.011	2.815	2.476	2.991	2.736	3.246	3.099
	0.8	1.994	1.660	2.197	1.971	2.315	2.144	2.485	2.386
	0.9	1.158	0.989	1.259	1.145	1.318	1.231	1.403	1.353
	1	0	0	0	0	0	0	0	0

Для наглядности на рисунках 5.1.4÷5.1.7 приведены графики изменения по длине балки величин  $\frac{\bar{w}}{\bar{q}}$ ,  $\frac{\bar{\varphi}}{\bar{q}}$ ,  $\frac{\bar{N}}{\bar{q}}$  и  $\frac{\bar{M}}{\bar{q}}$ , при  $\bar{B}=0.5$  для классического случая  $\chi=0$  и для случаев учета влияния поперечного сдвига  $\chi=5$  и  $\chi=8$ .

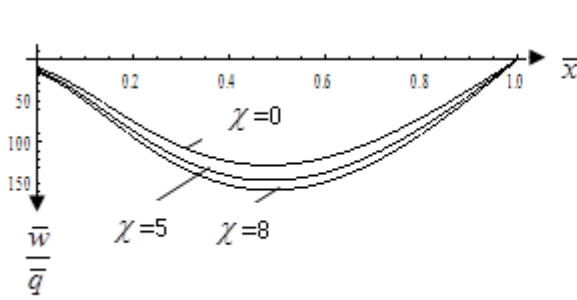


Рис. 5.1.4

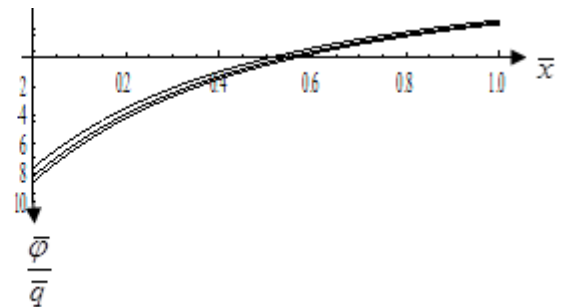


Рис. 5.1.5

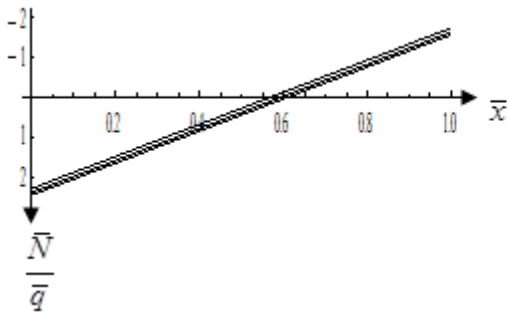


Рис. 5.1.6

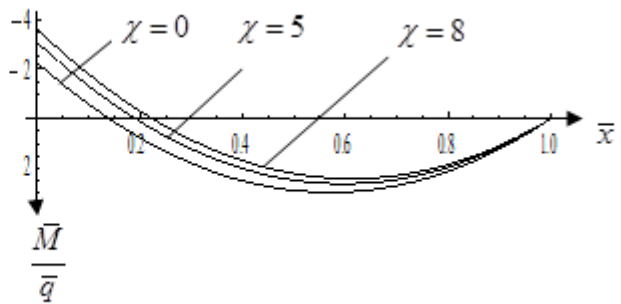


Рис. 5.1.7

Теперь рассмотрим две задачи изгиба ортотропной балки линейно–переменной толщины. В одном случае оба края балки имеют упруго защемленную опору. Во втором случае левый край балки упруго защемлен, а другой край жестко защемлен. В результате решения показывается, что в первой задаче, когда оба конца балки упруго-защемлены и на нее действует только равномерно распределенная нагрузка, то с увеличением значения параметров упруго-защемленной опоры, влияние опоры постепенно исчезает и балка становится с свободными концами. Во второй задаче, после увеличения значения параметров упруго защемленной опоры, балка становится консольной.

Пользуясь [114], для краевых условий первой задачи, когда оба края балки имеют упруго-защемленную опору можно написать, при  $x = 0$

$$w = a \frac{dw}{dx} + BN_x, \quad \frac{dw}{dx} = D(aN_x - M_x) \quad (5.1.15)$$

Так как при  $x=l$ ,  $w > 0$ ,  $\frac{dw}{dx} < 0$ ,  $N_x < 0$ ,  $M_x < 0$ , то получается, что

$$w = -a \frac{dw}{dx} - BN_x, \quad \frac{dw}{dx} = D(aN_x + M_x). \quad (5.1.16)$$

Для второй задачи, когда левый край балки упруго-защемлен, а другой конец жестко защемлен получим,

при  $x=0$

$$w = a \frac{dw}{dx} + BN_x, \quad \frac{dw}{dx} = D(aN_x - M_x) \quad (5.1.17)$$

а при  $x=l$ , если некоторая часть правого края балки вставлена в абсолютно не деформируемый массив, образуя жесткое защемление, то условия этого края будут

$$w = 0, \quad \frac{dw}{dx} = 0. \quad (5.1.18)$$

Пользуясь обозначениям (5.1.7), получим

Для второй задачи

при  $\bar{x}=0$

$$\bar{w} = m \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} + \bar{B}\bar{N}, \quad \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} = n\bar{D}(m\bar{N} - \bar{M}) \quad (5.1.19)$$

при  $\bar{x}=1$

$$\bar{w} = 0, \quad \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} = 0.. \quad (5.1.20)$$

Для решения задачи, искомые функции представим в виде (5.1.18) степенных многочленов. Для второй задачи т. е. когда один конец балки упруго-защемлен, а другой конец жестко защемлен таблице (5.1.5) показано процесс сходимости определения значений  $\frac{\bar{w}}{q}$  при  $\bar{B}=1$ ;  $\chi=8$ ;  $\gamma=1$ .

Таблица (5.1.5)

$\bar{B}=1$ $k=0.5$ $\gamma=1$	$j$	0	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.0
	8	14.99	38.35	68.13	60.41	30.82	4.39	0
	9	14.94	38.29	67.94	60.01	30.52	4.29	0
	10	14.95	38.34	68.07	60.25	30.63	4.32	0
	11	14.94	38.34	68.05	60.22	30.60	4.31	0
	12	14.94	38.34	68.06	60.23	30.61	4.32	0

На рисунках (5.1.8)÷(5.1.11) приведены графики изменения по длине балки величин  $\bar{w}/\bar{q}$ ,  $\bar{\varphi}/\bar{q}$ ,  $\bar{N}/\bar{q}$  и  $\bar{M}/\bar{q}$ , при  $B = 0.5$  для классического случая  $\chi = 0$  и для случаев учета влияния поперечного сдвига  $\chi = 5$  и  $\chi = 8$ .

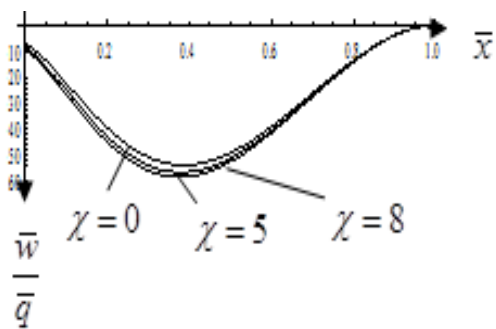


Рис. 5.1.8

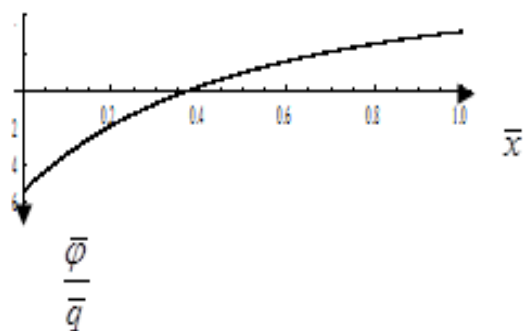


Рис. 5.1.9

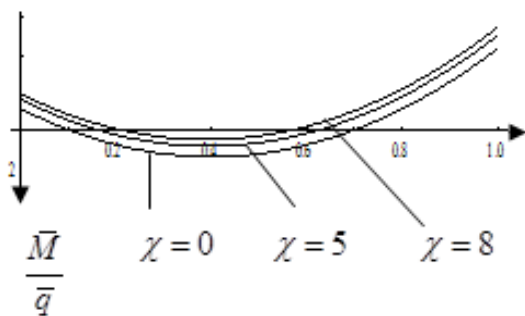


Рис. 5.1.10

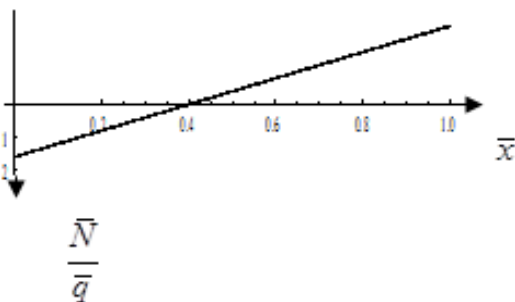


Рис. 5.1.11

Для второй задачи, результаты решения приведены на рисунке (5.1.12).

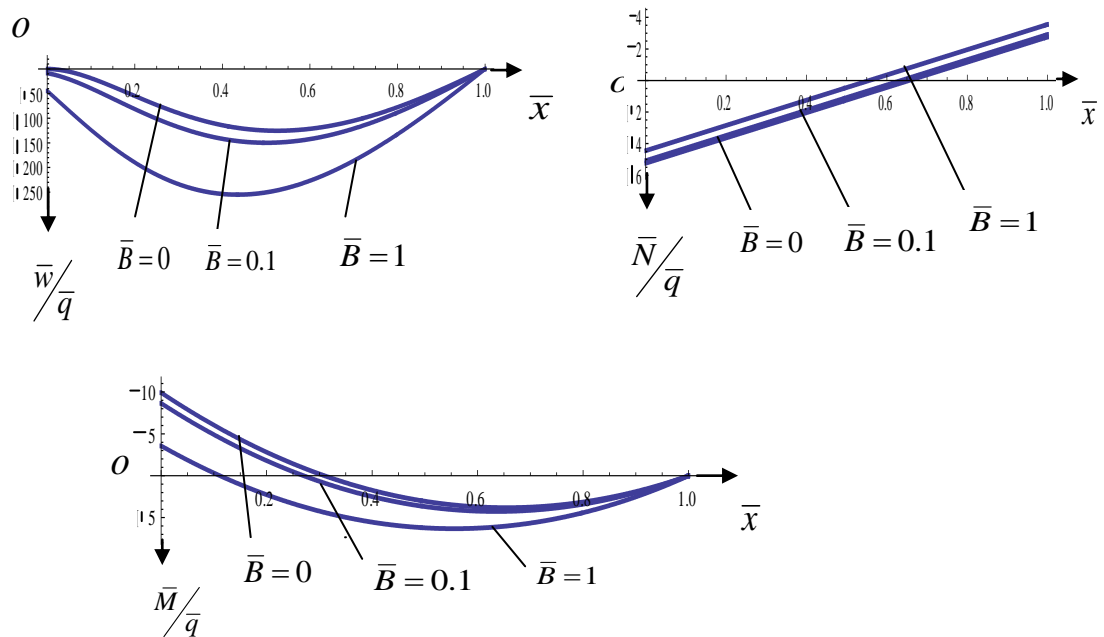


Рис.5.1.12

Отмеченные таблицы и графики приводят к следующим заключениям:

1. С возрастанием параметра  $\bar{B}$ , а следовательно и  $\bar{D}$ , изгибающий момент на упруго-закрепленной опоре  $\bar{x} = 0$ , оставаясь отрицательным, по модулю уменьшается. Это и естественно, так как возрастание параметров  $\bar{B}$  и  $\bar{D}$  означает ослабление упруго-закрепленной опоры-уменьшение ее жесткости.
2. Возрастание  $\bar{B}$  и  $\bar{D}$  приводит к увеличению прогибов
3. При больших значениях  $\bar{B}$  надо место геометрической линейной постановки принимает нелинейную постановку.
4. При стремлении  $\bar{B}$  к бесконечности упруго-закрепленная опора исчезает и левый конец балки становится свободным а правый становится шарнирно опертым, балка вращается в механизм и ее равновесие при действии вертикальной нагрузки невозможна.
5. Значение параметра  $\chi$ , учитывающего влияние поперечного сдвига, мало влияет на форму графика изменения  $\bar{\varphi}/\bar{q}$  по длине балки.



6. Значение  $\chi$  практически не влияет на форму графика поперечной силы  $\bar{N}/\bar{q}$ , которая практически остается прямой линией.
7. Как и следовало ожидать, возрастание  $\chi$  приводит к увеличению прогибов балки.

### **§5.2 Краевая задача упруго-защемленной по краю частично-нагруженной круглой ортотропной пластинки**

Решается задача изгиба упруго-защемлённой по контуру ортотропной круглой пластинки при учёте влияний поперечного сдвига и обжатия, когда на центральной части пластинки действует равномерно распределённая поперечная нагрузка.

Для нагружённой части пластинки берётся известное решение С.А. Амбарцумяна ([29], стр.177,178), которое после учёта отсутствия угловой точки центра содержит две неизвестные постоянные интегрирования. Удовлетворив условиям упругого защемления контура, гладкости деформированной пластинки и неразрывности изгибающего момента  $M_r$  на границе раздела нагружённой и не нагружённой частей, получается система алгебраических уравнений относительно остальных пяти неизвестных постоянных интегрирования. Решая эту систему, определяются все неизвестные функции.

Рассмотрен численный пример. На основе полученных безразмерных значений расчётных величин пластинки делаются заключения. В частности, отмечается, что при учёте обжатия изгибающий момент  $M_\theta$  на границе раздела нагружённой и ненагружённой частей пластинки имеет разрыв первого рода.

Обширное применение упруго-защемлённых опор в строительных сооружениях привело к практической необходимости их исследования. В научной литературе, например, в книгах [157] и [181], обычно рассматриваются теоретические модели упруго-защемлённых опор, не указывая их конкретные конструкции. Это часто приводит к некорректным понятиям. Например, на стр. 29 книги [181] в качестве условий упругого защемления края пластинки написаны: условие прямой пропорциональности производной прогиба к изгибающему моменту и условие равенства нулю прогиба. Эти условия, на самом деле, не являются условиями чисто упруго-защемлённой опоры, а скорее, условиями комбинации упруго-защемлённой

опоры и шарнирной опоры, когда последняя опирается на абсолютно жёсткое основание.

Вопросам упруго-защемлённых опор тонкостенных элементов конструкций и их применениям посвящены также работа Г.З. Геворгяна [73] и работы ([114], [118], [130], - [134], [178, 179]). В этих работах чётко указывается конструкция опор, с помощью которой и определяются их условия.

**Постановка задач.1.** В правой системе цилиндрических координат  $r, \theta, z$  рассмотрим дифференциальный элемент круглой пластинки (рис.5.3.1).

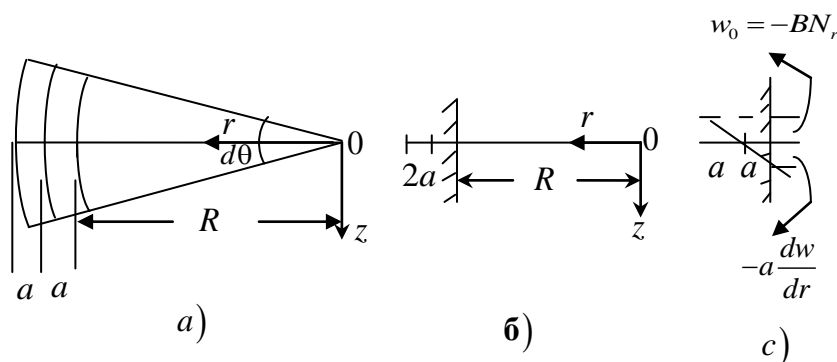


Рис.5.2.1

Краевая часть пластинки вставлена в упругий массив, образуя упруго-защемлённую опору. Длина этой части по радиусу  $2a$  достаточно мала относительно радиуса пластинки  $R$ . Из-за малой длины будем считать, что вставленная часть пластинки, подобно абсолютно твёрдому элементу, может поступательно перемещаться и вращаться как одна целая. Поэтому в её пределах будем считать значение  $\frac{dw}{dr}$  постоянным ( $r$  – радиальная координата,  $w$  – прогиб пластинки при изгибе). Отметим также, что из-за малости  $2a$  расстояние центра тяжести вставленной части равно  $a$ .

На единичной длине опорного сечения  $r = R$  при изгибе пластинки возникают поперечная сила  $N_r$  и изгибающие моменты  $M_r, M_\theta$ .

Под действием момента поперечной силы  $aN_r$  и момента  $M_r$  вставленная часть будет вращаться на некоторый угол. Будем считать, что тангенс этого угла  $\frac{dw}{dr}$  прямо

пропорционален сумме этих моментов. Так как  $\frac{dw}{dr}$ ,  $N_r$  и  $M_r$  имеют одинаковый знак, то можно написать

$$\left. \frac{dw}{dr} \right|_{r=R} = D(aN_r + M_r) \quad (5.2.1)$$

Положительная постоянная  $D$ —обратная величина жёсткости упруго-зашемлённой опоры на вращение. В СИ она измеряется единицей  $H^{-1}$ .

Прогиб пластинки опорного сечения  $r = R$  состоит из двух частей. Одна из них возникает от вращения вставленной части, а другая — от её поступательного вертикального перемещения. По аналогии с гипотезой Фусса-Винклера можно считать, что вторая часть  $w_0$  опорного прогиба прямо пропорциональна поперечной силе  $N_r$ . Так как знак прогиба  $w$  отличается от знаков  $\frac{dw}{dr}$  и  $N_r$ , то в итоге можно написать

$$w|_{r=R} = -\left( a \frac{dw}{dr} + BN_r \right) \quad (5.2.2)$$

Положительная постоянная  $B$ —обратная величина жёсткости упруго-зашемлённой опоры на вертикальное перемещение. В СИ она измеряется единицей  $M^2H^{-1}$ .

Таким образом, условия упруго-зашемлённой опоры осесимметрично изгибаемой круглой пластинки имеют вид (5.2.1) и (5.2.2).

**2. Получение связи параметров.** Пользуясь гипотезой Фусса-Винклера и рисунками  $a)–c)$  рис.(5.2.1), определим значения параметров рассмотренной упруго-зашемлённой опоры  $B$  и  $D$ , когда торец вставленной части, как обычно, не контактирует с упругим массивом.

Так как упругий массив на верхнюю и нижнюю поверхности вставленной части действует нормальными напряжениями одинакового направления, прямо пропорциональными вертикальному перемещению  $w_0$ , то из условия равновесия с учётом (5.3.2) можно написать:

$$2k \cdot w_0 \cdot d\theta \int_0^{2a} (R+x)dx = 4kaw_0(R+a)d\theta = \frac{w_0 R d\theta}{B} \Rightarrow B = \frac{R}{4ka(R+a)}, \quad (5.2.3)$$

где  $k$  – коэффициент пропорциональности. В *СИ* она измеряется единицей  $H \cdot м^{-3}$ .

Из условия равновесия моментов относительно центра вставленной части пластинки с учётом (5.2.1) получим:

$$\begin{aligned} 2k \frac{dw}{dr} d\theta \left[ \int_0^a (R+a+x)xdx + \int_0^a (R+a-x)xdx \right] &= \frac{4}{3}ka^3(R+a)d\theta = \\ &= \frac{dw}{dr} \frac{R}{D} d\theta \Rightarrow D = \frac{3R}{4ka^3(R+a)} \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

Из (5.2.3) и (5.2.4) следует связь между параметрами упруго-защемлённой опоры  $D$  и  $B$

$$D = \frac{3B}{a^2} \quad (5.2.5)$$

**Решение задачи.** Рассмотрим ортотропную круглую пластинку радиуса  $R$  и постоянной толщины  $h$ . Координатная плоскость  $r\theta$  совпадает со срединной плоскостью пластинки, а главные направления анизотропии материала параллельны координатным линиям. Край пластинки  $r=R$  имеет рассмотренную упруго-защемлённую опору.

На центральной части пластинки  $0 \leq r < \varepsilon$  действует равномерно распределённая поперечная нагрузка интенсивности  $q = P / \pi\varepsilon^2$ , а остальная часть пластинки  $\varepsilon < r \leq R$  свободна от нагрузок.

В рамках уточнённой теории С.А. Амбарцумяна [29] рассмотрим задачу изгиба пластинки при учёте влияния деформации поперечного сдвига и обжатия.

Расчётные величины пластинки  $w$ ,  $N_r$ ,  $M_r$  и  $M_\theta$  интервала  $\varepsilon < r \leq R$  обозначим индексом «1», а интервала  $0 \leq r < \varepsilon$  – индексом «2».

Пользуясь [29](с.73,74), получим следующие разрешающие уравнения задачи:

при  $\varepsilon < r \leq R$

$$r \frac{d^3 w_1}{dr^3} + \frac{d^2 w_1}{dr^2} - \frac{n^2}{r} \frac{dw_1}{dr} = \frac{P}{2\pi D_r} - \frac{3(1-n^2)a_r}{5\pi h} \frac{P}{r^2}, \quad (5.2.6)$$

при  $0 \leq r < \varepsilon$

$$r \frac{d^3 w_2}{dr^3} + \frac{d^2 w_2}{dr^2} - \frac{n^2}{r} \frac{dw_2}{dr} = \frac{Pr^2}{2\pi D_r \varepsilon^2} + \frac{P}{\pi \varepsilon^2} \left[ (A_2 - A_1) \frac{h^2}{10D_r} + \frac{3a_r}{5h} (n^2 - 1) \right] \quad (5.2.7)$$

Здесь

$$D_r = \frac{B_r h^3}{12}, \quad n^2 = \frac{D_\theta}{D_r} = \frac{E_\theta}{E_r} \quad (5.2.8)$$

$E_\theta, E_r, B_r, a_r, A_1, A_2$ —общезвестные механические параметры ортотропного тела [42].

Общие решения уравнений (5.2.6) и (5.2.7) имеют вид [29]:

$$w_1 = c_1 + c_2 r^{1+n} + c_3 r^{1-n} + \frac{p \cdot r^2}{4\pi(1-n^2)D_r} - \frac{3pa_r}{5\pi h} \ln \frac{r}{R} \quad (5.2.9)$$

$$w_2 = c_4 + c_5 r^{1+n} + b_1 r^2 + b_2 r^4 \quad (5.2.10)$$

Здесь  $c_i$ —постоянные интегрирования.

$$b_1 = \frac{Ph^2}{20\pi\varepsilon^2(1-n^2)} \left[ \frac{6a_r(n^2-1)}{h^3} + \frac{A_2-A_1}{D_r} \right], \quad b_2 = \frac{P}{8(9-n^2)\pi\varepsilon^2 D_r} \quad (5.2.11)$$

Изгибающие моменты определяются с помощью выражений [29] (стр.73):

$$M_{r1} = -D_r \left[ \frac{d^2 w_1}{dr^2} + \frac{v_\theta}{r} \frac{dw_1}{dr} - \frac{3Pa_r(1-v_\theta)}{5\pi h r^2} \right] \quad (5.2.12)$$

$$M_{\theta1} = -n^2 D_r \left[ \frac{1}{r} \frac{dw_1}{dr} + v_r \frac{d^2 w_1}{dr^2} + \frac{3Pa_r(1-v_r)}{5\pi h r^2} \right] \quad (5.2.13)$$

$$M_{r2} = -D_r \left[ \frac{d^2 w_2}{dr^2} + \frac{v_\theta}{r} \frac{dw_2}{dr} + \frac{3Pa_r(1+v_\theta)}{5\pi\varepsilon^2 h} + \frac{A_1 h^2 P}{10\pi\varepsilon^2 D_r} \right] \quad (5.2.14)$$

$$M_{\theta2} = -n^2 D_r \left[ \frac{1}{r} \frac{dw_2}{dr} + v_r \frac{d^2 w_2}{dr^2} + \frac{3Pa_r(1+v_r)}{5\pi\varepsilon^2 h} + \frac{A_2 h^2 P}{10\pi\varepsilon^2 n^2 D_r} \right] \quad (5.2.15)$$

$$\left( \varphi_1 = -\frac{6P}{\pi h^3} \frac{1}{r}, \quad \varphi_2 = -\frac{6Pr}{\pi h^3 \varepsilon^2}, \quad N_{r1} = -\frac{P}{2\pi r}, \quad N_{r2} = -\frac{Pr}{2\pi\varepsilon^2} \right) \quad (5.2.16)$$

Для определения постоянных интегрирования  $c_i$  нужно использовать условия упругого защемления (5.2.1), (5.2.2) гладкости деформированной пластинки и неразрывности изгибающего момента  $M_r$

при  $r = \varepsilon$

$$w_1 = w_2, \quad \frac{dw_1}{dr} = \frac{dw_2}{dr}, \quad M_{r1} = M_{r2} \quad (5.2.17)$$

Последнее условие (5.2.17) вытекает из закона равенства действия и противодействия нагруженной и ненагруженной частей пластинки при отсутствии внешнего

сосредоточенного момента  $M_r$ . Отметим, что при  $r = \varepsilon$  равенство изгибающих моментов  $M_{01}$  и  $M_{02}$  не обязательно, поскольку эти моменты не являются действием и противодействием отмеченных частей пластинки.

#### 4. Основные обозначения и получение системы разрешающих уравнений.

Примем обезразмеривающие обозначения:

$$\begin{aligned} w_i &= \bar{w}_i h, \quad h = mR, \quad r = \rho R, \quad \varepsilon = kR, \quad B_r a_r = \chi, \quad a = sh, \\ P &= B_r h^2 \bar{P}, \quad c_1 = \bar{c}_1 h, \quad c_2 = \bar{c}_2 R^{-n}, \quad c_3 = \bar{c}_3 R^n, \quad c_4 = \bar{c}_4 h, \\ c_5 &= \bar{c}_5 R^{-n}, \quad D = \frac{\alpha h}{D_r}, \quad B = \frac{\beta h^3}{12}, \quad \left( \frac{D}{B} = \frac{3}{a^2}, \Rightarrow B = \frac{\alpha s^2 h^3}{3D_r} \right), \\ N_{ri} &= \bar{N}_{ri} h B_r, \quad M_{ri} = \bar{M}_{ri} B_r h^2, \quad M_{0i} = \bar{M}_{0i} B_r h^2, \quad b_1 = \frac{\bar{b}_1}{h}, \quad b_2 = \frac{\bar{b}_2}{h^3} \end{aligned} \quad (5.2.18)$$

С учётом (5.2.9) ÷ (5.2.16) в обозначениях (5.2.18) получим:

$$\bar{w}_1 = \bar{c}_1 + \frac{\bar{c}_2}{m} \rho^{1+n} + \frac{\bar{c}_3}{m} \rho^{1-n} + \frac{3\bar{P}\rho^2}{\pi m^2 (1-n^2)} - \frac{3\chi\bar{P}}{5\pi} \ln \rho \quad (5.2.19)$$

$$\bar{w}_2 = \bar{c}_4 + \frac{\bar{c}_5}{m} \rho^{1+n} + \frac{\bar{b}_1 \rho^2}{m^2} + \frac{\bar{b}_2 \rho^4}{m^4}, \quad \bar{N}_1 = -\frac{m\bar{P}}{2\pi\rho} \quad (5.2.20)$$

$$\bar{N}_{r1} = -\frac{m\bar{P}}{2\pi\rho}, \quad \bar{N}_{r2} = -\frac{m\bar{P}}{2\pi k^2} \rho \quad (5.2.21)$$

$$\bar{M}_{r1} = -\frac{m}{12} \left[ (1+n)(n+v_\theta) \rho^{n-1} \cdot \bar{c}_2 + (1-n)(v_\theta - n) \rho^{-n-1} \cdot \bar{c}_3 + \frac{6(1+v_\theta)\bar{P}}{\pi m(1-n^2)} \right] \quad (5.2.22)$$

$$\bar{M}_{01} = -\frac{mn^2}{12} \left[ (1+n)(1+nv_r) \rho^{n-1} \cdot \bar{c}_2 + (1-n)(1-nv_r) \rho^{-n-1} \cdot \bar{c}_3 + \frac{6(1+v_r)\bar{P}}{\pi m(1-n^2)} \right] \quad (5.2.23)$$

$$\bar{M}_{r2} = -\frac{m}{12} \left\{ \begin{aligned} &(1+n)(n+v_\theta) \rho^{n-1} \bar{c}_5 + \frac{2(1+v_\theta)}{m} \bar{b}_1 + \\ &+ \frac{4(3+v_\theta) \rho^2}{m^3} \bar{b}_2 + \frac{3m\bar{P}}{5\pi k^2} [\chi(1+v_\theta) + 2A_1] \end{aligned} \right\} \quad (5.2.24)$$

$$\bar{M}_{02} = -\frac{mn^2}{12} \left\{ \begin{aligned} &(1+n)(1+nv_r) \rho^{n-1} \bar{c}_5 + \frac{2(1+v_r)}{m} \bar{b}_1 + \\ &+ \frac{4(1+3v_r) \rho^2}{m^3} \bar{b}_2 + \frac{3m\bar{P}}{5\pi k^2 n^2} [(1+v_r)n^2\chi + 2A_2] \end{aligned} \right\} \quad (5.2.25)$$

Здесь

$$\bar{b}_1 = \frac{3m^2\bar{P}}{10\pi k^2(1-n^2)} \left[ \chi(n^2-1) + 2(A_2 - A_1) \right], \quad \bar{b}_2 = \frac{3m^2\bar{P}}{2(9-n^2)\pi k^2} \quad (5.2.26)$$

Условия упруго-защемлённой опоры и условия при  $r = \varepsilon$  в обозначениях (5.2.18) примут вид:

$$\begin{aligned} & (1+n) \left[ 1 + (n + \nu_\theta) \alpha m \right] \bar{c}_2 + (1-n) \left[ 1 + (\nu_\theta - n) \alpha m \right] \bar{c}_3 = \\ 1) & = \frac{3\bar{P}}{5\pi m(1-n^2)} \left\{ \chi m^2(1-n^2) - 10 - 10\alpha m \left[ sm(1-n^2) + (1 + \nu_\theta) \right] \right\}, \\ & m\bar{c}_1 + \left[ 1 + ms(1+n) \right] \bar{c}_2 + \left[ 1 + ms(1-n) \right] \bar{c}_3 = \\ 2) & = \frac{\bar{P}}{5\pi m(1-n^2)} \left\{ 10(1-n^2)\alpha s^2 m^3 - 15 - 3ms \left[ 10 - \chi m^2(1-n^2) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.2.27)$$

$$\begin{aligned} & m\bar{c}_1 + k^{1+n} \cdot \bar{c}_2 + k^{1-n} \cdot \bar{c}_3 - m\bar{c}_4 - k^{1+n} \cdot \bar{c}_5 = \frac{\bar{b}_1 k^2}{m} + \frac{\bar{b}_2 k^4}{m^3} - \\ 3) & - \frac{3k^2\bar{P}}{\pi m(1-n^2)} + \frac{3\chi m\bar{P}}{5\pi} \ln k, \\ & (1+n)k^n \cdot \bar{c}_2 + (1-n)k^{-n} \cdot \bar{c}_3 - (1+n)k^n \cdot \bar{c}_5 = \frac{2\bar{b}_1 k}{m} + \frac{4\bar{b}_2 k^3}{m^3} - \\ 4) & - \frac{6k\bar{P}}{\pi m(1-n^2)} + \frac{3\chi m\bar{P}}{5\pi k}, \\ & (1+n)(n + \nu_\theta)k^{n-1} \cdot \bar{c}_2 + (1-n)(\nu_\theta - n)k^{-n-1} \cdot \bar{c}_3 - (1+n)(n + \nu_\theta)k^{n-1} \cdot \bar{c}_5 = \\ 5) & = \frac{6(1 + \nu_\theta)\bar{P}}{\pi m(1-n^2)} + \frac{2(1 + \nu_\theta)\bar{b}_1}{m} + \frac{4(3 + \nu_\theta)k^2\bar{b}_2}{m^3} + \frac{3m\bar{P}}{5\pi k^2} \left[ \chi(1 + \nu_\theta) + 2A_1 \right] \end{aligned}$$

Определив постоянные  $\bar{c}_i$ , можно вычислить безразмерные значения всех расчётных величин пластинки.

### 5. Численные результаты. Рассмотрим численный пример.

Пользуясь линейностью задачи, положим  $\bar{P} = 1$ . В каждом конкретном случае, умножив решение на действительное значение  $\bar{P}$ , получим истинные безразмерные значения расчётных величин.

Пусть

$$\begin{aligned} n &= \sqrt{2} (E_\theta = 2E_r), E_z = \frac{2E_r}{3}, \chi = 10, m = 0.25, k = 0.5, s = 0.5, \\ \nu_r &= 0.15 (\nu_r = \nu_{\theta r}), \nu_{zr} = 0.4, \nu_{\theta z} = 0.2, \alpha = 0.1, 1 \text{ и } 10 \end{aligned} \quad (5.2.28)$$

Из условий симметрии механических свойств ортотропного тела ([29], стр. 23 условия (4.16)) получим:

$$v_{\theta} = 0.3 (v_{\theta} = v_{r\theta}), v_{rz} = 0.267, v_{z\theta} = 0.6 \quad (5.2.29)$$

Тогда, из формул [42] (стр. 47, (5.2)) находим:

$$A_1 = -0.513, \quad A_2 = -0.754 \quad (5.2.30)$$

Принятые механические параметры удовлетворяют условиям положительности энергии деформирования ортотропного тела [29], (стр. 24 условия (4.18)), поскольку

$$\begin{aligned} \mu_{12} = \mu_{21} = -0.212, \quad \mu_{13} = \mu_{31} = -0.327, \quad \mu_{23} = \mu_{32} = -0.346, \\ \left| \frac{\mu_{13} - \mu_{12}\mu_{32}}{\sqrt{1-\mu_{12}^2}\sqrt{1-\mu_{23}^2}} \right| = 0.436 \end{aligned} \quad (5.2.31)$$

Рассмотрим следующие частные случаи:

1.  $\chi = A_1 = A_2 = 0$  (пренебрегаются влияния поперечного сдвига и обжатия)
2.  $\chi = 10, A_1 = -0.513, A_2 = -0.754$  (учитываются эти влияния одновременно)
3.  $\chi = 10, A_1 = A_2 = 0$  (учитывается только влияние поперечного сдвига)
4.  $\chi = 0, A_1 = -0.513, A_2 = -0.754$  (учитывается только влияние обжатия).

Для этих частных случаев в табл.(5.2.1) приведены безразмерные значения прогиба  $\bar{w}$ , а в табл.(5.2.2) и (5.2.3)– изгибающих моментов  $\bar{M}_r$  и  $\bar{M}_\theta$  в некоторых точках пластинки. Для наглядности, на рисунках (5.2.2)–(5.2.4) представлены графики изменения безразмерных величин прогиба и изгибающих моментов вдоль радиуса пластинки в случае 2.

Таблица 5.2.1

$\bar{w}$		$\rho$					
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\alpha = 0.1$	1	1.990	1.969	1.878	1.708	1.466	1.173
	2	3.452	3.396	3.209	2.881	2.424	1.859
	3	3.520	3.463	3.271	2.936	2.468	1.891
	4	1.922	1.902	1.816	1.654	1.422	1.142
	1	3.281	3.255	3.148	2.946	2.651	2.282



$\alpha = 1.0$	2	4.994	4.934	4.727	4.361	3.839	3.185
	3	5.077	5.015	4.804	4.429	3.897	3.228
	4	3.198	3.174	3.072	2.877	2.594	2.239
$\alpha = 10$	1	6.113	6.080	5.942	5.674	5.275	4.759
	2	8.325	8.256	8.011	7.566	6.920	6.087
	3	8.436	8.365	8.115	7.661	7.003	6.154
	4	6.002	5.971	5.838	5.579	5.192	4.691
$\bar{w}$		$\rho$					
		0.6	0.7	0.8	0.9	1	
$\alpha = 0.1$	1	0.862	0.568	0.319	0.139	0.050	
	2	1.291	0.811	0.434	0.178	0.059	
	3	1.310	0.821	0.439	0.179	0.059	
	4	0.844	0.558	0.314	0.137	0.049	
$\alpha = 1.0$	1	1.872	1.451	1.047	0.682	0.377	
	2	2.497	1.864	1.301	0.823	0.444	
	3	2.527	1.884	1.314	0.831	0.448	
	4	1.842	1.431	1.034	0.674	0.373	
$\alpha = 10$	1	4.151	3.480	2.770	2.041	1.308	
	2	5.162	4.229	3.299	2.383	1.492	
	3	5.214	4.269	3.328	2.402	1.502	
	4	4.099	3.441	2.742	2.022	1.298	

Таблица 5.2.2

$\bar{M}_r \cdot 10^2$		$\rho$					
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\alpha = 0.1$	1	0	4.52	5.23	4.90	3.77	1.89
	2	0.16	4.09	4.59	4.13	2.87	0.89
	3	0.00	3.89	4.39	3.91	2.65	0.67
	4	0.16	4.72	5.44	5.12	3.99	2.13
$\alpha = 1.0$	1	0	5.32	6.29	6.17	5.19	3.45
	2	0.16	5.05	5.88	5.64	4.58	2.77
	3	0.00	4.86	5.68	5.44	4.37	2.56
	4	0.16	5.51	6.49	6.37	5.39	3.67
$\alpha = 10$	1	0	6.90	8.39	8.65	7.99	6.53
	2	0.16	6.94	8.41	8.63	7.95	6.46

	<b>3</b>	0.00	6.78	8.23	8.46	7.77	6.29
	<b>4</b>	0.16	7.07	8.57	8.83	8.17	6.71
$\bar{M}_r \cdot 10^2$		$\rho$					
		0.6	0.7	0.8	0.9	1	
$\alpha = 0.1$	<b>1</b>	-0.09	-1.75	-3.19	-4.50	-5.70	
	<b>2</b>	-1.25	-3.03	-4.58	-5.97	-7.25	
	<b>3</b>	-1.41	-3.16	-4.69	-6.07	-7.34	
	<b>4</b>	0.07	-1.62	-3.09	-4.41	-5.61	
$\alpha = 1.0$	<b>1</b>	1.59	0.05	-1.30	-2.51	-3.63	
	<b>2</b>	0.77	-0.87	-2.30	-3.58	-4.75	
	<b>3</b>	0.62	-0.98	-2.39	-3.66	-4.82	
	<b>4</b>	1.74	0.15	1.21	-2.44	-3.56	
$\alpha = 10$	<b>1</b>	4.91	3.58	2.43	1.41	0.47	
	<b>2</b>	4.75	3.37	2.18	1.13	0.17	
	<b>3</b>	4.64	3.30	2.14	1.09	0.15	
	<b>4</b>	5.01	3.65	2.48	1.44	0.49	

Таблица 5.2.3

$\bar{M}_\theta \cdot 10^2$		$\rho$						
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5-	0.5+
$\alpha = 0.1$	<b>1</b>	0	6.56	8.04	8.38	7.89	6.69	6.69
	<b>2</b>	0.16	5.88	7.08	7.22	6.57	5.22	4.74
	<b>3</b>	0.00	5.67	6.85	6.98	6.32	4.96	4.96
	<b>4</b>	0.16	6.77	8.27	8.62	8.15	6.96	6.48
$\alpha = 1.0$	<b>1</b>	0	7.69	9.55	10.17	9.91	8.90	8.90
	<b>2</b>	0.16	7.24	8.89	9.36	8.98	7.87	7.39
	<b>3</b>	0.00	7.04	8.68	9.14	8.75	7.63	7.63
	<b>4</b>	0.16	7.89	9.76	10.39	10.14	9.14	8.66
$\alpha = 10$	<b>1</b>	0	9.92	12.5	13.7	13.9	13.2	13.2
	<b>2</b>	0.16	9.92	12.46	13.59	13.74	13.09	12.62
	<b>3</b>	0.00	9.74	12.29	13.41	13.56	12.91	12.91
	<b>4</b>	0.16	10.09	12.69	13.87	14.05	13.44	12.96
$\bar{M}_\theta \cdot 10^2$		$\rho$						

		0.6	0.7	0.8	0.9	1
$\alpha = 0.1$	1	5.07	3.39	1.76	0.17	-1.34
	2	3.09	1.35	-0.37	-2.04	-3.63
	3	3.20	1.40	-0.35	-2.04	-3.65
	4	4.96	3.34	1.73	0.18	-1.32
$\alpha = 1.0$	1	7.45	5.93	4.43	2.98	1.59
	2	5.94	4.39	2.84	1.34	-0.11
	3	6.08	4.48	2.89	1.37	-0.09
	4	7.31	5.85	4.38	2.96	1.58
$\alpha = 10$	1	12.1	10.9	9.71	8.53	7.39
	2	11.6	10.4	9.19	8.00	6.85
	3	11.7	10.5	9.30	8.09	6.93
	4	11.9	10.79	9.60	8.44	7.31

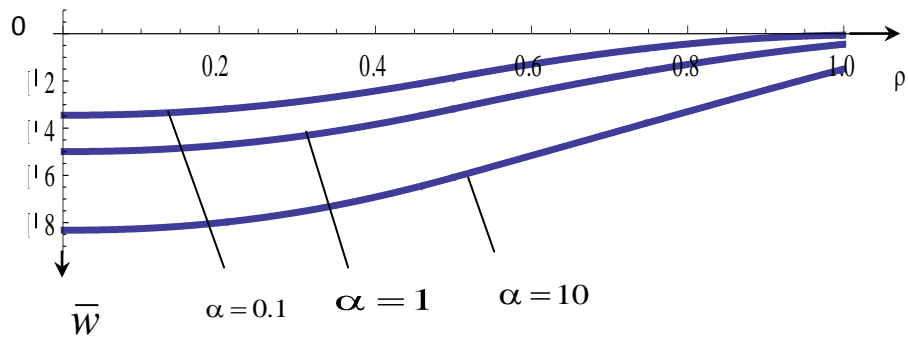


Рис.5.2.2

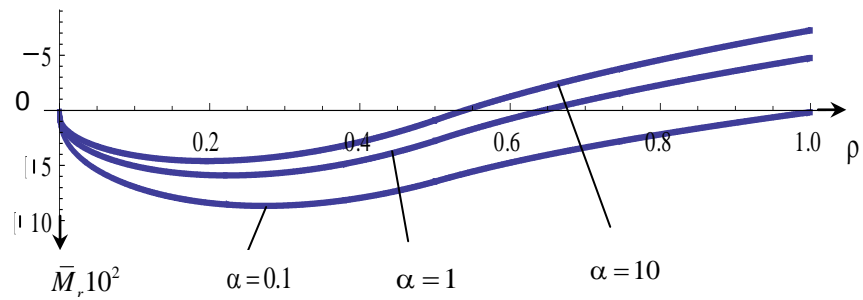


рис.5.2.3



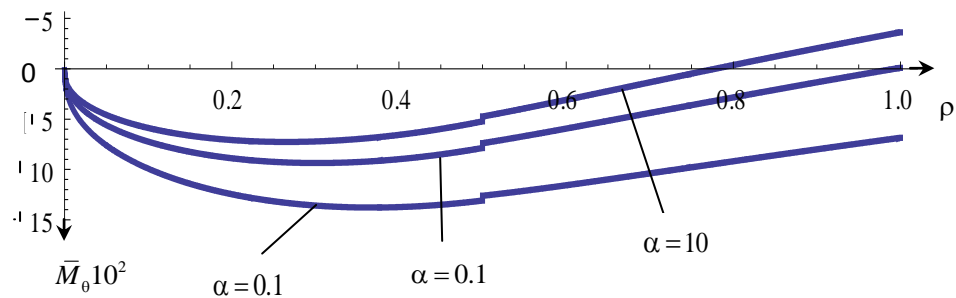


рис.5.2.4

**Заключение.** Результаты решения приводят к заключениям:

1. С возрастанием параметра  $\alpha$  жёсткости упруго-защемлённой опоры уменьшаются и прогибы пластинки всюду увеличиваются. При этом, относительные поправки прогибов уменьшаются. Как и следовало ожидать, учёт поперечного сдвига приводит к заметному увеличению, а учёт обжатия, наоборот, к незначительному уменьшению прогиба пластинки.

2. При учёте обжатия (случаи 2 и 4) изгибающие моменты  $M_r$  и  $M_\theta$  в центре пластинки равны и отличны от нуля. В случае же 1 и 3 эти моменты равны нулю. При учёте обжатия изгибающий момент  $\bar{M}_0$  на границе раздела нагружённой и не-нагружённой частей пластинки имеет разрыв первого рода. Величина этого разрыва не зависит от значения параметра  $\alpha$ .

В заключение отметим, что если независимо от значения радиуса нагружённой части  $r = \varepsilon (\rho = k)$  сумму нагрузки считать постоянной ( $\tilde{p} = \text{const}$ ), то при  $\varepsilon \rightarrow 0 (k \rightarrow 0)$  получим решение задачи для случая, когда в центре пластинки действует сосредоточенная сила. Однако, при учёте поперечного сдвига с приближением к центру пластинки прогиб и его производная стремятся к бесконечности и полученное решение становится неприемлемым [116]. В случае же  $\varepsilon = R (k = 1)$  получим решение задачи пластинки, целиком нагружённой равномерно распределённой нагрузкой.



### §5.3 Пластинки-полосы при наличии упруго-защемленной опоры

Пользуясь гипотезой Фусса-Винклера, получаются выражения параметров упруго защемленной опоры пластинки-полосы в общем случае.

На основе [107] приводятся разрешающие дифференциальные уравнения задачи поперечного изгиба ортотропной пластинки-полосы переменной толщины при учете влияния деформации поперечного сдвига. Приводится пример приложения.

1. В правой системе декартовых координат  $x, y, z$  рассмотрим упруго защемленную опору пластинки-полосы общего типа (рис.5.3.1).

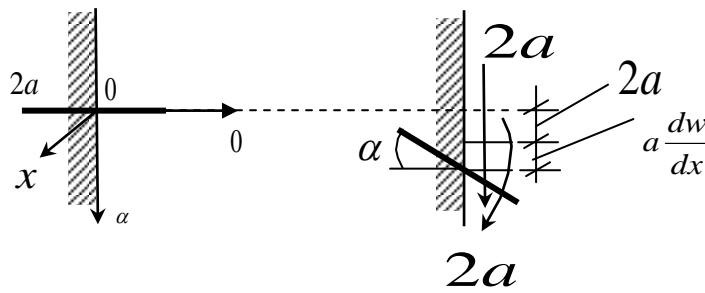


рис.5.3.1

Краевая часть пластинки-полосы постоянной толщиной  $h_0$  вставлена в упруго-деформируемый массив. Длина этой части  $2a$  достаточно мала относительно ширины пластинки-полосы  $l$ . Из-за малой длины будем считать, что вставленная часть подобно абсолютно твердому элементу может поступательно перемещаться и вращаться как одна целая. Этому способствует и то, что характер деформирования пластинки-полосы по ее длине не изменяется. Будем считать, что в пределах вставленной части производная прогиба  $dw/dx$  одинакова и ее значение равно значению при  $x=0$ . В опорном сечении пластинки-полосы при поперечном изгибе возникнут только поперечная сила  $N_x$  и изгибающий момент  $M_x$ . Положим, что  $N_x > 0, M_x < 0$ . Под действием момента  $-aN_x$  и момента  $M_x$  срединная плоскость вставленной части в сечении  $x=0$  будет вращаться на некоторый угол  $\alpha$ . Этот угол, а следовательно и его тангенс  $dw/dx$  зависят от вращающих моментов. Считая, что значение  $dw/dx$  прямо пропорционально сумме отмеченных отрицательных

моментов и в принятой системе координат это значение положительно при отрицательном моменте, можно написать:

$$\left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} = D(aN_x - M_x) \quad (5.3.1)$$

Здесь  $-D$  постоянная, обратная жесткости упруго заземленной опоры на вращение. В СИ она измеряется единицей  $H^{-1}$ .

Прогиб в опорном сечении  $x=0$  состоит из двух частей. Одна из них возникает от вращения вставленной части, а другая от ее поступательного вертикального перемещения от действия поперечной силы  $N_x(x=0)$ . По аналогии с гипотезой Фусса-Винклера можно считать, что вторая часть опорного прогиба прямо пропорциональна поперечной силе  $N_x$ . В итоге для  $w(x=0)$  получим:

$$w|_{x=0} = a \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} + BN_x|_{x=0} \quad (5.3.2)$$

Здесь  $B$  - постоянная, обратная жесткости упруго-заземленной опоры на вертикальное перемещение. В СИ она измеряется единицей  $m^2 H^{-1}$ .

Таким образом, условия упруго-заземленной опоры будут:

при  $x=0$

$$w = a \frac{dw}{dx} + BN_x, \quad \frac{dw}{dx} = D(aN_x - M_x) \quad (5.3.3)$$

2. Попробуем определить значения параметров  $B$  и  $D$ , считая, что вставленная часть непрерывно зацеплена с материалом упруго деформируемого массива. Будем пользоваться гипотезой, согласно которой нормальные и касательные силы, которыми упруго деформированный массив действует на вставленную часть пластинки-полосы, прямо пропорциональны соответствующим перемещениям. Мысленно выделим вставленную часть единичной ширины (рис.5.3.2).

Упруго деформированный массив на вставленную часть пластинки-полосы вследствие ее вертикального перемещения вниз  $w_0$  будет действовать:

- 1) на грань  $EGHF$  нормальной силой от сжатия  $2k_1 a w_0$ ;
- 2) на грань  $ABCD$  нормальной силой от растяжения  $2k_2 a w_0$ ;
- 3) на торец  $ABGE$  касательной силой от скольжения  $k_3 h_0 w_0$ ;



Отметим, что в силу отсутствия свободных боковых граней, перпендикулярных оси  $Oy$  и в силу того, что  $\tau_{yz} = 0$ , в отличие от случая балки, на гранях  $BCHG$  и  $ADFE$  вертикальные касательные силы не возникают.

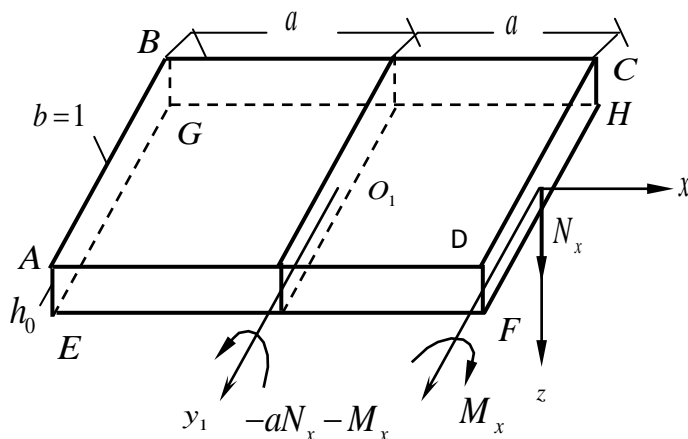


рис.5.3.2

Коэффициенты пропорциональности  $k_1$ ,  $k_2$  и  $k_3$  относятся сжатию, растяжению и скольжению соответственно. Отмеченные все силы направлены вертикально вверх и их сумма составляет

$$F = [2(k_1 + k_2)a + k_3h_0]w_0 \quad (5.3.4)$$

Эта сила уравнивает поперечную силу  $N_x(x=0)$ . Следовательно

$$F = N_x(x=0) = \frac{w_0}{B} \Rightarrow B = \frac{1}{2(k_1 + k_2)a + k_3h_0} \quad (5.3.5)$$

Вследствие вращения вставленной части на угол  $\alpha$ , тангенс которого равен  $dw/dx(x=0)$ , упругий массив будет действовать нормальными и касательными силами, которые относительно оси  $O_1y_1$  дадут моменты:

1) от сил граней EGHF и ABCD

$$\frac{2}{3}(k_1 + k_2)a^3 \frac{dw}{dx} \quad (5.3.6)$$

2) от силы торца ABGE

$$k_3a^2h_0 \frac{dw}{dx} \quad (5.3.7)$$

Сумма этих моментов составляет

$$M = \frac{a^2}{3} [2(k_1 + k_2)a + 3k_3h_0] \frac{dw}{dx} \quad (5.3.8)$$

Этот момент уравновешивается моментом  $(aN_x - M_x)_{x=0}$ . Следовательно

$$M = (aN_x - M_x)_{x=0} = \frac{1}{D} \frac{dw}{dx} \Rightarrow D = \frac{3}{a^2 [2(k_1 + k_2)a + 3k_3h_0]} \quad (5.3.9)$$

Из (5.3.5) и (5.3.9) нетрудно получить:

$$\frac{3}{D} - \frac{a^2}{B} = 2a^2h_0k_3 \quad (5.3.10)$$

Если пренебречь влиянием касательной силы, действующей на торец АВGE, то связь между параметрами упруго заземленной опоры (5.3.10) примет приближенный простой вид:

$$\frac{D}{B} = \frac{3}{a^2} \quad (5.3.11)$$

Имея в виду, что толщина торца,  $h_0$  и коэффициент скольжения  $k_3$  сравнительно малы, можно пользоваться этим соотношением. Отметим также, что иногда конструкция упруго заземленной опоры такая, что торец пластинки-полосы не контактируется с упруго деформируемым массивом. Тогда (5.3.11) будет точным.

3. Будем считать, что все расчетные величины не зависят от координат  $y$ , ось которых направлена по длине пластинки-полосы. Тогда, пользуясь [29], для разрешающей системы дифференциальных уравнений задачи поперечного изгиба пластинки-полосы получим:

$$\begin{aligned} B_{11}h^2 \frac{d^2h}{dx^2} \frac{d^2w}{dx^2} - h \left( 8 + a_{55}B_{11}h \frac{d^2h}{dx^2} \right) \frac{d\varphi_1}{dx} - 16 \frac{dh}{dx} \varphi_1 &= 12Z_2 \\ B_{11}h^2 \frac{d^3w}{dx^3} + 2B_{11}h \frac{dh}{dx} \frac{d^2w}{dx^2} - a_{55}B_{11}h^2 \frac{d^2\varphi_1}{dx^2} - 2a_{55}B_{11}h \frac{dh}{dx} \frac{d\varphi_1}{dx} + 8\varphi_1 &= 0 \end{aligned} \quad (5.3.12)$$

Здесь  $h$  - толщина,  $a_{55}, B_{11}$  - механические параметры материала [107],  $w$  - прогиб,  $\varphi_1$  - функция, характеризующая распределение поперечной касательной напряжения  $\tau_{xz}$  пластинки-полосы.

Через  $Z_2$  обозначен грузовой член [107]

$$Z_2 = Z^+ + Z^- \quad (5.3.13)$$

При этом знаками „+” и „-” обозначены интенсивности нагрузок, действующих на поверхностях  $z = +h/2$  и  $z = -h/2$  соответственно, приведенные к единице площади, серединой плоскости пластинки-полосы.

Система уравнений (5.3.12) имеет четвертый порядок. Поэтому кроме условий упруго заземленной опоры (5.3.3) следует на другом краю пластинки-полосы  $x = l$  ставить еще два условия. При обычных опорах условия этого края имеет известные выражения [29]. Если же край  $x = l$  также упруго заземлен, то аналоги условий (5.3.3) примут вид:

$$w = -\left(a \frac{dw}{dx} + BN_x\right), \frac{dw}{dx} = D(aN_x + M_x) \quad (5.3.14)$$

4. Рассмотрим ортотропную пластинку-полосу ширины  $l$ , толщина которой изменяется линейно

$$h = h_0 + h_1 x \quad (5.3.15)$$

Здесь  $h_0$  и  $h_1$  - заданные постоянные, а  $x$ -расстояние от левого края пластинки-полосы. Пластинка-полоса постоянной толщины  $h_0$  и длиной  $2a$  вставлена в упруго деформируемый массив. Правый край пластинки-полосы свободно лежит на

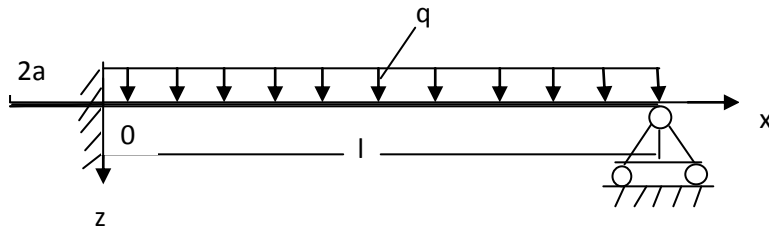


рис. 5.3.3

классическую шарнирную опору. Пластинка-полоса несет равномерно распределенную нагрузку интенсивности  $q$

Примем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} x &= l\bar{x}, \quad a = ml, \quad h_0 = \frac{l}{n}, \quad h = h_0 H, \quad H = 1 + \gamma\bar{x}, \quad \gamma = nh_1 \\ w &= h_0 \bar{w}, \quad B_{11} a_{55} = \chi, \quad \Phi_1 = B_{11} \bar{\Phi}_1, \quad N_x = B_{11} h_0 \bar{N}_x, \quad M_x = B_{11} h_0^2 \bar{M}_x \\ B &= \frac{\bar{B}}{B_{11}}, \quad D = \frac{\bar{D}}{B_{11} h_0^2}, \quad \left(\frac{D}{B} = \frac{3}{a^2}\right), \quad Z_2 = B_{11} \bar{q} \end{aligned} \quad (5.3.16)$$

В этих обозначениях уравнения задачи изгиба пластинки-полосы [29] примут вид:

$$2H \frac{d\bar{\varphi}_1}{d\bar{x}} + 4\gamma\bar{\varphi}_1 = -3n\bar{q},$$

$$H^2 \frac{d^3\bar{w}}{d\bar{x}^3} + 2\gamma H \frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}^2} - \chi n H^2 \frac{d^2\bar{\varphi}_1}{d\bar{x}^2} - 2\chi n \gamma H \frac{d\bar{\varphi}_1}{d\bar{x}} + 8n^3\bar{\varphi}_1 = 0$$
(5.3.17)

Краевые условия будут:

при  $\bar{x} = 0$

$$\bar{w} = m \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} + \bar{B}\bar{N}_x, \quad \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} = \frac{3\bar{B}}{nm^2} (mn\bar{N}_x - \bar{M}_x)$$
(5.3.18)

при  $\bar{x} = 1$

$$\bar{w} = \bar{M}_x = 0$$
(5.3.19)

Здесь

$$\bar{N}_x = \frac{H}{12n^3} \left[ 8n^3\bar{\varphi}_1 - \gamma H \left( \frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}^2} - \chi n \frac{d\bar{\varphi}_1}{d\bar{x}} \right) \right]$$
(5.3.20)

$$\bar{M}_x = -\frac{H^3}{12n^2} \left( \frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}^2} - \chi n \frac{d\bar{\varphi}_1}{d\bar{x}} \right)$$
(5.3.21)

Задачу будем решать по методу коллокаций. Положим:

$$\bar{w} = a_0 + \sum_{i=1}^k a_i \bar{x}^i, \quad \bar{\varphi}_1 = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i \bar{x}^i$$
(5.3.22)

Здесь  $a_0, a_i, b_0, b_i$  - неизвестные постоянные. Для их определения необходимо составить  $2(k+1)$  алгебраических уравнений. С этой целью интервал  $0 \leq \bar{x} \leq 1$  разделим на  $k$  части. Записывая систему (5.3.17) во всех точках деления и добавляя к ним краевые условия (5.3.18) и (5.3.19) получим необходимую систему  $2(k+1)$  алгебраических уравнений. Число членов (5.3.22) увеличим до практической сходимости процесса вычислений. Будем считать, что  $\bar{q} = 1$  и получить безразмерные значения  $\bar{w}/\bar{q}$ ,  $\bar{N}_x/\bar{q}$  и  $\bar{M}_x/\bar{q}$ . В каждом конкретном случае умножив эти значения на действительное значение  $\bar{q}$  получим истинные значения величин  $\bar{w}$ ,  $\bar{N}_x$ , и  $\bar{M}_x$ .

Рассмотрим численный пример.

Пусть:  $m = 0.05$ ;  $n = 8$ ;  $\gamma = 0$  и  $\gamma = 1$ ;  $\chi = 0$ ;  $\chi = 5$  и  $\chi = 10$ ;  $\bar{B} = 0.1$  и  $\bar{B} = 1$ .

Для этого случая, результаты решения приведены в таблицах (5.3.1) и (5.3.2).

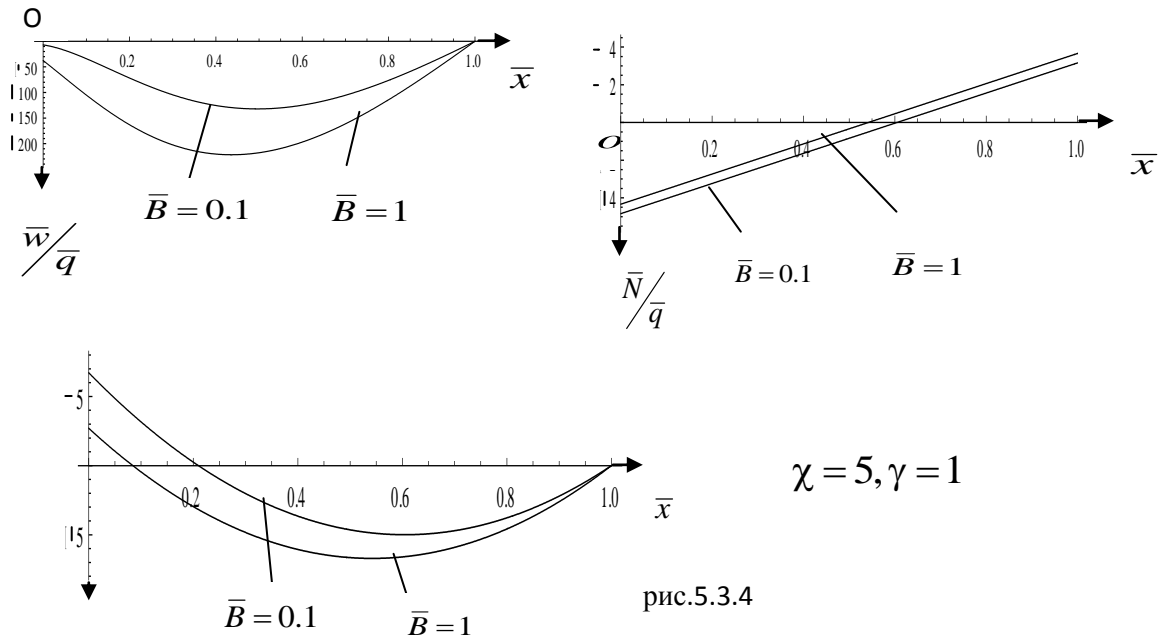


Табл. 5.3.1

$k$			$\frac{\bar{w}}{\bar{q}}$				$\frac{\bar{N}}{\bar{q}}$				$\frac{\bar{M}}{\bar{q}}$					
			$\bar{x}$				$\bar{x}$				$\bar{x}$					
			0	0.4	0.8	1	0	0.4	0.8	1	0	0.4	0.8	1		
$\bar{B}=0.1$	$\gamma=0$	$\chi=0$	10	7.54	249	199	0	4.93	1.727	-1.472	-3.07	-7.420	3.23	3.636	0	
			11	7.54	249	199	0	4.93	1.727	-1.472	-3.07	-7.420	3.23	3.636	0	
			12	7.54	249	199	0	4.93	1.727	-1.472	-3.07	-7.420	3.23	3.636	0	
		$\chi=5$	10	8.24	264	216	0	5.04	1.838	-1.362	-2.96	-8.301	2.69	3.459	0	
			11	8.24	264	216	0	5.04	1.838	-1.362	-2.96	-8.301	2.69	3.459	0	
			12	8.24	264	216	0	5.04	1.838	-1.362	-2.96	-8.301	2.69	3.459	0	
	$\chi=10$	10	8.94	278.8	233	0	5.15	1.948	-1.252	-2.85	-9.181	2.17	3.284	0		
		11	8.94	278.8	233	0	5.15	1.948	-1.252	-2.85	-9.181	2.17	3.284	0		
		12	8.94	278.8	233	0	5.15	1.948	-1.252	-2.85	-9.181	2.17	3.284	0		
	$\bar{B}=0.1$	$\gamma=1$	$\chi=0$	10	5.59	111	65.61	0	4.71	1.426	-1.774	-3.21	-4.948	4.72	4.161	0
				11	5.57	110.6	65.26	0	4.64	1.417	-1.783	-3.44	-4.943	4.71	4.119	0
				12	5.56	110.7	65.37	0	4.63	1.419	-1.780	-3.36	-4.951	4.71	4.133	0
$\chi=5$			10	6.97	125	76.23	0	4.84	1.637	-1.562	-3.15	-6.707	3.65	3.769	0	
			11	6.97	125.5	76.34	0	4.84	1.639	-1.560	-3.16	-6.713	3.65	3.780	0	
			12	6.97	125.5	76.31	0	4.84	1.639	-1.561	-3.16	-6.712	3.65	3.776	0	
$\chi=10$		10	8.51	141.6	88.29	0	5.08	1.879	-1.321	-2.92	-8.643	2.49	3.379	0		
		11	8.52	141.7	88.42	0	5.08	1.882	-1.318	-2.92	-8.650	2.49	3.393	0		
		12	8.52	141.7	88.38	0	5.08	1.881	-1.319	-2.92	-8.649	2.49	3.389	0		
$\bar{B}=1$		$\gamma=0$	$\chi=0$	10	50.0	430.5	286	0	4.53	1.331	-1.868	-3.47	-4.251	5.13	4.269	0
				11	50.0	430.5	286	0	4.53	1.331	-1.868	-3.47	-4.251	5.13	4.269	0
				12	50.0	430.5	286	0	4.53	1.331	-1.868	-3.47	-4.251	5.13	4.269	0
	$\chi=5$		10	54.6	462.9	311	0	4.60	1.403	-1.797	-3.39	-4.821	4.79	4.156	0	
			11	54.6	462.9	311	0	4.60	1.403	-1.797	-3.39	-4.821	4.79	4.156	0	
			12	54.6	462.9	311	0	4.60	1.403	-1.797	-3.39	-4.821	4.79	4.156	0	
			10	59.1	495.2	336	0	4.67	1.474	-1.726	-3.33	-5.390	4.45	4.042	0	

$\bar{B}=1$	$\chi=10$	11	59.1	495.2	336	0	4.67	1.474	-1.726	-3.33	-5.390	4.45	4.042	0
		12	59.1	495.2	336	0	4.67	1.474	-1.726	-3.33	-5.390	4.45	4.042	0
	$\chi=0$	10	31.1	189.3	97.26	0	4.31	1.038	-2.162	-3.61	-1.851	6.58	4.776	0
		11	30.9	188.6	96.83	0	4.25	1.031	-2.169	-3.82	-1.859	6.56	4.738	0
		12	30.9	188.7	96.93	0	4.24	1.034	-2.166	-3.75	-1.865	6.56	4.749	0
	$\chi=5$	10	37.6	220.3	114.1	0	4.34	1.136	-2.064	-3.66	-2.693	6.06	4.573	0
		11	37.6	220.4	114.2	0	4.34	1.137	-2.062	-3.66	-2.696	6.06	4.583	0
		12	37.6	220.4	114.2	0	4.34	1.137	-2.063	-3.66	-2.696	6.06	4.579	0
	$\chi=10$	10	44.5	253.5	132.3	0	4.45	1.245	-1.955	-3.55	-3.564	5.53	4.397	0
		11	44.5	253.7	132.5	0	4.45	1.246	-1.953	-3.55	-3.567	5.54	4.409	0
		12	44.5	253.7	132.5	0	4.45	1.246	-1.954	-3.55	-3.567	5.54	4.406	0

Табл. 5.3.2

$k$		$\frac{\bar{w}}{\bar{q}}$				$\frac{\bar{N}}{\bar{q}}$				$\frac{\bar{M}}{\bar{q}}$					
		$\bar{x}$				$\bar{x}$				$\bar{x}$					
		0	0.4	0.8	1	0	0.4	0.8	1	0	0.4	0.8	1		
$\gamma=0$	$\bar{B}=0$	$\chi=0$	10	0	216	183	0	5	1.8	-1.4	-3	-8	2.88	3.52	0
			11	0	216	183	0	5	1.8	-1.4	-3	-8	2.88	3.52	0
			12	0	216	183	0	5	1.8	-1.4	-3	-8	2.88	3.52	0
	$\chi=5$	10	0	228	199	0	5.12	1.92	-1.28	-2.88	-8.94	2.32	3.33	0	
		11	0	228	199	0	5.12	1.92	-1.28	-2.88	-8.94	2.32	3.33	0	
		12	0	228	199	0	5.12	1.92	-1.28	-2.88	-8.94	2.32	3.33	0	
	$\chi=10$	10	0	239	214	0	5.23	2.03	-1.17	-2.77	-9.87	1.75	3.14	0	
		11	0	239	214	0	5.23	2.03	-1.17	-2.77	-9.87	1.75	3.14	0	
		12	0	239	214	0	5.23	2.03	-1.17	-2.77	-9.87	1.75	3.14	0	
$\gamma=1$	$\bar{B}=0$	$\chi=0$	10	0	92.8	58.2	0	4.79	1.52	-1.68	-3.11	-5.68	4.28	4.02	0
			11	0	92.5	57.9	0	4.74	1.51	-1.69	-3.35	-5.67	4.27	3.97	0
			12	0	92.6	58.0	0	4.72	1.51	-1.69	-3.27	-5.68	4.27	3.99	0

	$\chi=5$	10	0	103	67.1	0	4.96	1.76	-1.44	-3.03	-7.68	3.07	3.57	0
		11	0	103	67.3	0	4.96	1.76	-1.44	-3.04	-7.68	3.07	3.59	0
		12	0	103	67.2	0	4.96	1.76	-1.44	-3.04	-7.68	3.07	3.58	0
	$\chi=10$	10	0	114	77.4	0	5.24	2.04	-1.16	-2.76	-9.91	1.73	3.13	0
		11	0	114	77.5	0	5.24	2.04	-1.16	-2.76	-9.91	1.73	3.14	0
		12	0	114	77.5	0	5.24	2.04	-1.16	-2.76	-9.91	1.73	3.14	0

Полученные численные результаты приводят к следующим качественным заключениям:

1. Как и следовало ожидать, учет поперечного сдвига ( $\chi > 0$ ) приводит к увеличению прогибов пластинки-полосы.
2. С увеличением параметра  $\bar{B}$  упруго защемленная опора резко слабеет, от чего прогибы заметно возрастают.
3. Изменение параметра  $\bar{B}$  практически не влияет по форму кривых зависимости величин  $\bar{w}/\bar{q}$ ,  $\bar{M}/\bar{q}$  и  $\bar{N}/\bar{q}$  от координата  $\bar{x}$ .

#### **§5.4 Краевая задача упруго защемленной по краю ортотропной круглой пластинки опирающейся на упругом основании**

Рассматривается осесимметричная задача изгиба упруго защемленной ортотропной круглой пластинки, опирающейся на упругом основании. Пользуясь гипотезой Фусса-Винклера в рамках уточненной теории [29] получаются разрешающие дифференциальные уравнения задачи при учете влияний поперечного сдвига и обжатия. В качестве условий упругого защемления применяются условия, предложенные в работе [118]. На основе безразмерных результатов решения делаются качественные заключения.

1. В правой системе цилиндрических координат  $r, \theta, z$  рассмотрим ортотропную круглую пластинку радиуса  $R$  и постоянной толщины  $h$ , опирающейся



на упругом основании. На поверхности пластинки  $z = -\frac{h}{2}$  действует равномерно распределенная поперечная нагрузка интенсивности  $q$ . Пользуясь гипотезой Фусса – Винклера будем считать, что реакция основания, действующая на поверхности пластинки  $z = \frac{h}{2}$ , прямо пропорциональна прогибу. Следовательно, грузовой член, участвующий в задаче изгиба пластинки [29] (стр. 74), будет

$$Z_2 = q - kw, \quad (5.4.1)$$

где  $w$  - прогиб,  $k$  - жесткость уругого основания.

Край пластинки некоторой малой длиной  $2a$  вставлен в упругий массив, образуя упруго защемленную опору [115], [116], [130] - [134], [178, 179]. Условия этой опоры примем в виде [119]:

$$w|_{r=R} = -\left(a \frac{dw}{dr} + BN_r\right), \quad \left.\frac{dw}{dr}\right|_{r=R} = D(aN_r + M_r) \quad (5.4.2)$$

Здесь  $N_r$  - поперечная сила,  $M_r$  - изгибающий момент,  $D$  и  $B$  - параметры, являющиеся обратными величинами жесткостей упругого защемления на вращение и поступательное вертикальное перемещение соответственно. В случае, когда торец вставленной части не контактируется с упругим массивом, эти параметры связаны соотношением [116]

$$D = \frac{3B}{a^2} \quad (5.4.3)$$

Примем безразмеривающие обозначения:

$$\begin{aligned} r &= R\rho, \quad s = \frac{h}{R}, \quad w = h\bar{w}, \quad k = \frac{B_r}{h}\bar{k}, \quad B_0 = mB_r, \\ \varphi &= \frac{B_r}{h^2}\bar{\varphi}, \quad N_r = \frac{h^3}{12}\varphi = \bar{N}_r B_r h \left(\bar{N}_r = \frac{\bar{\varphi}}{12}\right), \quad M_r = B_r h^2 \bar{M}_r, \\ M_0 &= B_r h^2 \bar{M}_0, \quad q = B_r \bar{q}, \quad B_r a_r = \chi, \quad a = \alpha h, \quad B = \frac{\beta}{B_r}, \quad D = \frac{3\beta}{\alpha^2 h^2 B_r} \end{aligned} \quad (5.4.4)$$

$B_r$ ,  $B_0$  и  $a_r$  выражаются упругими постоянными материала пластинки по известным формулам [29] (стр.72).

Безразмерная поперечная сила и безразмерные изгибающие моменты в обозначениях (5.4.4) будут:

$$\begin{aligned}\bar{N}_r &= \frac{\bar{\Phi}}{12}, \\ \bar{M}_r &= -\frac{s^2}{12\rho} \left[ \rho \frac{d^2\bar{w}}{d\rho^2} + v_\theta \frac{d\bar{w}}{d\rho} - \frac{\chi}{10s} \left( \rho \frac{d\bar{\Phi}}{d\rho} + v_\theta \bar{\Phi} \right) + \frac{6A_1\rho}{5s^2} (\bar{q} - \bar{k}\bar{w}) \right] \\ \bar{M}_\theta &= -\frac{ms^2}{12\rho} \left[ \frac{d\bar{w}}{d\rho} + v_r \rho \frac{d^2\bar{w}}{d\rho^2} - \frac{\chi}{10s} \left( \bar{\Phi} + v_r \rho \frac{d\bar{\Phi}}{d\rho} \right) + \frac{6A_2\rho}{5ms^2} (\bar{q} - \bar{k}\bar{w}) \right]\end{aligned}\quad (5.4.5)$$

Параметры  $A_1$  и  $A_2$  учитывают влияние обжатия, а  $\chi$  - влияние поперечного сдвига [29] (стр.72).

С учетом (5.4.1) и (5.4.4) систему разрешающих дифференциальных уравнений задачи [29] (стр.74) можно привести к виду:

$$\begin{cases} \rho \frac{d\bar{\Phi}}{d\rho} + \bar{\Phi} - \frac{12}{s} \bar{k} \rho \bar{w} = -\frac{12\bar{q}}{s} \rho, \\ \rho^2 \frac{d^3\bar{w}}{d\rho^3} + \rho \frac{d^2\bar{w}}{d\rho^2} - \left( m + \frac{6A_1\bar{k}}{5s^2} \rho^2 \right) \frac{d\bar{w}}{d\rho} + \frac{6\bar{k}}{5s^2} (A_2 - A_1) \rho \bar{w} - \\ - \frac{\chi}{10s} \rho^2 \frac{d^2\bar{\Phi}}{d\rho^2} - \frac{\chi\rho}{10s} \frac{d\bar{\Phi}}{d\rho} + \frac{1}{s^3} \left( \rho^2 + \frac{\chi ms^2}{10} \right) \bar{\Phi} = \frac{6(A_2 - A_1)}{5s^2} \rho \bar{q} \end{cases}\quad (5.4.6)$$

Краевые условия (5.4.2) в безразмерном виде будут:

$$\bar{w}|_{\rho=1} = -\left( \alpha s \frac{d\bar{w}}{d\rho} + \beta \bar{N}_r \right), \quad \frac{d\bar{w}}{d\rho} \Big|_{\rho=1} = \frac{3\beta}{\alpha^2 s} (\alpha \bar{N}_r + \bar{M}_r) \quad (5.4.7)$$

Так как система (5.4.6) имеет четвертый порядок, то кроме условий (5.4.7) нужны еще два условия. Эти условия относятся к центру пластинки. Имея в виду что в центре осесимметрично изгибаемой пластинки производная прогиба равна нулю, а из-за отсутствия сосредоточенной центральной силы равна нулю еще и поперечная сила, можно написать:

$$\frac{d\bar{w}}{d\rho} \Big|_{\rho=0} = \bar{\Phi} \Big|_{\rho=0} = 0 \quad (5.4.8)$$

Таким образом, задача сводилась к интегрированию системы (5.4.6) при условиях (5.4.7) и (5.4.8).

2. Задачу удобно решить методом коллокаций. С этой целью положим:

$$\bar{w} = a_1 + \sum_{i=2}^n a_i \rho^i, \quad \bar{\Phi} = \sum_{i=1}^n b_i \rho^i \quad (5.4.9)$$

Эти выражения удовлетворяют условиям (5.4.8). Число неизвестных постоянных  $a_1, a_i$  и  $b_i$  равно  $2n$ , для определения которых интервал  $0 < \rho < 1$  разделим на  $n$  части. Удовлетворив уравнениям (5.4.6) в точках деления и условиям (5.4.7) получим систему  $2n$  линейных алгебраических уравнений с постоянными коэффициентами относительно отмечанных неизвестных. После решения этой системы можно определить значения всех расчетных величин пластинки в виде многочленов порядка  $n$ . Вычисления надо проводить с увеличением числа  $n$  до наступления практической сходимости. Так как в силу линейности задачи результаты решения прямо пропорциональны  $\bar{q}$ , то целесообразно считать  $\bar{q} = 1$ . В каждом конкретном случае умножив результаты решения на действительное значение  $\bar{q}$  получим их значения для этого случая. В заключении отметим, что решение можно значительно упростить, если путем исключения  $\bar{w}$  систему (5.4.6) привести к одному уравнению относительно функции  $\bar{\varphi}$ , в силу чего число неизвестных постоянных уменьшится вдвое. Однако этот подход возможен только при  $\bar{k} \neq 0$  и решение задачи при  $\bar{k} = 0$ , т. е. при отсутствии упругого основания, невозможно будет получить в качестве частного случая. При отсутствии упругого основания также можно прийти к одному уравнению, но уже относительно функции  $\bar{w}$ . Для этого следует интегрировать первое уравнение системы (5.4.6) и полученное выражение функции  $\bar{\varphi}$  подставить во второе уравнение этой системы. Но чтобы возможно было одновременно получить решение задачи в общем случае, т. е. как при наличии, так и отсутствии упругого основания, надо иметь дело с системой двух уравнений. Конечно, решение задачи тогда будет заметно осложняться, поскольку число неизвестных постоянных будет вдвое больше.

### 3. Рассмотрим пример общего случая.

Пусть:

$$s = 0.25; \quad \alpha = 0.5; \quad m = 2(E_\theta = 2E_r); \quad E_z = \frac{2}{3}E_r; \quad (5.4.10)$$

$$v_{\theta r} = v_r = 0.15; \quad v_{zr} = 0.4; \quad v_{\theta z} = 0.2$$

Из условий симметрии упругих свойств ортотропного тела [29] (стр. 23) с учетом (5.4.10) находим:

$$\begin{aligned}
E_{\theta} v_{\theta r} &= E_r v_{r\theta} \Rightarrow v_{r\theta} = v_{\theta} = 0.3 \\
E_z v_{zr} &= E_r v_{rz} \Rightarrow v_{rz} = 0.2667 \\
E_z v_{z\theta} &= E_{\theta} v_{\theta z} \Rightarrow v_{z\theta} = 0.6
\end{aligned}
\tag{5.4.11}$$

Следовательно, значения  $A_1$  и  $A_2$  будут [29] (стр. 72):

$$A_1 = -\frac{E_r v_{rz} + v_{r\theta} v_{\theta z}}{E_z (1 - v_{\theta r} v_{r\theta})} = -0.5131, \quad A_2 = -\frac{E_{\theta} v_{\theta z} + v_{\theta r} v_{rz}}{E_z (1 - v_{\theta r} v_{r\theta})} = -0.7539 \tag{5.4.12}$$

Принятые механические параметры удовлетворяют условиям положительности энергии деформирования ортотропного тела [29] (стр. 24).

Данные таблицы (5.4.1) показывают, что в случае  $\chi = 4$ ;  $\bar{k} = 0.1$ ; сходимость процесса вычислений достигается при  $n = 12$ .

Такая ситуация имеет место и при других значениях параметров задачи.

Табл. (5.4.1)

m=2, A1= -0.5131, β=0.1, A2= -0.7539		ρ											
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	
X=4, k=0.1	n=12	$\bar{w}$	9.61	9.57	9.37	8.96	8.31	7.39	6.21	4.80	3.28	1.84	0.85
		$\bar{N}_r$	0	-0.01	-0.02	-0.04	-0.08	-0.14	-0.23	-0.37	-0.54	-0.77	-1.02
		$\bar{M}_r$	0.00	0.09	0.12	0.13	0.12	0.10	0.05	-0.04	-0.19	-0.43	-0.74
		$\bar{M}_{\theta}$	0.00	0.12	0.17	0.19	0.20	0.20	0.18	0.13	0.04	-0.09	-0.30
	n=13	$\bar{w}$	9.61	9.57	9.37	8.96	8.31	7.39	6.21	4.80	3.28	1.84	0.86
		$\bar{N}_r$	0	-0.01	-0.02	-0.04	-0.08	-0.14	-0.23	-0.37	-0.54	-0.77	-1.02
		$\bar{M}_r$	0.00	0.09	0.12	0.13	0.12	0.10	0.05	-0.04	-0.19	-0.43	-0.75
		$\bar{M}_{\theta}$	0.00	0.12	0.17	0.19	0.20	0.20	0.18	0.13	0.04	-0.10	-0.30

Рассмотрим следующие случаи.

1.  $\chi = 4$ ,  $A_1 = -0.5131$ ,  $A_2 = -0.7539$  (учитываются влияния поперечного сдвига и обжатия)
2.  $\chi = 0$ ,  $A_1 = 0$ ,  $A_2 = 0$  (отмеченные влияния не учитываются, т. е. классический случай)
3.  $\chi = 4$ ,  $A_1 = 0$ ,  $A_2 = 0$  (учитывается только влияние поперечного сдвига)
4.  $\chi = 0$ ,  $A_1 = -0.5131$ ,  $A_2 = -0.7539$  (учитывается только влияние обжатия)

В таблице 2. приведены результаты решения задачи при некоторых значениях  $\bar{k}$ ,  $\beta$  и  $\rho$

Табл. (5.4.2)

m=2		случай	$\bar{w}$		$\bar{N}_r$		$\bar{M}_r$		$\bar{M}_\theta$	
			$\rho$		$\rho$		$\rho$		$\rho$	
			0	1	0	1	0	1	0	1
K=0	$\beta=0.01$	1	39.7	0.20	0	-1.98	0.02	-2.05	0.02	-0.92
		2	34.5	0.15	0	-1.16	0.00	-1.80	0.00	-0.53
		3	40.0	0.20	0	-1.96	0.00	-2.10	0.00	-0.99
		4	34.1	0.15	0	-1.15	0.02	-1.74	0.02	-0.45
	$\beta=0.1$	1	46.5	1.94	0	-1.96	0.02	-1.92	0.02	-0.75
		2	39.8	1.48	0	-1.13	0.00	-1.71	0.00	-0.40
		3	47.1	1.98	0	-1.96	0.00	-1.98	0.00	-0.82
		4	39.2	1.44	0	-1.11	0.02	-1.65	0.02	-0.33
	$\beta=1$	1	96.1	14.8	0	-1.98	0.02	-1.14	0.02	0.35
		2	74.9	10.4	0	-0.88	0.00	-1.13	0.00	0.41
		3	97.6	15.0	0	-1.98	0.00	-1.18	0.00	0.30
		4	73.4	10.1	0	-0.87	0.02	-1.09	0.02	0.43
K=0.05	$\beta=0.01$	1	15.3	0.14	0	-1.38	0.00	-1.21	0.00	-0.55
		2	15.6	0.10	0	-1.07	0.00	-0.99	0.00	-0.29
		3	15.2	0.13	0	-1.38	0.00	-1.24	0.00	-0.62
		4	15.7	0.09	0	-1.05	0.00	-0.95	0.00	-0.21
	$\beta=0.1$	1	16.4	1.08	0	-1.23	0.00	-0.98	0.00	-0.39
		2	16.6	0.89	0	-0.97	0.00	-0.83	0.00	-0.18
		3	16.3	1.10	0	-1.23	0.00	-1.02	0.00	-0.46
		4	16.6	0.86	0	-0.96	0.00	-0.79	0.00	-0.12
	$\beta=1$	1	19.9	4.48	0	-0.73	0.00	-0.25	0.00	0.12
		2	20.1	3.86	0	-0.61	0.00	-0.24	0.00	0.18
		3	19.9	4.53	0	-0.72	0.00	-0.25	0.00	0.09
		4	20.1	3.78	0	-0.61	0.00	-0.22	0.00	0.23
K=0.1	$\beta=0.01$	1	9.25	0.11	0	-1.20	0.00	-0.96	0.00	-0.45
		2	9.84	0.08	0	-1.01	0.00	-0.74	0.00	-0.21
		3	9.16	0.11	0	-1.21	0.00	-1.01	0.00	-0.52
		4	9.95	0.08	0	-0.99	0.00	-0.69	0.00	-0.14
	$\beta=0.1$	1	9.59	0.85	0	-1.02	0.00	-0.73	0.00	-0.30
		2	10.1	0.69	0	-0.88	0.00	-0.57	0.00	-0.12
		3	9.54	0.87	0	-1.02	0.00	-0.77	0.00	-0.36
		4	10.2	0.67	0	-0.88	-0.00	-0.53	-0.00	-0.05
	$\beta=1$	1	10.5	2.94	0	-0.52	-0.00	-0.14	-0.00	0.09
		2	10.9	2.60	0	-0.50	0.00	-0.09	0.00	0.13
		3	10.5	2.98	0	-0.51	0.00	-0.15	0.00	0.05
		4	11.0	2.55	0	-0.51	-0.00	-0.08	-0.00	0.18

Для наглядности на фигурах(5.4.1-5.4.4) приведены графики  $\bar{w}$ ,  $\bar{N}_r$ ,  $\bar{M}_r$  и  $\bar{M}_\theta$  в случае «1» при  $\beta = 0.1$

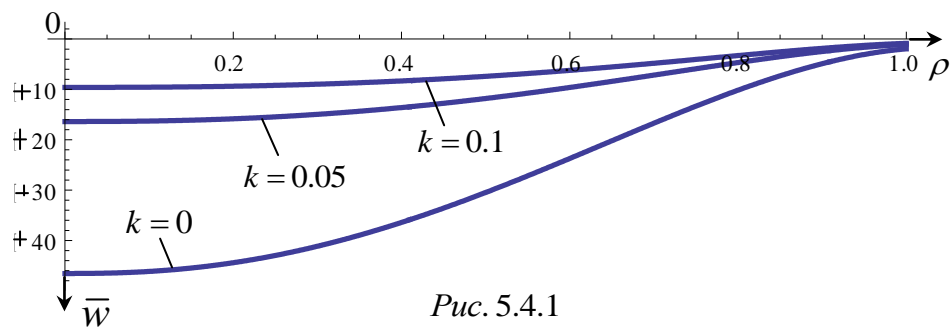


Рис. 5.4.1

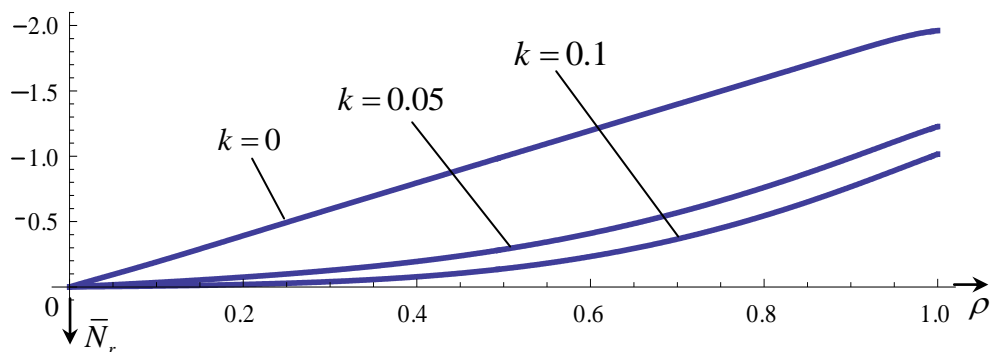


Рис. 5.4.2

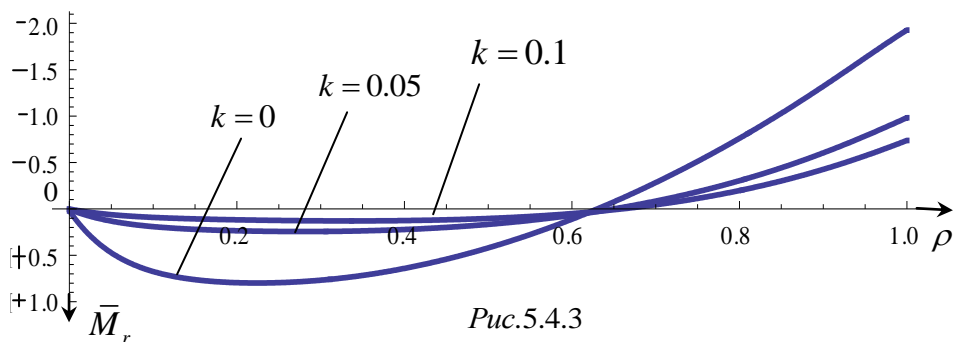


Рис.5.4.3

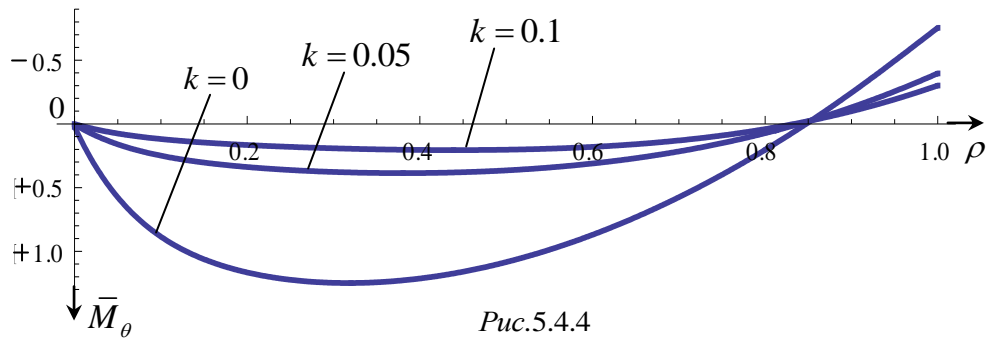


Рис.5.4.4

Данные таблицы (5.4.2) приводят к следующим заключениям.

1. С возрастанием параметра  $k$  реакция упругого основания возрастает и при одинаковых значениях остальных параметров задачи прогибы пластинки уменьшаются. При этом большие прогибы уменьшаются больше, а маленькие – меньше.
2. Если при отсутствии упругого основания (при  $k = 0$ ) наименьшие значения прогиба пластинки получаются при учете только обжатия, то при наличии достаточно жесткого упругого основания (например, при  $k = 0.05$ ), эта закономерность нарушается.
3. При возрастании параметра  $\beta$  жесткость упруго-защемленной опоры уменьшается, что приводит к увеличению прогибов пластинки
4. Начиная с некоторых больших значений  $k$  и  $\beta$ , изгибающие моменты на краю пластинки (при  $\rho = 1$ ) становятся положительными.
5. Как и следовало ожидать, учет поперечного сдвига (при  $\chi > 0$ ) приводит к заметному увеличению прогибов пластинки, когда упругое основание отсутствует. Эта закономерность нарушается при наличии достаточно жесткого упругого основания.

Отмеченная в заглавии задача рассматривается в рамках уточненной теории Амбарцумяна, учитывающей влияния поперечных сдвигов и обжатия. Пользуясь гипотезой Фусса-Винклера получаются дифференциальные уравнения задачи. Применяются известные условия упруго защемленной опоры. На основе безразмерных результатов решения задачи делаются качественные заключения. Рассматриваемая задача решена еще и при граничном условии шарнирного опирания, которая имеет следующий вид:

$$\bar{w}|_{\rho=1} = 0 \quad \bar{M}_r|_{\rho=1} = 0 \quad (5.4.13)$$

Ниже приведены окончательные выражения для расчетных величин пластинки при некоторых значениях  $\chi$ ,  $\bar{k}$ ,  $A_1$  и  $A_2$ :

При  $m = 2$ ,  $\chi = 5$ ,  $A_1 = -0.5131$ ,  $A_2 = -0.7539$ ,  $k = 0.1$

$$\begin{aligned} \bar{w} = & 11.09 + 2.361\rho^2 - 34.92\rho^3 + 202.4\rho^4 - 1016\rho^5 + \\ & + 3619\rho^6 - 9523\rho^7 + 18570\rho^8 - 26756\rho^9 + 28109\rho^{10} - \\ & - 20920\rho^{11} + 10447\rho^{12} - 3138\rho^{13} + 428.5\rho^{14}, \end{aligned} \quad (5.4.14)$$

$$\begin{aligned} \bar{N}_r = & 0.219\rho + 0.239\rho^2 - 5.232\rho^3 + 55.98\rho^4 - 370.9\rho^5 + \\ & + 1630\rho^6 - 5040\rho^7 + 11205\rho^8 - 18032\rho^9 + 20841\rho^{10} - \\ & - 16870\rho^{11} + 9080\rho^{12} - 2918\rho^{13} + 423.8\rho^{14}, \end{aligned} \quad (5.4.15)$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_r = & -0.002 + 1.324\rho - 16.09\rho^2 + 144.1\rho^3 - 846.3\rho^4 + 3477\rho^5 - \\ & - 10267\rho^6 + 22084\rho^7 - 34673\rho^8 + 39316\rho^9 - 31352\rho^{10} + \\ & + 16682\rho^{11} - 5321\rho^{12} + 773.7\rho^{13} - 2.198\rho^{14}, \end{aligned} \quad (5.4.16)$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_\theta = & -0.002 + 1.496\rho - 14.14\rho^2 + 107.4\rho^3 - 559.7\rho^4 + 2102\rho^5 - \\ & - 5783\rho^6 + 11753\rho^7 - 17615\rho^8 + 19220\rho^9 - 14849\rho^{10} + \\ & + 7704\rho^{11} - 2415\rho^{12} + 352.1\rho^{13} - 3.231\rho^{14}. \end{aligned} \quad (5.4.17)$$

В таблице (5.4.4) приведены полученные значения основных величин при  $k = 0$ ;  $\chi = 5$

Таблица (5.4.4)

	случ ам	$\rho$										
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$\bar{w}$	1	136.9	136.1	132.9	126.4	116.6	103.4	86.99	67.85	46.47	23.56	0
	2	116.3	115.9	113.5	108.4	100.3	89.28	75.34	58.86	40.34	20.44	0
	3	140.1	139.3	135.9	129.4	119.3	105.8	89.12	69.55	47.68	24.20	0
	4	113.1	112.7	110.4	105.4	97.59	86.80	73.21	57.15	39.12	19.79	0
$\bar{N}_r$	1	0	-0.184	-0.387	-0.592	-0.794	-0.995	-1.196	-1.396	-1.597	-1.799	-1.936
	2	0	0.186	-0.077	-0.395	-0.643	-0.876	-1.095	-1.313	-1.516	-1.768	-0.401
	3	0	-0.184	-0.387	-0.592	-0.794	-0.995	-1.196	-1.396	-1.596	-1.799	-1.935
	4	0	0.184	-0.079	-0.396	-0.644	-0.877	-1.095	-1.313	-1.516	-1.768	-0.409
$\bar{M}_r$	1	0.023	1.409	1.776	1.920	1.937	1.841	1.643	1.349	0.966	0.491	0
	2	0.002	1.257	1.702	1.898	1.956	1.894	1.727	1.461	1.102	0.653	0
	3	0.003	1.397	1.767	1.912	1.931	1.836	1.639	1.347	0.963	0.489	0
	4	0.022	1.270	1.713	1.907	1.963	1.899	1.731	1.464	1.103	0.653	0
$\bar{M}_\theta$	1	0.025	1.839	2.522	2.864	3.039	3.089	3.034	2.883	2.643	2.317	1.934
	2	0.004	1.596	2.332	2.738	2.967	3.065	3.052	2.939	2.734	2.443	2.026
	3	0.005	1.829	2.516	2.861	3.038	3.090	3.036	2.887	2.648	2.324	1.942
	4	0.024	1.607	2.339	2.742	2.968	3.064	3.049	2.935	2.728	2.435	2.018

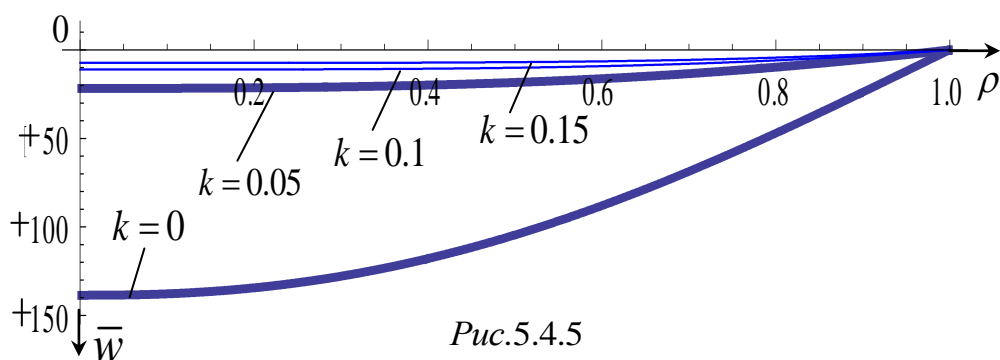


В таблице (5.4.5) приведены полученные значения основных величин при  $k = 0.15$ ;  $\chi = 5$

Таблица (5.4.5)

-	случаи N	$\rho$										
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$\bar{w}$	1	7.283	7.294	7.302	7.273	7.163	6.910	6.430	5.618	4.351	2.509	0
	2	7.739	7.734	7.701	7.599	7.375	6.955	6.262	5.224	3.799	2.013	0
	3	7.260	7.272	7.283	7.261	7.162	6.926	6.467	5.677	4.425	2.573	0
	4	7.801	7.793	7.749	7.631	7.381	6.929	6.199	5.128	3.689	1.925	0
$\bar{N}_r$	1	0.	0.019	0.038	0.057	0.072	0.078	0.066	0.022	-0.074	-0.247	-0.528
	2	0	0.035	0.066	0.093	0.113	0.118	0.096	0.032	-0.092	-0.294	-0.575
	3	0	0.018	0.037	0.055	0.070	0.077	0.067	0.025	-0.067	-0.237	-0.516
	4	0	0.037	0.069	0.097	0.117	0.121	0.096	0.027	-0.102	-0.309	-0.593
$\bar{M}_r$	1	-0.002	0.026	0.045	0.068	0.098	0.131	0.163	0.186	0.183	0.133	0
	2	0.000	0.016	0.039	0.072	0.113	0.159	0.203	0.231	0.225	0.159	0
	3	0.000	0.028	0.047	0.070	0.099	0.131	0.163	0.185	0.183	0.132	0
	4	-0.003	0.012	0.036	0.069	0.113	0.161	0.206	0.235	0.228	0.161	0
$\bar{M}_0$	1	-0.002	0.033	0.056	0.080	0.109	0.144	0.181	0.217	0.244	0.251	0.218
	2	0.000	0.018	0.041	0.072	0.111	0.156	0.203	0.244	0.268	0.261	0.203
	3	0.000	0.035	0.058	0.082	0.110	0.142	0.175	0.206	0.225	0.219	0.171
	4	-0.003	0.014	0.037	0.069	0.112	0.161	0.214	0.263	0.296	0.299	0.250

Для наглядности на фигурах (5.4.5-5.4.8) приведены графики  $\bar{w}$ ,  $\bar{N}_r$ ,  $\bar{M}_r$  и  $\bar{M}_0$  в случае «1» т. е. при  $\chi = 5$ ,  $A_1 = -0.5131$ ,  $A_2 = -0.7539$ .



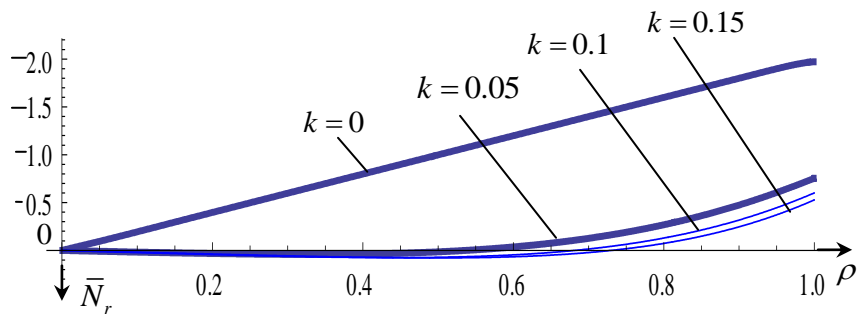


Рис.5.4.6

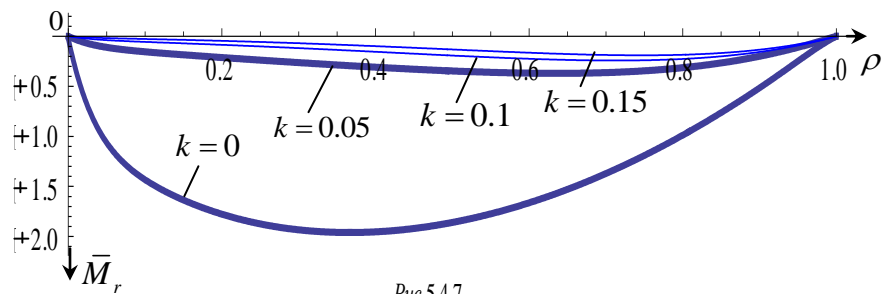


Рис.5.4.7

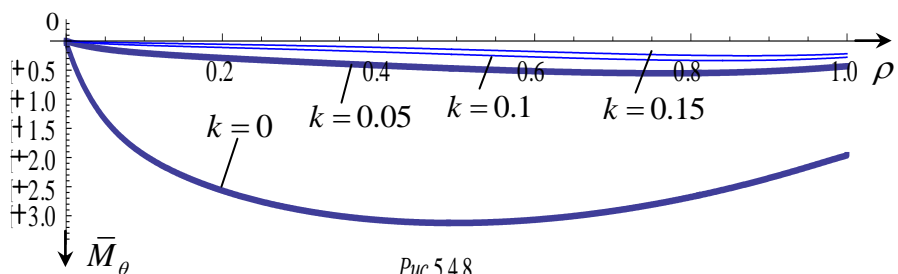


Рис.5.4.8

Анализ полученных результатов решения приводит к следующим заключениям.

1. При возрастании параметра  $k$  реакция упругого основания увеличивается, в результате чего прогибы пластинки уменьшаются.
2. При  $k = 0$ , т. е. при отсутствии упругого основания, наименьшие значения прогиба получаются, если учитывается только обжатие.

3. При учете поперечного сдвига, т. е. при  $\chi > 0$ , прогибы пластинки увеличиваются если упругое основание отсутствует ( $k = 0$ ), а если параметр  $k$  заметно больше нуля например ( $k = 0.15$ ), то это закономерность нарушается.

### §5.5 Задача изгиба ортотропной кольцевой пластинки переменной толщины с упруго-зашемленной опорой

1. **Постановка задач.** В правой системе цилиндрических координат  $r, \theta, z$  рассмотрим упруго зашемленную опору (фиг. 5.5.1).

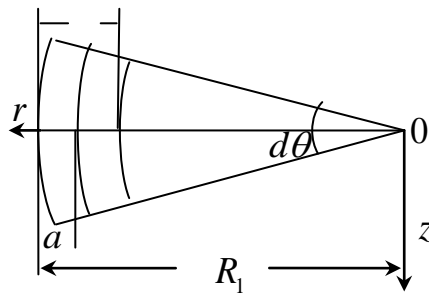


Рис. 5.5.1

Часть внутреннего края кольцевой пластинки вставлена в упруго деформируемый массив. Длина вставленной части по радиусу  $d$  достаточно мала относительно радиуса внутреннего края пластинки  $R_1$ . В силу этого вставленная часть подобно абсолютно твердого элемента практически будет вертикально перемещаться и вращаться вокруг своего центра тяжести как одна целая. По этому значение производной прогиба  $\frac{dw}{dr}$  в пределах вставленной части будем считать постоянным. Для простоты положим, что пластинка деформируется осесимметричным изгибом. Тогда на ее внутреннем контуре  $r = R_1$  возникнут только поперечная сила  $N_r$  и изгибающий момент  $M_r$ .

Условие равенства нулю статического момента дифференциального элемента вставленной части относительно ее центра тяжести имеет вид

$$\int_0^a (R_1 - a + x) x dx - \int_0^{d-a} (R_1 - a - x) x dx = 0 \quad (5.5.1)$$

Через  $a$  обозначено расстояние центра тяжести вставленной части от внутреннего края пластинки  $r = R_1$ . После некоторых выкладок из (5.5.1) получим

$$a = \frac{d(3R_1 - 2d)}{3(2R_1 - d)} \quad (5.5.2)$$

Из (5.5.2) видно, что если  $d \ll R_1$ , то  $a \approx \frac{d}{2}$ .

Это имеет место, например, для упруго заземленной опоры внешнего контура пластинки.

Под действием момента поперечной силы относительно центра тяжести вставленной части  $aN_r$  и момента края пластинки  $M_r$ , срединная плоскость пластинки в опорном сечении  $r = R_1$  будет вращаться на некоторый угол. Тангенс этого угла  $\frac{dw}{dr}$  зависит от вращающих моментов.

Нетрудно заметить, что в принятой правой системе координат положительный знак  $\frac{dw}{dr}$  соответствует отрицательным моментам. Имея в виду это обстоятельство и

считая, что величина  $\frac{dw}{dr}$  прямо пропорциональна сумме моментов, можно написать:

$$\left. \frac{dw}{dr} \right|_{r=R_1} = D(aN_r - M_r) \quad (5.5.3)$$

Положительная постоянная  $D$  обратная величина жесткости упруго заземленной опоры на вращение. В системе  $СИ$  она имеет размерность  $H^{-1}$ .

Прогиб внутреннего контура  $r = R_1$  состоит из двух частей. Одна из них возникает вращением вставленной части вокруг своего центра тяжести, а другая — от поперечной силы этого контура. Считая, что вторая часть прямо пропорциональна поперечной силе, можно написать:

$$w|_{r=R_1} = \left( a \frac{dw}{dr} + BN_r \right) \quad (5.5.4)$$

Постоянная  $B$  обратная величина жесткости упруго заземленной опоры на вертикальное смещение. В  $СИ$  она имеет размерность  $m^2 H^{-1}$ . Таким образом (5.5.3) и (5.5.4) являются условиями упруго заземленной опоры внутреннего края пластинки при ее осесимметричном изгибе. Они по существу совпадают с аналогичными

условиями упруго защемленной опоры балки, испытывающей деформирование поперечного изгиба [114].

**2. Получение связи параметров.** Определим параметры упруго защемленной опоры  $B$  и  $D$  и связь между ними. Будем пользоваться гипотезой Фусса-Винклера, согласно которой деформированный упругий массив на вставленную часть пластинки действует напряжениями, прямо пропорциональными возникшим перемещениям. В результате на вставленную часть пластинки будет действовать вертикальная сила, которая уравнивает краевую поперечную силу  $N_r R_1 d\theta$ . Момент же сил (действующих со стороны упругого массива) относительно центра тяжести вставленной части, будет уравнивать сумму моментов  $(aN_r - M_r) R_1 d\theta$ . Отмеченные условия имеют вид:

$$2k_1 \int_0^d (R_1 - d + x) dx + h_0 k_2 (R_1 - d) = \frac{R_1}{B} \quad (5.5.5)$$

$$2k_1 \left[ \int_0^a (R_1 - a + x) x^2 dx + \int_0^{d-a} (R_1 - a - x) x^2 dx \right] + h_0 k_2 (R_1 - d) (d - a)^2 = \frac{R_1}{D} \quad (5.5.6)$$

Здесь  $h_0$  - постоянная толщина вставленной части пластинки,  $k_1$  и  $k_2$  коэффициенты пропорциональности соответствующие, нормальным и касательным контактными напряжениям соответственно. В СИ они имеют размерность  $H \cdot м^{-3}$ .

Из (5.5.5) и (5.5.6) для параметров упруго защемленной опоры внутреннего карая пластинки получим:

$$B = \frac{R_1}{k_1 d (2R_1 - d) + h_0 k_2 (R_1 - d)} \quad (5.5.7)$$

$$D = \frac{6R_1}{k_1 d \left[ d^2 (4R_1 + 8a - 3d) - 6a(ad + 2R_1 d - 2aR_1) \right] + 6k_2 h_0 (R_1 - d) (d - a)^2} \quad (5.5.8)$$

В случае, когда торец вставленной части не контактируется с упруго деформируемым массивом, члены выражений (5.5.7) и (5.5.8) с множителем  $k_2$  будут отсутствовать. Тогда параметры упруго защемленной опоры  $D$  и  $B$  будут связаны соотношением:

$$D = \frac{6(2R_1 - d)B}{d^2 (4R_1 + 8a - 3d) - 6a(ad + 2R_1 d - 2aR_1)} \quad (5.5.9)$$

Эту связь и будем использовать ниже при решении конкретной задачи осесимметричного изгиба пластинки.

**3. Постановка задачи.** Рассмотрим цилиндрически ортотропную круглую кольцевую пластинку с внутренним и внешним радиусами  $R_1$  и  $R_2$  соответственно. Внутренний край пластинки малой длиной  $d$  и постоянной толщиной  $h_0$  вставлен в упруго деформируемый массив, образуя упруго защемленную опору. Внешний край пластинки шарнирно оперт. Пластинка несет равномерно распределенную поперечную нагрузку интенсивности  $q$ . Толщина пластинки  $h$  изменяется линейно по формуле

$$h = h_0 + h_1(r - R_1), \quad R_2 \geq r \geq R_1 \quad (5.5.10)$$

Здесь  $h_0$  и  $h_1$  заданные постоянные.

#### 4. Основные обозначения и получение системы разрешающих уравнений.

Примем обозначения:

$$\begin{aligned} r &= R_2 \rho, \quad R_1 = kR_2, \quad s = \frac{h_0}{R_2}, \quad h = h_0 H, \quad H = 1 + \gamma(\rho - k), \\ \gamma &= \frac{h_1}{s}, \quad w = h_0 \bar{w}, \quad q = B_r \bar{q}, \quad B_\theta = m B_r, \\ \varphi_1 &= B_r \bar{\varphi}_1, \quad a_r B_r = \chi, \quad d = h_0 \bar{d}, \quad a = h_0 \bar{a}, \quad N_r = B_r h_0 \bar{N}_r, \\ M_r &= B_r h_0^2 \bar{M}_r, \quad M_\theta = B_r h_0^2 \bar{M}_\theta, \quad B = \frac{\bar{B}}{B_r}, \quad D = \frac{\bar{D}}{B_r h_0^2} \end{aligned} \quad (5.5.11)$$

Здесь  $B_r$ ,  $B_\theta$ ,  $a_r$  - общеизвестные механические параметры материала [29],  $\chi$  - определяет влияние поперечного сдвига,  $\varphi_1$  - характеризует изменение поперечного сдвига пластинки.

С помощью обозначений (5.5.11) выражения (5.5.2) и (5.5.9) примут вид:

$$\bar{a} = \frac{\bar{d}(3k - 2s\bar{d})}{3(2k - s\bar{d})} \quad (5.5.12)$$

$$\bar{D} = \frac{6(2k - s\bar{d})\bar{B}}{\bar{d}^2(4k + 8s\bar{a} - 3s\bar{d}) - 6\bar{a}(\bar{a}s\bar{d} + 2k\bar{d} - 2k\bar{a})} \quad (5.5.13)$$

С учетом (5.5.11) для выражений поперечной силы и изгибающих моментов, при учете влияния поперечного сдвига [29], получим:

$$\bar{N}_r = \frac{H}{12} \left[ 8\bar{\varphi}_1 - \gamma s^2 H \left( s \frac{d^2 \bar{w}}{d\rho^2} + \frac{v_\theta}{\rho} s \frac{d\bar{w}}{d\rho} - \chi \frac{d\bar{\varphi}_1}{d\rho} - \frac{v_\theta}{\rho} \chi \bar{\varphi}_1 \right) \right] \quad (5.5.14)$$

$$\bar{M}_r = -\frac{sH^3}{12\rho} \left( s\rho \frac{d^2 \bar{w}}{d\rho^2} + v_\theta s \frac{d\bar{w}}{d\rho} - \chi\rho \frac{d\bar{\varphi}_1}{d\rho} - v_\theta \chi \bar{\varphi}_1 \right) \quad (5.5.15)$$

$$\bar{M}_\theta = -\frac{msH^3}{12\rho} \left( s \frac{d\bar{w}}{d\rho} + \rho s v_r \frac{d^2 \bar{w}}{d\rho^2} - \chi v_r \rho \frac{d\bar{\varphi}_1}{d\rho} - \chi \bar{\varphi}_1 \right) \quad (5.5.16)$$

Дифференциальные уравнения равновесия осесимметричного изгиба пластинки [29] с учетом (5.5.11) приводятся к следующим безразмерным видам:

$$\begin{aligned} \gamma s^4 v_\theta \rho H^2 \frac{d^2 \bar{w}}{d\rho^2} + ms^4 \gamma H^2 \frac{d\bar{w}}{d\rho} - sH\rho(8\rho + \chi v_\theta \gamma H s^2) \frac{d\bar{\varphi}_1}{d\rho} - \\ - s(8\rho H + 16\gamma\rho^2 + \chi m \gamma s^2 H^2) \bar{\varphi}_1 = 12\rho^2 \bar{q} \end{aligned} \quad (5.5.17)$$

$$\begin{aligned} s^3 \rho^2 H^2 \frac{d^3 \bar{w}}{d\rho^3} + s^3 \rho H (H + 2\gamma\rho) \frac{d^2 \bar{w}}{d\rho^2} + s^3 H (2v_\theta \gamma \rho - mH) \frac{d\bar{w}}{d\rho} - \\ - \chi s^2 H^2 \rho^2 \frac{d^2 \bar{\varphi}_1}{d\rho^2} - \chi s^2 H \rho (H + 2\gamma\rho) \frac{d\bar{\varphi}_1}{d\rho} + \\ + (8\rho^2 + \chi ms^2 H^2 - 2\chi v_\theta H \gamma \rho s^2) \bar{\varphi}_1 = 0 \end{aligned} \quad (5.5.18)$$

Система уравнений (5.5.17), (5.5.18) имеет четвертый порядок. Краевые условия задачи с учетом (5.5.11) будут:

При  $\rho = k$

$$\bar{w} = \bar{a}s \frac{d\bar{w}}{d\rho} + \bar{B}\bar{N}_r, \quad s \frac{d\bar{w}}{d\rho} = \bar{D}(\bar{a}\bar{N}_r - \bar{M}_r) \quad (5.5.19)$$

при  $\rho = 1$

$$\bar{w} = 0, \quad \rho s \frac{d^2 \bar{w}}{d\rho^2} + v_\theta s \frac{d\bar{w}}{d\rho} - \rho \chi \frac{d\bar{\varphi}_1}{d\rho} - v_\theta \chi \bar{\varphi}_1 = 0 \quad (5.5.20)$$

Задачу будем решать по методу коллокаций. Пусть

$$\bar{w} = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \rho^i, \quad \bar{\varphi}_1 = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i \rho^i \quad (5.5.21)$$

Здесь  $a_0, a_i, b_0, b_i$ -неизвестные постоянные. Для определения их значений будем пользоваться уравнениями (5.5.17), (5.5.18) и краевыми условиями (5.5.19) и (5.5.20).

Интервал  $k < \rho < 1$  разделим на  $n$  части. Число точек деления равно  $(n-1)$ . Записывая

систему уравнений (5.5.17), (5.5.18) в этих точках получим  $2(n-1)$  уравнения. Добавляя к ним 4 краевые условия (5.5.19), (5.5.20) получим систему алгебраических уравнений относительно  $2(n+1)$  отмеченных неизвестных постоянных. Увеличив  $n$  до такого значения, при котором процесс вычислений практически сходится, получим решение задачи. Безразмерные значения расчетных величин пластинки определяются формулами (5.5.14)÷(5.5.16).

### 5. Рассмотренный пример.

Так как расчетные величины пластинки прямо пропорциональны значению интенсивности нагрузки, то, для простоты будем считать  $\bar{q} = 1$ . В каждом конкретном случае умножим решение на истинное значение  $\bar{q}$  получим действительные значения расчетных величин

Пусть:

$$\begin{aligned} \bar{d} = 1, \quad s = 0.05, \quad \gamma = 1, \quad v_\theta = 0.2, \quad v_r = 0.4, \quad k = 0.2 \\ m = 0.5, \quad \chi = 0 \text{ и } 5, \quad \bar{q} = 1 (\bar{a} = 0.4762), \quad \bar{D} = 12.0822 \cdot \bar{B} \end{aligned} \quad (5.5.22)$$

Табл. 5.5.1

–		$\rho$				
		0.2	0.4	0.6	0.8	1
$\bar{w}$	$n = 8$	3.6807	1575.1	2347.8	1564.2	0
	$n = 10$	3.6921	1581.2	2353.0	1573.2	0
$\bar{N}_r$	$n = 8$	25.164	8.3190	1.7961	-2.1694	-9.2933
	$n = 10$	23.033	7.8993	1.9267	-2.0538	-7.4308
$\bar{M}_r$	$n = 8$	-47.617	9.5831	21.713	16.548	0
	$n = 10$	-49.201	9.4128	21.793	16.930	0
$\bar{M}_\theta$	$n = 8$	-7.6126	-1.0992	4.6391	6.4051	4.4257
	$n = 10$	-8.0776	-1.1080	4.6384	6.4936	4.4798

Данные таблицы (5.5.1) показывают, что при  $\bar{B} = 0.01$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\chi = 5$  сходимость процесса вычисления практически наступает при  $n = 10$ . Такая ситуация имеет место и при других значениях параметров задачи.

Для наглядности на фигурах 5.5.2÷5.5.5 приведены графики изменения безразмерных расчетных величин при некоторых значениях параметров задачи.





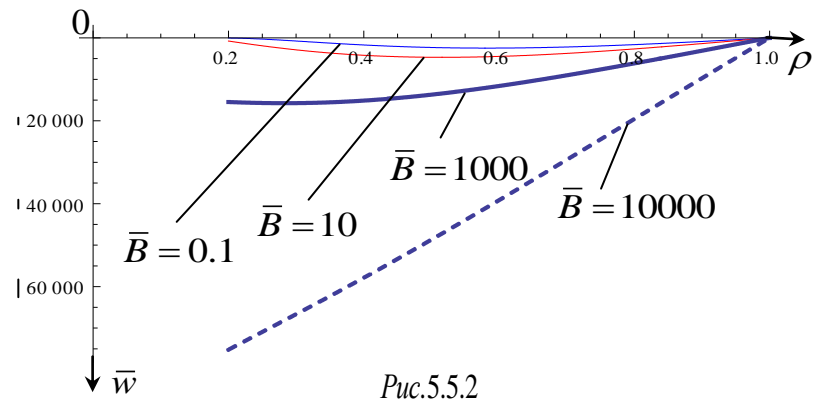


Рис.5.5.2

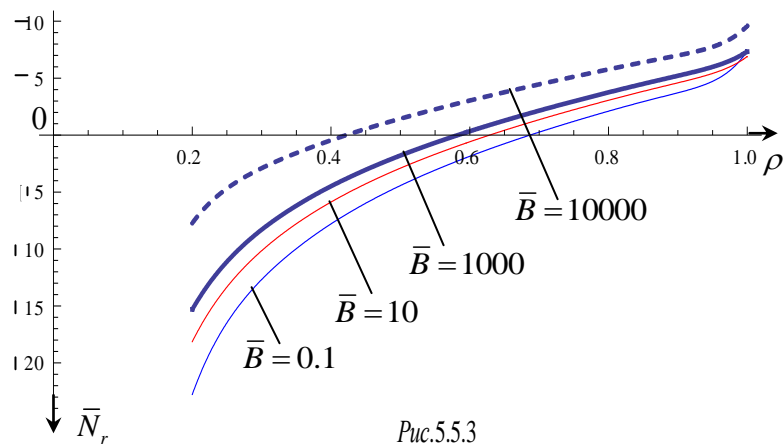
Табл. 5.5.2

			$\rho$					
			0.2	0.4	0.6	0.8	1	
$\bar{B}=0.001$	$\gamma=0$	$\chi=0$	$\bar{w}$	4.2464	2709.9	4893.8	3706.3	0
			$\bar{N}_r$	24.878	8.1245	2.0734	-1.9434	-7.4468
			$\bar{M}_r$	-57.636	4.7252	18.744	14.696	0
			$\bar{M}_\theta$	-11.608	-3.1379	3.2908	4.6081	1.9856
		$\chi=5$	$\bar{w}$	4.4999	2785.6	5064.9	3875.9	0
			$\bar{N}_r$	23.347	8.3615	2.2383	-1.8208	-5.7149
			$\bar{M}_r$	-63.038	3.4599	18.527	15.032	0
			$\bar{M}_\theta$	-11.015	-3.2234	3.2520	4.6881	2.0338
	$\gamma=1$	$\chi=0$	$\bar{w}$	3.1266	1351.1	1957.2	1257.9	0
			$\bar{N}_r$	26.300	6.8154	1.1799	-2.6093	-16.123
			$\bar{M}_r$	-37.247	10.568	19.612	12.863	0
			$\bar{M}_\theta$	-7.5071	-0.7141	4.2497	5.2998	3.6235
		$\chi=5$	$\bar{w}$	3.6921	1581.2	2353.0	1573.2	0
			$\bar{N}_r$	23.033	7.8993	1.9267	-2.0538	-7.4308
			$\bar{M}_r$	-49.201	9.4128	21.793	16.930	0
			$\bar{M}_\theta$	-8.0776	-1.1080	4.6384	6.4936	4.4798

				$\bar{B}=0.002$				
				$\bar{w}$	$\bar{N}_r$	$\bar{M}_r$	$\bar{M}_\theta$	
	$\gamma=0$	$\chi=0$	$\bar{w}$	8.4660	2730.8	4913.5	3717.5	0
			$\bar{N}_r$	24.854	8.1169	2.0683	-1.9472	-7.4426
			$\bar{M}_r$	-57.419	4.8068	18.782	14.712	0
			$\bar{M}_\theta$	-11.644	-3.1276	3.3031	4.6175	1.9911
		$\chi=5$	$\bar{w}$	8.9708	2807.7	5085.5	3887.4	0
			$\bar{N}_r$	23.327	8.353	2.2326	-1.8251	-5.7162
			$\bar{M}_r$	-62.798	3.5478	18.567	15.047	0
			$\bar{M}_\theta$	-11.054	-3.2122	3.2649	4.6977	2.0394
	$\gamma=1$	$\chi=0$	$\bar{w}$	6.2265	1364.1	1968.3	1263.9	0
			$\bar{N}_r$	26.265	6.8084	1.1754	-2.6127	-16.094
			$\bar{M}_r$	-37.039	10.655	19.657	12.887	0
			$\bar{M}_\theta$	-7.5225	-0.6998	4.2677	5.3189	3.6407
$\chi=5$		$\bar{w}$	7.3492	1596.1	2365.2	1579.5	0	
		$\bar{N}_r$	23.004	7.8874	1.9188	-2.0597	-7.4277	
		$\bar{M}_r$	-48.918	9.5170	21.837	16.944	0	
		$\bar{M}_\theta$	-8.0931	-1.0900	4.6579	6.5116	4.4968	

			$\rho$					
			0.2	0.4	0.6	0.8	1	
$\bar{B}=0.01$	$\gamma=0$	$\chi=0$	$\bar{w}$	41.288	2892.7	5066.2	3804.4	0
			$\bar{N}_r$	24.666	8.0573	2.0289	-1.9769	-7.4098
			$\bar{M}_r$	-55.729	5.4410	19.078	14.837	0
			$\bar{M}_\theta$	-11.927	-3.0473	3.3987	4.6908	2.0339
		$\chi=5$	$\bar{w}$	43.723	2978.8	5245.4	3977.2	0
			$\bar{N}_r$	23.173	8.2857	2.1879	-1.8587	-5.7260
			$\bar{M}_r$	-60.932	4.2293	18.876	15.167	0
			$\bar{M}_\theta$	-11.354	-3.1258	3.3651	4.7717	2.0827
	$\gamma=1$	$\chi=0$	$\bar{w}$	30.109	1464.0	2054.1	1310.5	0
			$\bar{N}_r$	25.997	6.7547	1.1402	-2.6392	-15.869
			$\bar{M}_r$	-35.435	11.323	20.003	13.077	0
			$\bar{M}_\theta$	-7.6406	-0.5901	4.4057	5.4658	3.7734
			$\bar{w}$	35.419	1710.2	2458.2	1627.6	0

$\bar{B}=10$	$\gamma=0$	$\chi=5$	$\bar{N}_r$	22.783	7.7962	1.8582	-2.1052	-7.4036	
			$\bar{M}_r$	-46.753	10.315	22.176	17.053	0	
			$\bar{M}_\theta$	-8.2119	-0.9521	4.8072	6.6494	4.6275	
		$\chi=0$	$\bar{w}$	1118.0	7662.9	9539.5	6343.4	0	
			$\bar{N}_r$	19.244	6.3319	0.8855	-2.8355	-6.4665	
			$\bar{M}_r$	-6.9231	23.768	27.639	18.448	0	
		$\chi=5$	$\bar{w}$	1159.6	7934.4	9848.8	6557.9	0	
			$\bar{N}_r$	18.786	6.3742	0.9156	-2.8132	-6.0059	
			$\bar{M}_r$	-7.9449	23.603	27.664	18.572	0	
		$\gamma=1$	$\chi=0$	$\bar{w}$	711.64	3813.9	4047.1	2389.3	0
				$\bar{N}_r$	19.942	5.5362	0.3441	-3.2394	-10.821
				$\bar{M}_r$	0.5937	26.319	27.779	17.339	0
	$\bar{M}_\theta$			-10.189	1.9559	7.5846	8.8479	6.8434	
	$\chi=5$		$\bar{w}$	759.31	4197.3	4470.1	2665.6	0	
			$\bar{N}_r$	18.138	5.8773	0.5826	-3.0626	-6.9042	
			$\bar{M}_r$	-1.4076	27.034	29.276	19.322	0	
			$\bar{M}_\theta$	-10.604	2.0108	8.0059	9.6122	7.4475	



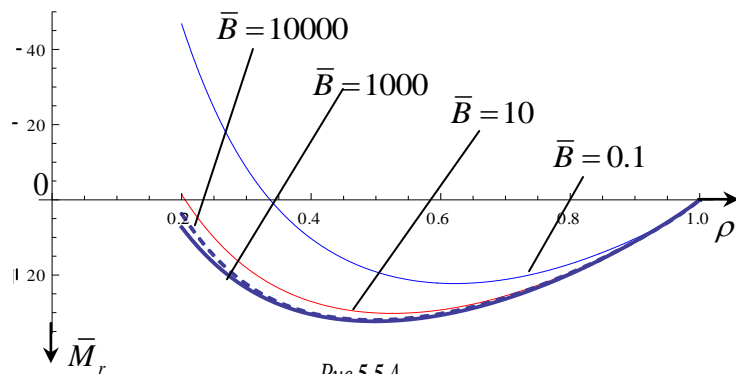


Рис.5.5.4

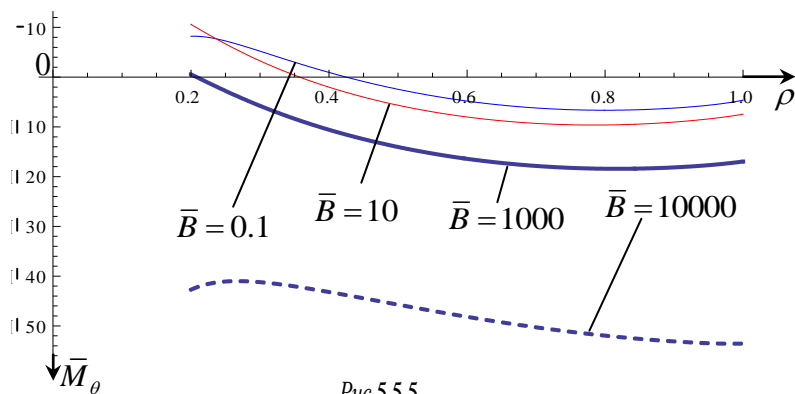


Рис.5.5.5

## 6. Основные выводы

Данные таблицы (5.5.2) и графики 5.5.2÷5.5.5 приводят к следующим заключениям

5. С ростом параметра  $\bar{B}$ , а следовательно и  $\bar{D}$  жесткости упруго заземленной опоры уменьшаются, в результате которого прогибы пластинки увеличиваются.
6. Ослабление упруго заземленной опоры существенно не влияет на качественный характер изменения расчетных величин пластинки по радиальной координате  $\rho$ .
7. При существенном ослаблении упруго заземленной опоры прогиб заземленного края пластинки существенно увеличивается, а поперечная сила

$N_r$  и изгибающий момент  $M_r$  уменьшаются. Заделанный край пластинки стремится к свободному краю.

8. Как и следовало ожидать, при  $\chi > 0$ , т.е. при учете влияния поперечного сдвига прогибы пластинки возрастают.

## ГЛАВА VI

# НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ-ПОЛОСЫ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

### §6.1 Задача термоупругости ортотропной пластинки-полосы переменной толщины при учете поперечного сдвига

На основе теории [29] решаются плоская задача и задача изгиба термоупругости ортотропной пластинки-полосы линейно-переменной толщины при краевых условия защемления. Приводятся графики перемещений, усилий и изгибающего момента пластинки-полосы.

1. Пользуясь методом представления решений степенными многочленами по поперечной координате, в работе [111] с учетом гипотезы Франца Неймана [140] (стр.330) по аналогии [107] получены уравнения и краевые условия задачи термоупругости ортотропной пластинки переменной толщины при учете влияний поперечных сдвигов и изменения температуры. Настоящая работа является применением этой теории.

Рассмотрим ортотропную пластинку-полосу ширины  $l$  и линейно-переменной толщины  $h$ . Пластинку-полосу отнесем к системе прямоугольных декартовых координат  $x, y, z$ , оси которой параллельны главным направлениям ортотропии материала. Координатную плоскость  $xoy$  совместим со срединной плоскостью, а ось  $z$  направим перпендикулярно так, чтобы образовалась правая система. Толщина пластинки-полосы симметрична относительно срединной плоскости. Она изменяется только вдоль координатной оси  $ox$  по закону

$$h = h_0 + h_1 x \quad (6.1.1)$$

Здесь  $h_0$  и  $h_1$  - известные параметры. Будем считать, что поверхностные нагрузки отсутствуют. Температуры поверхностей пластинки-полосы известны. Для температуры  $\theta$  примем линейный закон распределения по поперечной координате  $z$

$$\theta = \frac{\theta^+ + \theta^-}{2} + \frac{z}{h}(\theta^+ - \theta^-) \quad (6.1.2)$$

Через  $\theta^+$  и  $\theta^-$  обозначены значения температуры на поверхностях пластинки-полосы  $z = +\frac{h}{2}$  и  $z = -\frac{h}{2}$  соответственно.

Примем безразмеривающие обозначения:

$$\begin{aligned} u &= h_0 \bar{u}, \quad w = h_0 \bar{w}, \quad x = l \bar{x}, \quad s = \frac{h_0}{l}, \quad h = h_0 H, \quad h_1 = \gamma s, \\ H &= 1 + \gamma \bar{x}, \quad B_{12} = m B_{11}, \quad \varphi_1 = B_{11} \bar{\varphi}_1, \quad a_{55} B_{11} = \chi, \\ T_x &= h_0 B_{11} \bar{T}_x, \quad N = B_{11} h_0 \bar{N}_x, \quad M_x = B_{11} h_0^2 \bar{M}_x \end{aligned} \quad (6.1.3)$$

Здесь  $u$ -осевое перемещение точек срединной плоскости,  $w$ -прогиб,  $B_{ij}$  механические параметры, которые по известным формулам [29] выражаются через упругие постоянные материала,  $\varphi_1$ - функция, характеризующая распределение поперечного касательного напряжения  $\tau_{xz}$ ,  $T_x$  и  $N_x$ -тангенциальное и поперечное усилия,  $M_x$ - изгибающий момент пластинки-полосы.

С учетом обозначений (6.1.3) в рамках теории [111] для безразмерных усилий и изгибающего момента получим выражения:

$$\bar{T}_x = H \left[ s \frac{d\bar{u}}{d\bar{x}} - \frac{1}{2} (\alpha_x + m\alpha_y) (\theta^+ + \theta^-) \right] \quad (6.1.4)$$

$$\bar{N}_x = \frac{2}{3} H \bar{\varphi}_1 - \frac{\gamma s H}{12} \left[ s H \left( \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} - \chi \frac{d\bar{\varphi}_1}{d\bar{x}} \right) + (\alpha_x + m\alpha_y) (\theta^+ + \theta^-) \right] \quad (6.1.5)$$

$$\bar{M}_x = -\frac{s H^3}{12} \left[ s \left( \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} - \chi \frac{d\bar{\varphi}_1}{d\bar{x}} \right) + \frac{1}{s H} (\alpha_x + m\alpha_y) (\theta^+ - \theta^-) \right] \quad (6.1.6)$$

$\alpha_x$  и  $\alpha_y$ -коэффициенты теплового расширения материала по направлениям осей  $x$  и  $y$  соответственно.

2. Дифференциальные уравнения плоской задачи и задачи изгиба рассматриваемой пластинки-полосы имеют вид:

а) уравнение плоской задачи-

$$\frac{d}{d\bar{x}} \left( H \frac{d\bar{u}}{d\bar{x}} \right) = \frac{\gamma}{2s} (\alpha_x + m\alpha_y) (\theta^+ + \theta^-) \quad (6.1.7)$$

б) уравнения задачи изгиба-



$$\begin{cases} \frac{d}{d\bar{x}}(H^2\bar{\varphi}_1) = 0 \\ \frac{d}{d\bar{x}}\left(H^2\frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}^2}\right) - \frac{\chi}{s}\frac{d}{d\bar{x}}\left(H^2\frac{d\bar{\varphi}_1}{d\bar{x}}\right) + \frac{8\bar{\varphi}_1}{s^3} + \frac{\gamma}{s^2}(\alpha_x + m\alpha_y)(\theta^+ + \theta^-) = 0 \end{cases} \quad (6.1.8)$$

Решение плоской задачи имеет вид:

$$\bar{u} = c_2 + c_1 \frac{\ln H}{\gamma} + \frac{1}{2\gamma s}(\alpha_x + m\alpha_y)(\theta^+ + \theta^-)(\gamma\bar{x} - \ln H) \quad (6.1.9)$$

Постоянные интегрирования  $c_1$  и  $c_2$  определяются из краевых условий пластинки-полосы.

1. При заземлении обеих кромок эти условия будут:

$$\bar{u}|_{\bar{x}=0} = 0, \quad \bar{u}|_{\bar{x}=1} = 0 \quad (6.1.10)$$

Для постоянных  $c_1$  и  $c_2$  находим:

$$c_1 = -\frac{(\alpha_x + m\alpha_y)(\theta^+ + \theta^-)}{2s \ln(1 + \gamma)} [\gamma - \ln(1 + \gamma)], \quad c_2 = 0 \quad (6.1.11)$$

Подставляя (6.1.11) в (6.1.9) для безразмерного осевого перемещения получим:

$$\bar{u} = \frac{1}{2s}(\alpha_x + m\alpha_y)(\theta^+ + \theta^-) \left[ \bar{x} - \frac{\ln H}{\ln(1 + \gamma)} \right] \quad (6.1.12)$$

С учетом (6.1.12) для безразмерного тангенциального усилия  $\bar{T}_x$  получим:

$$\bar{T}_x = -\frac{\gamma}{2\ln(1 + \gamma)}(\alpha_x + m\alpha_y)(\theta^+ + \theta^-) \quad (6.1.13)$$

Как и следовало ожидать, решение плоской задачи пластинки-полосы не зависит от сдвигового свойства материала (от параметра  $\chi$ ).

Из (6.1.12) и (6.1.13) для пластинки-полосы постоянной толщины ( $\gamma = 0$ ) следует

$$\bar{u} \equiv 0, \quad \bar{T}_x = -\frac{1}{2}(\alpha_x + m\alpha_y)(\theta^+ + \theta^-) \quad (6.1.14)$$

На фиг. (6.1.1), (6.1.2) приведены графики  $\bar{u}$  и  $\bar{T}_x$  при некоторых значениях параметра изменяемости толщины пластинки-полосы  $\gamma$ . Нетрудно заметить, что при  $\gamma > 0$  графики  $\bar{u}$  несимметричны относительно середины ширины.  $\bar{x} = 0,5$

Рассмотрим задачу изгиба.

Решение системы (6.1.8) имеет вид:

$$\bar{\varphi} = \frac{c_3}{H^2} \quad (6.1.15)$$

$$\begin{aligned} \bar{w} = c_6 + c_5 \bar{x} - \frac{c_4}{\gamma^2} \ln H + \frac{c_3}{s^3 \gamma^3 H} (4 - \chi \gamma^2 s^2) - \\ - \frac{1}{s^2 \gamma^2} (\alpha_x + m \alpha_y) (\theta^+ - \theta^-) [(1 + H) \ln H - \gamma \bar{x}] \end{aligned} \quad (6.1.16)$$

Постоянные интегрирования  $c_3 \div c_6$  определяются из условий защемления обеих кромок пластинки-полосы-

$$\bar{w}|_{\bar{x}=0} = 0, \left( s \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} - \chi \bar{\varphi}_1 \right) \Big|_{\substack{\bar{x}=0 \\ \bar{x}=1}} = 0, (u_x = 0) \quad (6.1.17)$$

С учетом (6.1.15) и (6.1.16) условия (6.1.17) будут:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{(4 - \chi \gamma^2 s^2)}{\gamma^2 s^3 (1 + \gamma)} c_3 + \frac{\ln(1 + \gamma)}{\gamma^2} c_4 - c_5 = \\ & = - \frac{(\alpha_x + m \alpha_y) (\theta^+ - \theta^-) [(2 + \gamma) \ln(1 + \gamma) - \gamma]}{\gamma^2 s^2} \\ & \frac{4}{\gamma^2 s^2} \cdot c_3 + \frac{s}{\gamma} \cdot c_4 - s \cdot c_5 = - \frac{1}{\gamma s} (\alpha_x + m \alpha_y) (\theta^+ - \theta^-) \\ & \frac{4}{\gamma^2 s^2 (1 + \gamma)^2} \cdot c_3 + \frac{s}{\gamma (1 + \gamma)} \cdot c_4 - s \cdot c_5 = \\ & = - \frac{(\alpha_x + m \alpha_y) (\theta^+ - \theta^-)}{\gamma s} \left[ \frac{1}{1 + \gamma} + \ln(1 + \gamma) \right] \\ & \frac{4 - \chi \gamma^2 s^2}{\gamma^3 s^3} \cdot c_3 + c_6 = 0 \end{aligned} \right. \quad (6.1.18)$$

После численного решения системы (6.1.18) по найденным значениям постоянных интегрирования  $c_3 \div c_6$  вычисляются значения безразмерного прогиба  $\bar{w}$ , поперечного усилия  $\bar{N}_x$  и изгибающего момента  $\bar{M}_x$ .

На фиг. (6.1.3)-(6.1.5) приведены графики этих величин при следующих значениях параметров задачи

$$\begin{aligned} s = 0.15, \quad \alpha_x = 10^{-5} \frac{1}{\text{град}}, \quad \alpha_y = 2\alpha_x, \quad m = 0.3, \\ \theta^+ = 300 \text{град}, \quad \theta^- = 0, \quad \chi = 0; 5; 10, \quad \gamma = 1 \end{aligned} \quad (6.1.19)$$

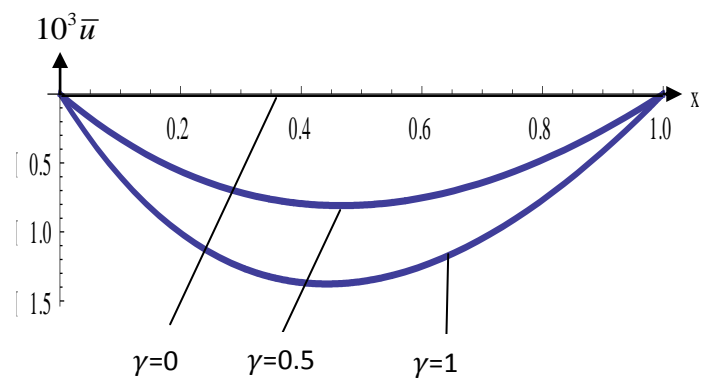


Рис.6.1.1

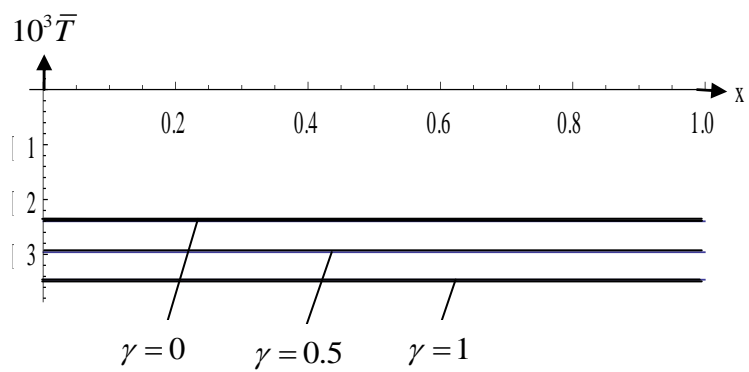


Рис.6.1.2

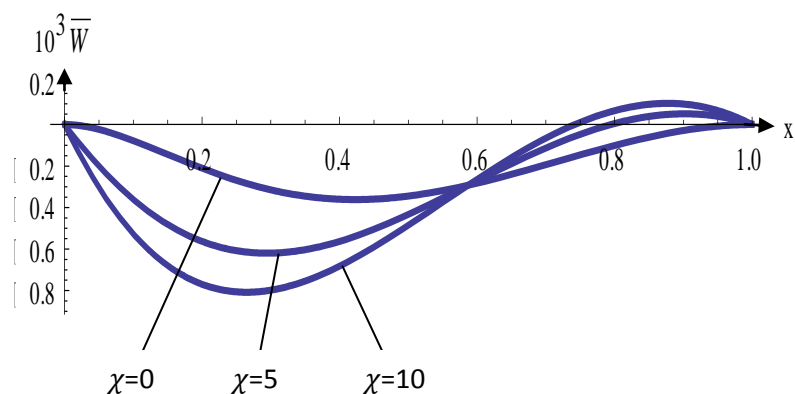


Рис.6.1.3

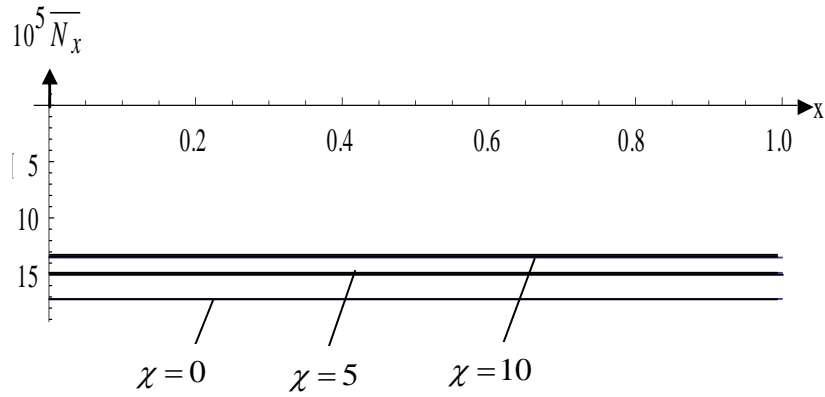


Рис.6.1.4

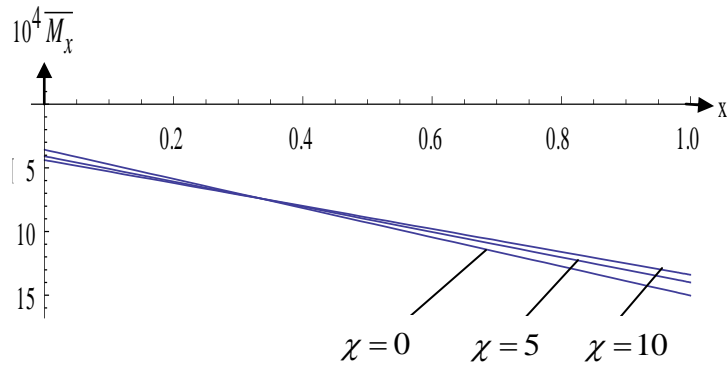


Рис.6.1.5

2. Теперь рассматриваемая задача решим удовлетворив следующие краевые условия:

а) защемление при  $\bar{x} = 0$

$$\bar{w}|_{\bar{x}=0} = 0, \quad \left( s \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} - \chi \bar{\varphi}_1 \right) \Big|_{\bar{x}=0} = 0, \quad (u_x = 0) \quad (6.1.20)$$

б) подвижный шарнир при  $\bar{x} = 1$

$$\bar{T}|_{\bar{x}=1} = 0, \quad \bar{w}|_{\bar{x}=1} = 0, \quad \bar{M}|_{\bar{x}=1} = 0 \quad (6.1.21)$$

Для определения неизвестных коэффициентов  $c_1 \div c_6$  входящих в формулах (6.1.9) и (6.1.16) получим систем алгебраических уравнений. После решений этой системы,

полученные выражения подставив в формулах для  $\bar{u}$ ,  $\bar{w}$ ,  $\bar{T}_x$ ,  $\bar{M}_x$  и  $\bar{N}_x$  вычислим их значения.

**Заключение.** Получены и решены дифференциальные уравнения, описывающие плоскую задачу и задачу изгиба для ортотропной полосы-пластинки линейно-переменной толщины, находящийся в температурном поле, когда принимаются во внимание влияние поперечных сдвигов.

На основе выполненных расчетов исследовано и показана зависимость основных величин (перемещение, усилие, изгибающие моменты) от параметра ( $\gamma$ ), характеризующего переменность пластинки по толщине и от параметра ( $\chi$ ), характеризующего поперечный сдвиг. Приведены соответствующие графики.

Показано, что учет сдвигов приводит к увеличению значения прогиба  $\bar{W}$  и уменьшению поперечного усилия  $\bar{N}_x$ , с увеличением коэффициента ( $\chi$ ) точка максимума прогиба приближается к краю пластинки, где толщина наиболее тонкая.

Установлено, что для пластинки с постоянной толщиной ( $\gamma = 0$ ) горизонтальное перемещение точек срединной поверхности равно нулю. С увеличением параметра ( $\gamma$ ) горизонтальные перемещения отличны от нуля и максимальное значение увеличивается.

Показано также, что имеет место увеличение тангенциального усилия с увеличением параметра ( $\gamma$ ). Установлено слабое изменение изгибающего момента  $\bar{M}_x$  в зависимости от параметра ( $\gamma$ ).

## **§6.2 Задача термоупругости ортотропной пластинки-полосы переменной толщины при наличии упруго защемленной опоры**

Решается задача изгиба термоупругости упруго защемленной по торцу ортотропной пластинки-полосы переменной толщины с учетом поперечного сдвига. Пластинка-полоса находится только под действием температурного воздействия.

Приведен численный пример и на основе выполненных расчетов исследована зависимость основных величин (перемещений, усилий, изгибающих моментов) от параметров, характеризующих поперечный сдвиг и изменяемость пластинки по толщине. Делаются качественные заключения.

Учитывая, что толщина пластинки-полосы, оставаясь симметричной относительно срединной плоскости, изменяется линейно только вдоль координатной

оси  $Ox$  по закону (6.1.1), и на поверхностях пластинки-полосы  $z = +\frac{h}{2}$  и  $z = -\frac{h}{2}$  действует температура соответственно  $\theta^+$  и  $\theta^-$ , а изменение температуры  $\theta$  внутри пластинки-полосы линейно относительно поперечной координаты  $z$  и имеет вид (6.1.2). Введем следующие обозначение, которые приводят к безразмерным величинам:

$$a = nh_0, \quad B = \frac{\beta}{B_{11}}, \quad D = \frac{\alpha}{B_{11}h_0^2}, \quad \left( \frac{D}{B} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow B = \frac{\alpha n^2}{3B_{11}} \right), \quad w = h_0\bar{w},$$

$$x = l\bar{x}, \quad s = \frac{h_0}{l}, \quad h = h_0H, \quad h_1 = \gamma s, \quad H = 1 + \gamma\bar{x}, \quad B_{12} = mB_{11}, \quad \varphi_1 = B_{11}\bar{\varphi}_1, \quad (6.2.1)$$

$$a_{55}B_{11} = \chi, \quad N_x = B_{11}h_0\bar{N}_x, \quad M_x = B_{11}h_0^2\bar{M}_x,$$

2. Для решения задачи изгиба пластинки-полосы на основе [136] и обозначений (6.2.1) получим

$$\begin{cases} \frac{d}{d\bar{x}}(H^2\bar{\varphi}_1) = 0 \\ \frac{d}{d\bar{x}}\left(H^2\frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}^2}\right) - \frac{\chi}{s}\frac{d}{d\bar{x}}\left(H^2\frac{d\bar{\varphi}_1}{d\bar{x}}\right) + \frac{8\bar{\varphi}_1}{s^3} + \frac{\gamma}{s^2}(\alpha_x + m\alpha_y)(\theta^+ + \theta^-) = 0 \end{cases} \quad (6.2.2)$$

Интегрируя первое уравнение системы (6.2.2), для  $\bar{\varphi}_1$  получим

$$\bar{\varphi}_1 = \frac{c_1}{(1 + \gamma\bar{x})^2} \quad (6.2.3)$$

Подставляя (6.2.3) во второе уравнение системы (6.2.2), для безразмерного прогиба имеем

$$\begin{aligned} \bar{w} = c_4 + c_3\bar{x} - \frac{c_2}{\gamma^2} \ln(1 + \gamma\bar{x}) + \frac{c_1}{s^3\gamma^3(1 + \gamma\bar{x})} (4 - \chi\gamma^2s^2) - \\ - \frac{1}{s^2\gamma^2}(\alpha_x + m\alpha_y)(\theta^+ - \theta^-) \left[ (1 + (1 + \gamma\bar{x})) \ln(1 + \gamma\bar{x}) - \gamma\bar{x} \right] \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

С учетом (6.2.3) и (6.2.4) для безразмерной  $\bar{N}_x$  поперечной силы и  $\bar{M}_x$  изгибающего момента получим

$$\bar{N}_x = -\frac{1}{12} s\gamma (s^2c_2 - (\alpha_x + m\alpha_y)(\theta^- - \theta^+)) \quad (6.2.5)$$

$$\bar{M}_x = \frac{-8c_1 + s\gamma(1 + \gamma\bar{x}) \left[ (\alpha_x + m\alpha_y)(\theta^- - \theta^+) - s^2c_2 \right]}{12s\gamma} \quad (6.2.6)$$

Краевые условия упруго заземленного вида при  $x = 0$  описываются уравнениями:

$$w = a \frac{dw}{dx} + BN_x, \quad \frac{dw}{dx} = D(aN_x - M_x) \quad (6.2.7)$$

Шарнирное опирание при  $x = l$

$$w = 0, \quad M_x = 0. \quad (6.2.8)$$

Эти условия с помощью обозначений (6.2.1) принимают вид:

при  $\bar{x} = 0$

$$\bar{w} = ns \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} + \frac{\alpha n^2}{3} \bar{N}_x, \quad \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} = \frac{\alpha}{s} (n\bar{N}_x - \bar{M}_x) \quad (6.2.9)$$

при  $\bar{x} = 1$

$$\bar{w} = 0, \quad \bar{M}_x = 0. \quad (6.2.10)$$

Удовлетворив крайевым условиям (6.2.9) и (6.2.10), с учетом (6.2.4) для определения постоянных интегрирования  $c_1 \div c_4$  получим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot c_1 + a_{12} \cdot c_2 + a_{13} \cdot c_3 + a_{14} \cdot c_4 = b_1, \\ a_{21} \cdot c_1 + a_{22} \cdot c_2 + a_{23} \cdot c_3 + a_{24} \cdot c_4 = b_2, \\ a_{31} \cdot c_1 + a_{32} \cdot c_2 + a_{33} \cdot c_3 + a_{34} \cdot c_4 = b_3, \\ a_{41} \cdot c_1 + a_{42} \cdot c_2 + a_{43} \cdot c_3 + a_{44} \cdot c_4 = b_4, \end{cases} \quad (6.2.11)$$

Здесь  $b_1 \div b_4$  и коэффициенты  $a_{ij}$  определяются по следующим формулам:

$$a_{11} = \frac{-(1+ns\gamma)(-4+s^2\gamma^2\chi)}{s^3\gamma^3}, \quad a_{12} = \frac{ns}{\gamma} + \frac{1}{36}n^2s^3\alpha\gamma, \quad a_{13} = -ns, \quad a_{14} = 1,$$

$$b_1 = -\left(\frac{n\theta t}{s\gamma} + \frac{1}{36}n^2s\alpha\gamma\theta t\right), \quad a_{21} = -\frac{12+2s\alpha\gamma-3s^2\gamma^2\chi}{3s^3\gamma^2}, \quad a_{22} = \frac{1}{12}\left(-s\alpha - \frac{12}{\gamma} + ns^2\alpha\gamma\right),$$

$$a_{23} = 1, \quad a_{24} = 0, \quad b_2 = \frac{(ns^2\alpha\gamma^2 - s\alpha\gamma - 12)\theta t}{-12s^2\gamma}, \quad a_{31} = \frac{4-s^2\gamma^2\chi}{s^3\gamma^3(1+\gamma)}, \quad a_{32} = \frac{\ln(1+\gamma)}{\gamma^2},$$

$$a_{33} = 1, \quad a_{34} = 1, \quad b_3 = \frac{\theta t(-\gamma + (2+\gamma)\ln(1+\gamma))}{s^2\gamma^2}, \quad a_{41} = \frac{-2}{3s\gamma}, \quad a_{42} = -\frac{1}{12}s^2(1+\gamma),$$

$$a_{43} = 0, \quad a_{44} = 0, \quad b_4 = \frac{(12+s\alpha\gamma - ns^2\alpha\gamma^2)\theta t}{12s^2\gamma}.$$

После решения системы (6.2.11) получим выражение для неизвестных переменных  $c_1 \div c_4$ . Подставив найденные выражения в формулы (6.2.4), (6.2.5) и (6.2.6), получим

формулы для определения значения безразмерного прогиба, поперечной силы и изгибающего момента.

На рис. (6.2.1 – 6.2.3) приведены графики соответственно для безразмерного прогиба  $\bar{w}$ , поперечного усилия  $\bar{N}_x$  и изгибающего момента  $\bar{M}_x$  при  $\alpha=1$ .

При вычислении приняты следующие значения параметров:  $m=0.3$ ,  $s=0.15$ ,  $\gamma=1$ ,  $\theta t = (\alpha_x + m\alpha_y)(\theta^+ - \theta^-) = 1$ ,  $\alpha = 0.5, 1, 10$ ,  $\chi = 0, 10, 20, 30$ .

В таблице приведены значения для безразмерного прогиба  $\bar{w}$ , поперечного усилия  $\bar{N}_x$  и изгибающего момента  $\bar{M}_x$ , при  $\gamma=1$

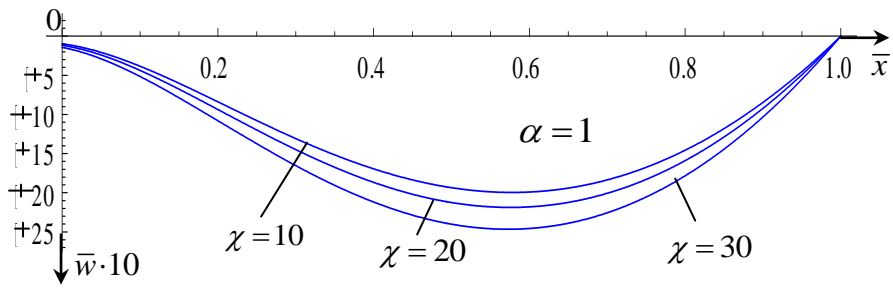
Табл. 6.2.1

-		$\bar{x}$						
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	
$\chi = 0$	$\bar{w}$	0.085	0.345	0.767	1.206	1.569	1.797	
	$\alpha = 1$	$\bar{N}$	0.023	0.023	0.023	0.023	0.023	0.023
		$\bar{M}$	-0.15	-0.14	-0.12	-0.11	-0.09	-0.08
$\chi = 10$	$\bar{w}$	0.098	0.384	0.839	1.308	1.694	1.935	
	$\alpha = 1$	$\bar{N}$	0.027	0.027	0.027	0.027	0.027	0.027
		$\bar{M}$	-0.18	-0.16	-0.14	-0.12	-0.11	-0.09
$\chi = 20$	$\bar{w}$	0.117	0.437	0.937	1.449	1.867	2.125	
	$\alpha = 1$	$\bar{N}$	0.032	0.032	0.032	0.032	0.032	0.032
		$\bar{M}$	-0.21	-0.19	-0.17	-0.15	-0.13	-0.11
$\chi = 30$	$\bar{w}$	0.144	0.515	1.080	1.654	2.118	2.401	
	$\alpha = 1$	$\bar{N}$	0.039	0.039	0.039	0.039	0.039	0.039
		$\bar{M}$	-0.26	-0.23	-0.21	-0.18	-0.16	-0.13
$\chi = 0$	$\bar{w}$	0.524	1.215	1.850	2.353	2.677	2.795	
	$\alpha = 10$	$\bar{N}$	0.014	0.014	0.014	0.014	0.014	0.014
		$\bar{M}$	-0.09	-0.086	-0.076	-0.067	-0.057	-0.048
$\chi = 10$	$\bar{w}$	0.572	1.317	1.990	2.516	2.850	2.966	

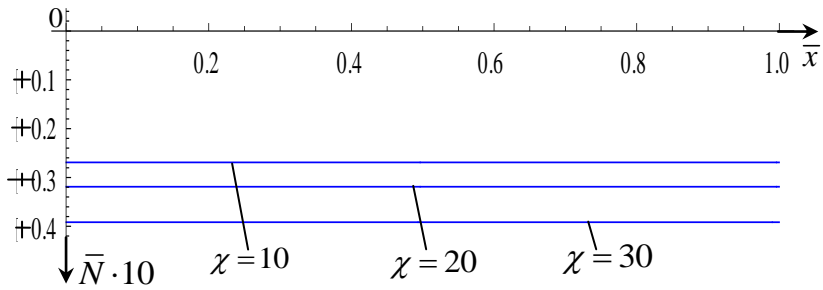


$\alpha = 10$	$\bar{N}$	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016
	$\bar{M}$	-0.10	-0.09	-0.08	-0.07	-0.06	-0.05
$\chi = 20$	$\bar{w}$	0.629	1.439	2.158	2.713	3.058	3.171
$\alpha = 10$	$\bar{N}$	0.017	0.017	0.017	0.017	0.017	0.017
	$\bar{M}$	-0.11	-0.10	-0.09	-0.08	-0.07	-0.06
$\chi = 30$	$\bar{w}$	0.698	1.588	2.363	2.952	3.313	3.422
$\alpha = 10$	$\bar{N}$	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
	$\bar{M}$	-0.13	-0.11	-0.10	-0.09	-0.08	-0.06

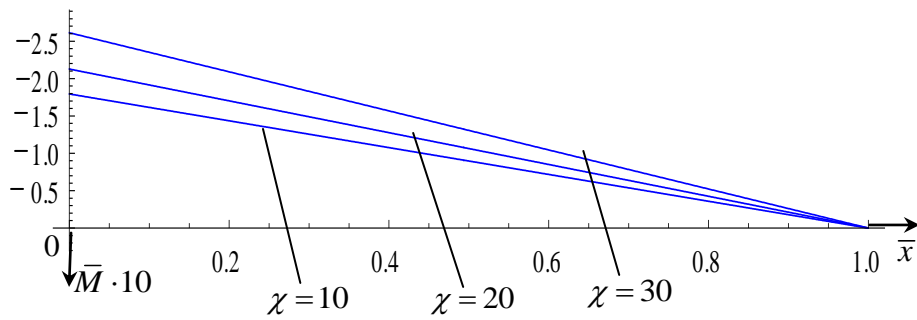
-		$\bar{x}$				
		0.6	0.7	0.8	0.9	1
$\chi = 0$	$\bar{w}$	1.852	1.712	1.360	0.791	0
	$\bar{N}$	0.023	0.023	0.023	0.023	0.023
	$\bar{M}$	-0.06	-0.05	-0.03	-0.02	0
$\alpha = 1$	$\bar{w}$	1.991	1.836	1.457	0.846	0
	$\bar{N}$	0.027	0.027	0.027	0.027	0.027
	$\bar{M}$	-0.07	-0.05	-0.04	-0.02	0
$\chi = 10$	$\bar{w}$	2.180	2.007	1.590	0.922	0
	$\bar{N}$	0.032	0.032	0.032	0.032	0.032
	$\bar{M}$	-0.08	-0.06	-0.04	-0.02	0
$\alpha = 1$	$\bar{w}$	2.456	2.256	1.784	1.033	0
	$\bar{N}$	0.039	0.039	0.039	0.039	0.039
	$\bar{M}$	-0.10	-0.08	-0.05	-0.03	0
$\chi = 30$	$\bar{w}$	2.694	2.364	1.804	1.015	0
	$\bar{N}$	0.014	0.014	0.014	0.014	0.014
	$\bar{M}$	-0.038	-0.028	-0.019	-0.009	0
$\alpha = 10$	$\bar{w}$	2.850	2.495	1.901	1.068	0
	$\bar{N}$	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016
	$\bar{M}$	-0.04	-0.03	-0.02	-0.01	0
$\chi = 20$	$\bar{w}$	3.038	2.653	2.017	1.131	0
	$\bar{N}$	0.017	0.017	0.017	0.017	0.017
	$\bar{M}$	-0.04	-0.03	-0.02	-0.01	0
$\alpha = 10$	$\bar{w}$	3.267	2.846	2.158	1.208	0
	$\bar{N}$	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
	$\bar{M}$	-0.05	-0.04	-0.02	-0.01	0



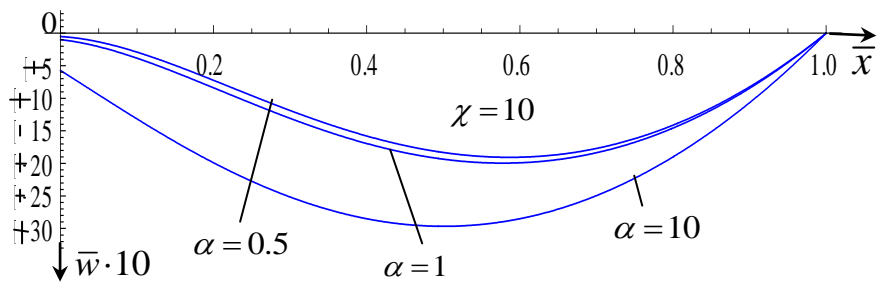
Puc.6.2.1



Puc.6.2.2



Puc.6.2.3



Puc.6.2.4

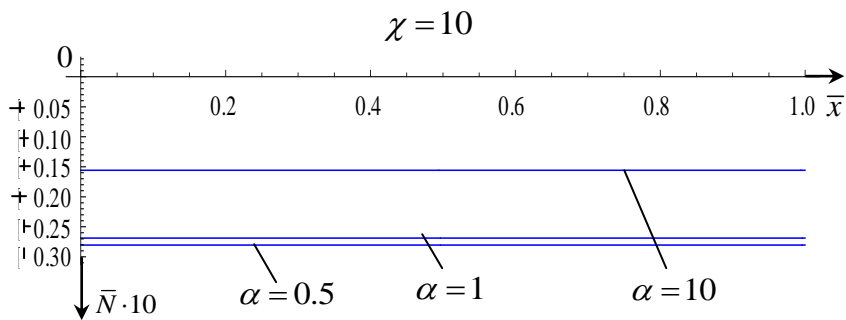


Рис.6.2.5

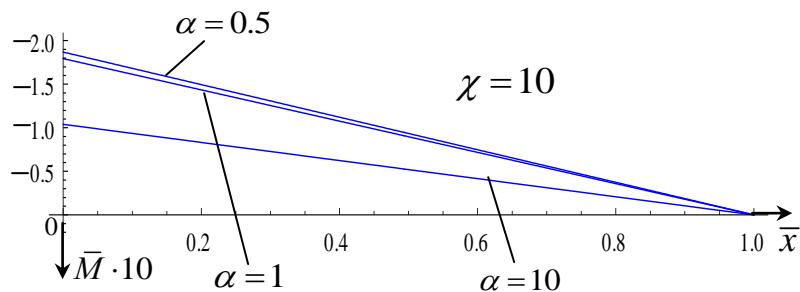


Рис.6.2.6

На рис. (6.2.4 – 6.2.6) приведены графики соответственно для безразмерного прогиба  $\bar{w}$ , поперечного усилия  $\bar{N}_x$  и изгибающего момента  $\bar{M}_x$  при  $\chi = 10$ .

**Заключение.** Полученные результаты приводят к следующим качественным заключениям.

При нагревании нижней поверхности пластинки  $z = \frac{h}{2}$

- 1) С ростом параметра  $\chi$ , характеризующего влияние поперечного сдвига, прогибы, поперечная сила и изгибающий момент по величине возрастают.
- 2) С ростом параметра  $\alpha$ , т.е. с уменьшением жесткости упруго защемленной опоры, прогибы пластинки увеличиваются, а поперечная сила и изгибающий момент по величине уменьшаются. Максимум прогибов перемещается к упруго защемленной опоре.
- 3) Во всех случаях поперечная сила по координате  $\bar{x}$ , т. е. по ширине пластинки-полосы, не меняется, а изгибающий момент изменяется по линейному закону.

## Заключение

В диссертационной работе исследован достаточно обширный класс задач на изгиб и устойчивость тонкостенных элементов (балок, стержней, пластин и оболочек) при неклассической постановке в рамках прикладной теории ортотропных пластин переменной толщины, учитывающей влияние деформаций поперечных сдвигов. Для задач на изгиб и задач устойчивости сформулирован новый вид граничных условий (упруго-защемленная опора) и получены соотношения, описывающие эти условия. Развита соответствующие методы численного анализа, приспособленные для решения поставленных задач.

Решены оптимизационные задачи для балок и круглых пластин переменной толщины как при учете, так и при пренебрежении поперечным сдвигом и собственным весом.

Исследовано НДС двухслойной круглой ортотропной пластинки, состоящей из двух различных цилиндрически ортотропных круглых слоев при учете поперечного сдвига.

Исследована устойчивость ортотропных оболочек и колонн переменной толщины при учете поперечного сдвига и собственного веса.

Исследованы устойчивость стержней переменной толщины и изгиб частично нагруженной круглой ортотропной пластинки постоянной толщины при неклассической постановке.

Исследовано НДС ортотропной пластинки-полосы линейно переменной толщины, находящейся в температурном поле и при учете поперечного сдвига.

В диссертационной работе, в частности получены следующие новые результаты.

- Решена задача изгиба ортотропной круглой пластинки под действием поверхностных касательных нагрузок при учете поперечного сдвига. Показано, что,

принимая параметр  $k = \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}} = 1$ , где  $E_\theta$  и  $E_r$  - модули Юнга материала, из

полученных решений получается решение для изотропной пластинки. Если  $k < 1$  при действии нормальных поверхностных нагрузок, изгибающие моменты в центре пластинки имеют особенность, а при  $k > 1$  они равны нулю. При действии только

касательных поверхностных нагрузок, в центре пластинки моменты равны нулю независимо от значения параметра  $k$ .

- В задаче круглой слоистой пластинки показано, что вблизи края нормальное напряжение становится отрицательным и увеличивается по модулю. Отрицательность означает, что вблизи контура слои пластинки стремятся отрываться друг от друга. Увеличение же модуля означает, что на контуре имеется концентрация напряжения. Эта аномалия является следствием того, что классическая теория пластин не учитывает эффекты ни плоского, ни антиплоского погранслоев, а при учете деформации поперечного сдвига эта аномалия исчезает. Это объясняется тем, что с учетом поперечного сдвига фактически учитывается эффект антиплоского погранслоя.

- Решена задача проектирования равнопрочной ортотропной балки переменной толщины при учете поперечного касательного напряжения. Показано, что существует однопараметрическое бесконечное семейство равнопрочных балок, которые отличаются друг от друга лишь в участке доминирующего изгиба. В участке же доминирующего среза они совпадают и имеют постоянную толщину. Показано, что прогибы могут быть меньше соответствующих классических значений. В качестве оптимальной выбрана та равнопрочная балка, объём которой минимален.

- Решена задача определения оптимальной линейно-переменной толщины ортотропной кольцевой пластинки заданного объёма. Сплошная пластинка получается как частный случай кольцевой пластинки, когда радиус внутреннего контура стремится к нулю. В качестве критерия оптимальности принимается условие наименьшего значения наибольшего прогиба пластинки. Показано, что оптимальная форма пластинок зависит от анизотропии материала, характера нагрузок и от относительного радиуса внутреннего контура пластинки. Показано также, что наибольший прогиб оптимальной пластинки примерно в 1,5 раза меньше, чем у соответствующей пластинки постоянной толщины. Поправки к значению наибольшего прогиба при учете поперечного сдвига как для пластинки постоянной толщины, так и для оптимальной пластинки практически равны и составляют примерно 18%.

- В рамках уточнённой теории решена задача статической устойчивости ортотропной цилиндрической оболочки линейно-переменной толщины. Рассмотрение вопросов оптимальности показало, что среди всех оболочек линейно-переменной толщины одинакового объёма при шарнирном опирании обоих торцов наибольшее критическое значение сжимающих сил имеет оболочка постоянной толщины. Учет поперечного сдвига приводит к уменьшению критической силы.

- По уточненной теории решена задача устойчивости ортотропной пластинки-полосы при учете собственного веса и поперечного сдвига. Рассмотрены варианты граничных условий: «защемление-свободный» и «защемление-шарнир». Проведенный численный анализ показал, что с уменьшением модуля поперечного сдвига материала, критические значения в обоих случаях краевых условий и любого отношения внешней силы и собственного веса уменьшаются. С возрастанием доли собственного веса влияние поперечного сдвига для двух случаев краевых условий увеличивается

- Построена прикладная уточненная модель ортотропных оболочек переменной толщины, способная учитывать влияние деформаций поперечных сдвигов. По предложенной модели решена задача для оболочки с круговой цилиндрической срединной поверхностью, толщина которой изменяется осесимметрично по линейному закону. Численный анализ показал, что в случае постоянной толщины результаты практически совпадают с соответствующими результатами теории С.А. Амбарцумяна. Учет поперечного сдвига приводит к увеличению осевого и кольцевого усилий. Это объясняется тем, что в выражениях соответствующих деформаций в качестве слагаемого участвует прогиб оболочки, который при учете поперечного сдвига увеличивается. Этот эффект для пластин отсутствует, поскольку их плоская задача отделяется от задачи изгиба, в силу чего в выражениях тангенциальных деформаций прогиб пластинки не участвует

- Исследована устойчивость колонны при учете влияний поперечного сдвига и собственного веса. Выведены основные разрешающие уравнения, позволяющие решить как обычную задачу устойчивости колонны заданного переменного сечения, так и оптимизационную задачу, определить то переменное сечение, которому соответствует наибольшая критическая сила.

- Сформулированы условия упруго-защемленной опоры для задачи устойчивости стержня и решен ряд задачи статической устойчивости сжатого стержня при этих условиях. Показано, что когда упруго-защемленная опора стремится к жесткому защемлению, то полученные значения критической силы совпадают с соответствующими известными значениями. Показано также, что если упруго-защемленная опора ослабевает, то критические силы во всех случаях существенно уменьшаются.

- Обобщены и обоснованы условия упруго-защемленной опоры поперечно изгибаемой балки для задачи устойчивости сжатого стержня, когда учитывается уменьшение сжимающей внешней силы из-за трения краевой части стержня, вставленной в упругий массив. Предложен способ учета силы трения, с применением которого решена задача устойчивости изотропного стержня постоянного поперечного сечения, когда его один край упруго защемлен, а другой защемлен абсолютно жестко. Показано, что из-за трения вставленной части стержня с упругим массивом значение внешней (действительной) критической силы больше значения силы, действующей на стержень. С ослаблением упруго-защемленной опоры эти значения уменьшаются, а когда упруго-защемленная опора практически исчезает, превращаясь в свободный конец, они принимают одинаковое значение.

- Решена задача изгиба балки линейно-переменной толщины при действии равномерно распределенной нагрузки. Один конец балки упруго защемлен, а другой шарнирно оперт. Показано, что при ослаблении упругого массива, изгибающий момент на упруго-защемленной опоре, оставаясь отрицательным, по модулю уменьшается, а прогиб увеличивается. Это естественно, так как в результате ослабления опоры уменьшается ее жесткость. Показано также, что учет поперечного сдвига мало влияет на форму графика поперечной силы, и он практически остается прямой линией, а прогибы увеличиваются. Получены уравнения задачи изгиба балки при одновременном действии сжимающих сил и поперечной нагрузки. Считается, что края балки имеют упруго-защемленную опору и учитывается уменьшение сжимающей силы опорой вследствие трения. Переходя к безразмерным величинам решена конкретная задача. Обсужден вопрос устойчивости балки.



- Проведен численный анализ решений задачи изгиба упруго-зашемленной по контуру ортотропной круглой пластинки при учете влияний поперечного сдвига и обжатия, когда на центральную часть пластинки действует равномерно распределённая поперечная нагрузка. Показано, что при учёте обжатия изгибающие моменты  $M_r$  и  $M_\theta$  в центре пластинки равны и отличны от нуля, а если учитывается только влияние поперечного сдвига, эти моменты равны нулю. При учёте обжатия изгибающий момент  $M_\theta$  на границе раздела нагруженной и ненагруженной частей пластинки имеет разрыв первого рода. Из найденного решения получаются известные решения для случаев, когда в центре пластинки действует сосредоточенная сила и когда на всю пластинку действует равномерно распределённая нагрузка.

- Проведен численный и графический анализы для осесимметричной задачи изгиба упруго-зашемленной ортотропной круглой пластинки, опирающейся на упругое основание. Показано, что с возрастанием реакции упругого основания прогибы пластинки уменьшаются. При отсутствии упругого основания наименьшие значения прогиба пластинки получаются при учете только обжатия.

- Получены условия упругого защемления внутреннего контура кольцевой пластинки и решена задача изгиба ортотропной кольцевой пластинки переменной толщины. Показано, что ослабление упруго защемленной опоры существенно не влияет на форму графиков расчетных величин. При существенном ослаблении упруго защемленной опоры прогиб защемленного края существенно увеличивается, а поперечная сила и изгибающий момент уменьшаются.

Получены и решены дифференциальные уравнения, описывающие плоскую задачу и задачу изгиба ортотропной пластинки-полосы линейно переменной толщины, находящийся в температурном поле, при учете влияния поперечного сдвига. Показано, что учет поперечного сдвига приводит к увеличению прогиба и уменьшению поперечной силы. С увеличением коэффициента,

характеризирующего поперечный сдвиг, точка максимума прогиба приближается к тонкому краю пластинки. Указанное изменение напряженно-деформированного состояния является результатом только лишь влияния теплового поля. Если температура повышается, то указанное воздействие увеличивается в прямо пропорциональном порядке.

При решении всех задач применялся метод коллокации и численные расчеты были сделаны относительно безразмерных величины, благодаря чему в каждом случае фактически был решён целый класс задач.

## Литература

1. Аветисян А.С., Алексанян Р.К., Алексанян Д.Р. Устойчивость кольцевой пластинки при заданных равномерных радиальных перемещениях на ее контурах. В сб.: "Проблемы механики деформируемого твердого тела" посв. 90-летию академика НАН Армении С.А. Амбарцумяна. Ереван. 2012. С. 8-14.
2. Аветисян А.С. Казарян К.Б. Волны в "фонон-фотон" кристаллах и импеданс. В сб.: "Проблемы механики деформируемого твердого тела" посв. 90-летию академика НАН Армении С.А. Амбарцумяна. Ереван. 2012. С.15-22.
3. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука. 1997. 414с.
4. Агаловян Л.А. О структуре решения одного класса плоских задач теории упругости анизотропного тела.// Межвуз. сб. Механика. Изд.-во ЕГУ. 1982. Вып.2 с.7-12.
5. Агаловян Л.А. Об одном классе задач о вынужденных колебаниях анизотропных пластин. В сб.: Проблемы механики тонких деформируемых тел. Ереван. Изд-во НАН Армении. 2002. с. 9-19.
6. Агаловян Л.А., Агаловян М.Л. К определению частот и форм собственных колебаний ортотропной полосы.// Докл. НАН РА. 2003. Т. 103. N 4. с. 296-301.
7. Агаловян Л.А., Азатян Г.Л. Собственные колебания ортотропных пластин при наличии вязкого сопротивления.// Известия НАН Армении. Механика. 58, N2, 2005, стр. 48-58.
8. Агаловян Л.А., Багдасарян Ю.М., Хачатрян А.М. К определению напряженно деформированного состояния пластин с анизотропией общего вида// Изв. Нан РА. Механика. 1996. Т.49.N3. с. 10-22.
9. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи пластин с общей анизотропией. В сб.: Механика констр. Из композитных материалов. Новосибирск. Наука. 1984. С. 105-110.

10. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Об асимптотическом решении смешанных трехмерных задач для двухслойных анизотропных пластинок.// ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 2, с. 271-278.
11. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. – Ереван: Изд-во НАН РА “Гитутюн”. – 2005. – 468с.
12. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Асимптотическое решение первой краевой задачи теории упругости о вынужденных колебаниях изотропной полосы. Прикл. мат. и мех. (ПММ). 2008. Т. 72. Вып. 4.с. 633-643.
13. Агаловян Л.А., Гулгазарян Л.Г. О характере пограничного слоя при собственных колебаниях ортотропной полосы.// Доклады НАН, Т.100, №4, 2000.
14. Агаловян Л.А., Гулгазарян Л.Г. О частотах собственных колебаний и пограничном слое для ортотропной пластинки в смешанной краевой задаче.// Изв. НАН, Механика, т. 54, № 2, 2001.
15. Агаловян Л.А., Хачатрян А.М. Асимптотический анализ напряженно-деформированного состояния анизотропной слоистой балки// Изв. АН Арм. ССР . Механика. Т. 39. N2 с. 3-14.
16. Агаловян Л.А., Хачатрян А.М. К решению первой краевой задачи для анизотропной полосы на основе геометрическинелинейной теории упругости// Изв. Северо-Кавказского центра высшей школы. Сер. Ест. ННаук. 2001. N4. С. 16-18.
17. Агаловян М.Л. Об одной задаче на собственные значения, возникающей в сейсмологии.// Доклады НАН Армении. 1996. Т.96. № 2-4. с. 23-24.
18. Агаловян М.Л. К решению задач о вынужденных колебаниях полос при общей анизотропии. В сб.: Механика. Материалы XII конф. мол. уч. Изд. Гитутюн НАН РА. 2002 с. 3-9.
19. Агаловян М.Л. Асимптотика решения пространственной динамической задачи для анизотропных пластин. В сб.: докл. XX Межд. Конф. по теории оболочек и пластин “Механика оболочек и пластин”. Изд. Нижегородского госунивер. Ниж. Новгород. 2002. С. 78-82.
20. Агаловян М.Л., Геворкян Р.С. Асимптотическое решение одного класса неклассических краевых задач термоупругости для пакета из ортотропных

- пластин переменной толщины.// Известия НАН Армении. Механика. 2014. Т. 67. № 1. С. 35-44.
21. Агаян К.Л. Изгиб двух полубесконечных балок на крае упругой полуплоскости плоским штампом.// Изв. НАН Армении, 2010, Т. 63. № 4. С. 3-11.
  22. Агаян К.Л., Манукян Э.А. Изгиб полубесконечной кусочно-однородной балки на границе упругой полуплоскости// Известия НАН Армении. Механика. 2000. Т. 53. № 2. С. 3-9.
  23. Айрапетян В.Ж., Гегамян Г.Б. Задача минимизации наибольшего прогиба анизотропных пластин. Труды II международной конференции 4-8 октября, Дилижан, Армения, 2010, т.1. Ереван, стр. 53-53.
  24. Акопян А.С., Киракосян Р.М. Об устойчивости ортотропных пластин переменной толщины с учетом поперечного сдвига.// Изв.НАН Армении, Механика, 1995, т.48. № 4, С.3-9.
  25. Акопян А.С., Киракосян Р.М. Осесимметричная задача устойчивости ортотропной кольцевой пластинки линейно-переменной толщины с учетом поперечного сдвига.// Изв. НАН Армении, Механика, 1996, т.49, № 2, С.52-61.
  26. Алумяэ Н.А. Одно вариационная формулировка для исследования тонкостенных упругих оболочек в после критической стадии// ПММ. 1950.
  27. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. М.: физматгиз. 1961. 384 с.
  28. Амбарцумян С.А. К теории изгиба анизотропных пластинок.// Изв. АН СССР. ОТН.: 1958. №5. с. 67-77.
  29. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука. 1967, 266с.
  30. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука. 1974. 446с.
  31. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977, 272с.
  32. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В., Казарян К.Б., магнитоупругие поперечные волны на границе раздела проводящих сред. Механика. Ереван: Мезвуз. сб. научн. тр. ЕГУ, Вып. 4, 1986, с. 5-10.
  33. Амбарцумян С.А., Гнуни В.Ц. О вынужденных колебаниях и динамической устойчивости трехслойных ортотропных пластинок.// Изв. ОТН. АН СССР. мех. и маш.. №3. 1961.

34. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В., Саркисян С.В. Магнитоупругие колебания пластин в продольном магнитном поле с учетом деформаций сдвига. -Тр. 12-ой Всесоюзной Конфер. По теории оболочек и пластин. т. 1, Ереван: Изд. Егу,1980.
35. Амбарцумян С.А., Саркисян С.В. Колебание двухслойной пластинки во внешнем магнитном поле.// ДНАН Армении, 1999, том 99, № 3, стр. 212-215.
36. Амбарцумян С.А., Хачатрян А.А. Об устойчивости и колебаниях анизотропных пластинок.// Изв. АН СССР. Мех. и маш. ОТН: 1960. №1.
37. Арман Ж.-Л.П. Приложения теории оптимального управления системами с распределенными параметрами к задачам оптимизации конструкций. М.:Мир, 1977., 142 с.
38. Асанян Д.Д. Напряженно деформированное состояние кусочно- одородного ферромагнитного тела с круглой дискообразной трещиной// Известия НАН Армении. Механика. 2001. Т. 54. № 1. С. 64-74.
39. Багдасарян Г.Е. Устойчивость анизотропной цилиндрической оболочки в сверхзвуковом потоке газа.-Изв. АН Арм. ССР, (ФМ наук), т.15, №6, 1962, с.3-10
40. Багдасарян Г.Е. Устойчивость анизотропной слоистой цилиндрической оболочки в сверхзвуковом потоке газа.// ДАН Арм ССР. Т. XXXIX. №5. 1964.
41. Багдасарян Г.Е. Поверхностные магнитоупругие волны в магнитострикционных средах// Проблемы механики деформируемого твердого тела. Инст. механики НАН Армении. Ереван. 1997. С. 53-72.
42. Багдасарян Г.Е., Гнуни В.Ц. Резонанс в вынужденных нелинейных колебаниях слоистых анизотропных оболочек.// Изв. АН Арм ССР. ФМ науки. 1961. Т. 14. №1.
43. Багдасарян Г.Е., Гнуни В.Ц. Об одной нелинейной задаче устойчивости анизотропной цилиндрической оболочки. Изв. АН Арм ССР ФМ науки. Т. 18. №2. 1965.
44. Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Сагоян Р.О., Марзока П. Влияние сверхзвукового потока на характер амплитудно частотной зависимости нелинейных колебаний гибкой пластинки// Известия НАН Армении. Механика. 2013. Т. 66. N 3. С. 24-37.
45. Багдасарян Р.А., Белубекян М.В., Казарян К.Б. Волны типа Рэлея в полубесконечной замкнутой цилиндрической оболочке// Волновые задачи

- механики/ Под. ред. А.И. Веснинского и В. И. Ерофеева. Нижний Новгород. 1992. С. 87-93.
46. Баничук Н. Введение в оптимизацию конструкций. М.: Наука, 1986.
  47. Барсегян В.Р., Геворкян Г.А. Учет непрерывности напряжений при решении задач изгиба пластин методом конечных элементов// Известия НАН Армении. Механика. 2008. Т. 61. N 1. С. 54-62.
  48. Белубекян М.В. Об условии существования волн Стоунли при скользящем контакте.// Изв. АН АрмССР, Механика. 1990. Т. 43. N 4. С. 52-56.
  49. Белубекян М.В. Поверхностные волны в упругих средах// Проблемы механики деформируемого твердого тела. Институт механики НАН Армении. Ереван. 1997. С. 79-96.
  50. Белубекян В.М., Белубекян М.В. Трехмерная задача поверхностных волн Рэлея // Докл. НАН Армении, 2005, т. 105, № 4, с. 362–369.
  51. Белубекян В.М., Белубекян М.В. О граничных условиях теории пластин // Изв. НАН Армении, 1999, т. 52, № 2, с. 11–21.
  52. Белубекян М.В., Казарян К.Б. К вопросу существования поверхностных сдвиговых волн в неоднородном упругом полупространстве. Изв. НАН Армении, механика. 2000. Т. 53. N 1. С. 6-12.
  53. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. Об устойчивости прямоугольной пластинки обтекаемой сверхзвуковым потоком газа набегающим на ее свободный край.// Изв. НАН Армении, 2012, т.65, № 3, С. 34–40.
  54. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. Об одной задаче устойчивости прямоугольной пластинки с двумя свободными краями в сверхзвуковом потоке газа, набегающим на ее свободный край.// Изв. НАН Армении, 2012, т.65, № 4, С. 55–64.
  55. Белубекян Э.В., Погосян А.Г., Аветисян Г.Р. Оптимизация прямоугольной пластинки кусочно-постоянной толщины, изготовленной из композиционного материала при изгибе // Изв. НАН Армении, механика. 2012. Т. 65. № 1. С. 35-42.
  56. Белубекян Э.В., Погосян А.Г. Проектирование трансверсально-изотропной пластинки ступенчато переменной толщины при изгибе с учетом поперечных сдвигов// Изв. НАН Армении, механика. 2016. Т. 69. № 2. С. 32-39.

57. Болотин В.В. К теории слоистых плит.// Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1963. №3. с. 65-72.
58. Болотин В.В. Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение. 1980. 375 с.
59. Василенко А.Т., Голуба Г.П., Григоренко Я. М. Определение напряженного состояния многослойных ортотропных оболочек переменной жесткости в уточненной постановке. -ПМ, 1976, 12, №2.
60. Васильев В.В. Классическая теория пластин – история и современный анализ //Изв.РАН. Механика твердого тела. – 1998. - №3. – С.46-58.
61. Векуа И.Н. Об одном способе расчета призматических оболочек.// Тр. Тбилисского мат. ин-та им. А.М.Размадзе. 1955. Т. XXI. с.191-259.
62. Векуа И.Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. М.: Наука. 1982. 285 с.
63. Власов В.З. Общая теория оболочек. М.-Л.: Гостехиздат. 1949.
64. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Физматгиз. 1960. 491с.
65. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М. Гос.изд. Ф.-м. Лит.1963. 879 с.
66. Волчков Ю.М., Дергилева Л.А. Сведение трехмерной задачи теории упругости к двумерной на основе аппроксимации напряжений и смещений полиномами Лежандра // ПМТФ. 2007. Т.48, № 3. С. 179-190.
67. Ворович И.И. Некоторые математические вопросы теории пластин и оболочек. В сб. Тр. II Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике. Вып. 3, М.: Наука. 1966. стр. 116-136.
68. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука. 1979. 320с.
69. Галимов К.З. К вариационным методам решения задач нелинейной теории пластин и оболочек. Известия АН СССР, серия физ.-мат. Наук,.1956, вып. 10
70. Галимов К.З. К нелинейной теории тонких оболочек типа Тимошенко// Изв. АН СССР. МТТ. 1976. N4. С. 155-166.
71. Галимов Н.К. К устойчивости трехслойных цилиндрических оболочек. Исслед. По теор. Пластин и оболочек. Изд-во Казанского ун-та, Казань,1965, 157-172.



72. Галиньш А.К. Расчет пластин и оболочек по уточненным теориям”, Исслед. по теор. пластин и оболочек, 6–7, Изд-во Казанского ун-та, Казань, 1970, 23–64.
73. Геворгян Г.З. Об изгибных колебаниях ортотропных полос переменной толщины с учётом поперечных эффектов при условиях упругой заделки. Актуальные проблемы механики сплошной среды. //Труды IV международной конференции 21-26 сентября 2015, Цахкадзор, Армения, с.129-133.
74. Геворкян Г.З., Киракосян Р.М. К геометрически нелинейной уточненной теории ортотропных пластин переменной толщины// Известия НАН Армении. Механика. 2007. Т. 60. N 4. С. 43-52.
75. Геворкян Р.С. Об асимптотическом решении задачи термоупругости для изотропных пластин// Известия НАН Армении. Механика. 2007. Т. 60. N 4. С.53-63.
76. Гнуни В.Ц., Элоян А. В Оптимальный выбор расположения опор в задаче изгиба прямоугольной пластинки// Известия НАН Армении. Механика. 2001. Т. 54. № 3. С. 14-17.
77. Гнуни В.Ц., Элоян А. В Оптимальный выбор расположения опор в задаче изгиба прямоугольной пластинки из композиционного материала// Известия НАН Армении. Механика. 2002. Т. 55. № 2. С. 8-13.
78. Гольденвейзер А.Л. Погранслои и его взаимодействие с внутренним напряженным состоянием упругой тонкой оболочки.// ПММ. 1969. Т.33. Вып.6. с.996-1028.
79. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости.// ПММ. 1963. Т.27. Вып.4. с.593-608.
80. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости// ПММ. 1962. Т.26. Вып.4. с.668-686.
81. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука. 1976. 512 с.
82. Гольденвейзер А.Л., Каплунов Ю.Д., Нольде Е.В. Асимптотический анализ и уточнение теории пластин и оболочек типа Тимошенко-Рейсснера.// Изв. АН СССР. МТТ. 1990. №6. с.124-138.

83. Гольденвейзер А.Л., Каплунов Ю.Д. Динамический погранслои в задачах колебаний оболочек.// Изв.АН СССР.1988.№4.с.152-162.
84. Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука. 1979. 384 с.
85. Горбунов-Пасадов М.Н., Маликова Т.А., Соломин В.И. Расчет конструкций на упругом основании. М.: Стройиздат. 1984. 679с.
86. Григолюк Э.И. Чулков П.П. Нелинейные уравнения тонких упругих слоистых анизотропных пологих оболочек с жестким наполнителем// Изв. АН СССР. Механика. 1965. N5. С. 68-80.
87. Григолюк Э.И. Уравнения трехслойных оболочек с легким наполнителем.// Изв. АН СССР. ОТН. 1957. № 1. с.77-84.
88. Григолюк Э.И. Конечные прогибы трехслойных оболочек с жестким наполнителем. Изв. АН СССР. ОТН. 1958. № 1. с.26-34.
89. Григоренко Я.М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости. Киев. Наукова Думка. 1973. 228с.
90. Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Китайгородский А.Б., Шинкарь А.И. Свободные колебания элементов оболочных конструкций К.: Наук думка. 1986-с. 170.
91. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Теория оболочек переменной жесткости. Киев. Наукова Думка. 1981. 544с.
92. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Понкратова Н.Д. Задачи теории упругости неоднородных тел. Киев. Наукова Думка. 1991. 216с.
93. Григоренко Я.М., Григоренко А.Я., Захариченко Л.И. Исследование влияния геометрических параметров на напряженное состояние цилиндрических оболочек с гофрированным эллиптическим поперечным сечением// Прикл. Мех.- 2009.- 45, № 2, с. 91-98.
94. Гузь А.Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. Киев. Вища школа. 1986. 512с.
95. Гулгазарян Г.Р. О колебаниях полубесконечной ортотропной цилиндрической оболочки открытого профиля // Прикл. механика 2004, т. 40, № 2, с. 100–113.
96. Гулгазарян Г.Р. Собственные колебания тонкой упругой ортотропной консольной цилиндрической оболочки. Прикладная механика, том 44. N 5. 2008.

стр. 68-91.

97. Гулгазарян Л.Г. Асимптотические решения пространственных динамических задач пластин и оболочек. Диссертация на соиск. уч. степ. док. физ. мат. наук, Ереван, 2014г., 258с. .
98. Гулгазарян Л.Г. О характере собственных колебаний ортотропных оболочек при наличии вязкого сопротивления. Межд. научно-технический журнал «Механика машин, механизмов и материалов», Объединенный институт машиностроения НАН Беларуси Минск, 2013. Стр. 20-26.
99. Джилавян С.А. Некоторые задачи термоупругости анизотропных пластин с учетом поперечных деформаций. Дис. На соискание уч. Степени к. ф.-м. н. Ереван, ЕГУ, 1986, 137с.
100. Джилавян С.А., Авакян Т.А. Об одной двумерной задаче теплопроводности для составной пластинки полосы. //Актуальные проблемы прикладной математики информатики и механики. Сб. трудов межд. конф., Воронеж 26-28 ноября, 2012г. часть 1, стр. 3-7.
101. Динамический расчет сооружений. М.: Стройиздат. 1984. 303с.
102. Дургарьян С.М. К термоупругому расчету ортотропной пластинки с учетом поперечных сдвигов //Изв.АН СССР. Отд-ние техн.наук. Механика и машиностроение – 1962. - №6.- С.154-160.
103. Канторович Л. В. Об одном методе приближенного решения дифференциальных уравнений в частных производных // ДАН СССР. 1934. Т.2, №9. С. 532-534.
104. Кильчевский Н.А. Анализ различных методов приведения трехмерных задач теории упругости к двумерным и исследование постановки краевых задач теории оболочек// Тр. II Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Киев. 1962. С. 58-69.
105. Кильчевский Н.А. Основы аналитической механики оболочек. Киев. Изд-во АН УССР. 1963. 354с.
106. Киракосян Р. М. О достаточных условиях наименьшего объема идеально-пластических пластинок.- ДАН Арм. ССР, 1981, т. LXXII, №5, с. 291-295.
107. Киракосян Р.М. Прикладная теория ортотропных пластин переменной толщины, учитывающая влияние деформаций поперечных сдвигов.- Ереван: Гитутюн НАН РА, 2000. – 122 с.

108. Киракосян Р.М. О поправочных коэффициентах, учитывающих влияние распределения касательных напряжений по толщине пластинки.// Доклады НАНА, 2006, том 106, №3, с. 245-251.
109. Киракосян Р.М. Влияние распределения касательных напряжений по толщине пластинки при наличии касательных поверхностных нагрузок.// Доклады НАНА, 2006, том 106, №4, с. 304-311.
110. Киракосян Р.М. К уточненной теории ортотропных пластин при наличии касательных поверхностных нагрузок. //Прикладная механика. 2008, т.44, №4, с.107-119.
111. Киракосян Р.М. Об одной уточненной теории гладких ортотропных оболочек переменной толщины// Докл. НАН Армении. 2011. Т. 111. N 2. стр. 148-156.
112. Киракосян Р.М. К теории ортотропных пластин переменной толщины при учете влияний поперечных сдвигов и изменения температуры.// Проблемы механики деформируемого твердого тела: Сб., посвященный 90-летию акад. НАН Армении С.А. Амбарцумяна, 2012, С. 177-183.
113. Киракосян Р.М. К уточненной теории термоупругости ортотропных оболочек переменной толщины. //ДНАН РА, 2012, том112, №4, стр. 369-376.
114. Киракосян Р.М. Неклассическая задача изгиба ортотропной балки с упруго-защемленной опорой. //ДНАН РА, 2014, том 114, № 2, стр. 101-107.
115. Киракосян Р.М. Неклассическая задача изгиба упруго защемленной ортотропной круглой пластинки. //ДНАН РА, 2016, том 116, № 2, стр. 115-119.
116. Киракосян Р.М. Об одной неклассической задаче изгиба упруго защемленной круглой пластинки. //ДНАН РА, 2015, том115, № 4, стр. 284-289.
117. Киракосян Р.М., Минасян В.Н. К рациональному проектированию упруго-пластической пластинки, работающей в поле действия объемных сил.- В кн.: Теоретична и приложна механика. Трети конгрес. Доклади. Кн. I. София: Изд-во на Българската Академия на Науките, 1977, 458-462.
118. Киракосян Р.М., Степанян С.П. К уточненной теории ортотропных круглых пластин при наличии касательных поверхностных нагрузок.//Труды VI международной конференции, сентябрь, 21-26, Горис-Степанакерт, 2008, с.258-262.

119. Киракосян Р.М., Степанян С.П. Задача ортотропной круглой пластинки под действием поверхностных касательных нагрузок при учете поперечного сдвига //Иzv.НАН РА, Механика, 2009, 62, №2, с.3-9.
120. Киракосян Р.М., Степанян С.П. Проектирование равнопрочной балки с учетом касательного напряжения. //В. сб.: Механика оболочек и пластин . Труды 19-й Международной конференции, Нижний Новгород, 1999 г. с.94-98.
121. Киракосян Р.М., Степанян С.П. К проектированию равнопрочной ортотропной балки минимального объема при учете касательного напряжения.// Изв. АН Арм. ССР, Механика, 2000г., том 53, №3, с. 36-44.
122. Киракосян Р.М., Степанян С.П. Задача устойчивости ортотропной пластинки-полосы при учете собственного веса и поперечного сдвига.// Докл. НАН РА. 2010. Т. 110. N 4. с. 359-366.
123. Киракосян Р.М., Степанян С.П. Об устойчивости ортотропной пластинки-полосы при учете собственного веса и поперечного сдвига, Сб. научн. трудов межд. конф.: Актуальные проблемы механики сплошной среды. Ереван, 2010, том 1, стр. 292-296.
124. Киракосян Р.М., Степанян С.П. Уточненная техническая теория ортотропных оболочек переменной толщины. В сб.: "Проблемы механики деформируемого твердого тела" посв. 90-летию академика НАН Армении С.А. Амбарцумяна. Ереван. 2012. стр. 184-192.
125. Киракосян Р.М., Степанян С.П. Об ортотропной кольцевой пластинке оптимальной линейно-переменной толщины.//Труды VII международной конференции, сентябрь, 19-23, Горис-Степанакерт, 2011г., стр. 215-222.
126. Киракосян Р.М., Степанян С.П. Об устойчивости ортотропной цилиндрической оболочки линейно переменной толщины при учете поперечного сдвига.//Труды III международной конференции "Актуальные проблемы механики сплошной среды". 2012г. Цахкадзор. Армения. 2012г., том 1, С. 299-303.
127. Киракосян Р.М., Степанян С.П. Задача термоупругости ортотропной пластинки-полосы переменной толщины при учете поперечного сдвига// Математические методы и физико механические поля, 2013г, том 56, № 4, стр. 125-131.

128. Киракосян Р.М., Степанян С.П. Напряженно деформированное состояние двухслойной круглой ортотропной пластинки с малой сдвиговой жесткостью // Прикладная механика. 2014, т.50, №5, с.132-144.
129. Киракосян Р.М., Степанян С.П. Прикладная теория устойчивости ортотропной колонны переменного сечения при учете поперечного сдвига и собственного веса//Труды XVII международной конференции современные проблемы механики сплошной среды, Ростов на Дону, октябрь 14-17, 2014г., том 2, с. 35-39
130. Киракосян Р.М., Степанян С.П. Неклассическая задача изгиба ортотропной балки переменной толщины с упруго защемленной опорой //ДНАН Арм. 2014,т.114, №3, стр.205-212.
131. Киракосян Р.М., Степанян С.П. Устойчивости сжатых стержней при наличии упруго защемленной опоры //ДНАН Арм.2014,т.114, №4, стр.309-315.
132. Киракосян Р.М., Степанян С.П. Задача изгиба упруго защемленной ортотропной круглой пластинки, опирающейся на упругое основание //ДНАН Арм., 2016, т.116, №2, стр.120-127.
133. Киракосян Р.М., Степанян С.П. Неклассическая краевая задача упруго защемленной по краю частично нагруженной круглой ортотропной пластинки// Изв.НАН РА, Механика, 2016, том 69, №3, с.59-70.
134. Киракосян Р.М., Степанян С.П. Устойчивость стержня при учете уменьшения сжимающей силы упруго защемленной опорой // Изв. НАН РА, Механика, 2017, том 70, №3, с. 57-66.
135. Коваленко А. Д. Основы термоупругости. Издательство «Наукова Думка», 1970, 309 стр.
136. Корнишин М.С. Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения.М.: Наука 1964. 192 с.
137. Коссович Л.Ю. Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек. Изд-во СГУ. 1986. 176с.
138. Лазарев И.Б. Основы оптимального проектирования конструкций. Задачи и методы. Новосибирск: СГАПС, 1995. 295 с.
139. Лебедев А.В. Устойчивость тонких пластин и оболочек, ослабленных отверстиями. Дис. на соискание уч. степени к.ф.-м.н. Санкт-Петербург, 2010 г.
140. Лейбензон Л.С. Курс теории упругости. М.-Л.: Гостехиздат, 1947.464с.

141. Лейбензон, Л. С. Вариационные методы решения задач теории упругости / Л. С. Лейбензон. М-Л. : ОГИЗ, 1943. - 228 с.
142. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат 1957.463с.
143. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука. 1977. 416 с.
144. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести.-М. Машиностроение, 1975, 399с.
145. Матвеев А.Д. Смешанные постановки задач изгиба однородных упругих пластин и балок// Прикладная механика и техническая физика 2004.Т.45, №4, С.160-167.
146. Мелконян А.П., Хачатрян А.А. Об устойчивости трансверсально-изотропных круглых пластинок. Известия АН Арм.ССР. т. 19, N 2. 1966, стр.31-39
147. Мовсисян Л.А. Об осесимметрично нагруженной анизотропной цилиндрической оболочке. Известия АН Арм.ССР. т. 15, N 2. 1962.
148. Мовсисян Л.А. К устойчивости анизотропных цилиндрических оболочек// Докл. НАН Армении. 2008. Т. 108. N2. стр. 142-149.
149. Мовсисян Л.А. Некоторые неклассические задачи устойчивости для цилиндрических оболочек//Известия НАН Армении. Механика. 2011. Т. 64. N 3. С. 31-38.
150. Мовсисян Л.А, Пештмалджян Д.В. Об уравнениях устойчивости и колебаний анизотропных пластин// Известия АН Арм.ССР. Механика, т. 26, N 6. 1973 с. 18-28.
151. Муштари Х.М., Галимова К.З. Нелинейная теория упругих оболочек. Казань. Таткнигоиздат. 1957. 431с.
152. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек Л.: Судпромгиз. 1962. 431с.
153. Пелех Б.Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев. Наукова Думка. 1973. 248с.
154. Петросян Г.А., Хачатрян А.М. Асимптотическое решение одной смешанной краевой задачи анизотропной пластинки на основе геометрически нелинейной теории упругости// Известия НАН Армении. Механика. 2011. Т. 64. N 1. С. 50-57.
155. Пештмалджян Д.В., Хачатрян А.А. Об изгибе трансверсально-изотропной пластинки с круговым отверстием. Известия АН Арм.ССР. Механика, т. 21, N5-6. 1968 с. 44-50.

156. Подстригач Я. С., Бураяк Я. И., Гачкевич А. Р., Чернявская Л. В. Термоупругость электропроводных тел. К.: изд. «Наукова думка», 1977, 277с.
157. Прочность, устойчивость, колебания. /Справочник под ред. Биргера И.А. и Пановко Я.Г. Т. 3. Изд. Машиностроение, 1964. 564с.
158. Рогалевич В.В. Решение краевых задач теории пластин и оболочек методом коллокации// Прочность и устойчивость оболочек: Труды семинара Казанск. физ.-техн. ин-т, 1980, №13.-С. 5-20.
159. Рогалевич В.В. Коллокационные методы. Сущность. Примеры. Екатеринбург: Изд. АМБ, 2001. 298 с.
160. Саакян А.А. Анализ прогиба балки под действием сосредоточенной силы при различных условиях на концах.// Известия НАН Армении. Механика. 2016. Т. 69. № 2. С. 46-54.
161. Саркисян В.С. Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. Изд-во ЕГУ. 1976. 536 с.
162. Саркисян В.С., Гегамян Б. Теория и приложения оптимального проектирования конструкций. Ереван: Изд-во ЕГУ, 1990.
163. Саркисян С.В. Динамические задачи электропроводящих пластин в сильных магнитных полях. Автореферат диссерт. на соискание уч.ст. доктора физ.мат. наук, Ереван, 1997, 34с.
164. Саркисян С.В., Белубекян М.В.. Об одном уточнении уравнений нелинейных колебаний пластин // Уч. записки ЕГУ, №1, 1992. с. 41-46.
165. Саркисян С.В., Джилаван С.А., Хуршутян Ас.Ж. Оптимизация структуры неоднородного бесконечного слоя при распространении периодических волн //Механика композитных материалов , Рига, 2015, т. 51, № 3,397-406.
166. Саркисян С.В., Уточнение условий на лицевых поверхностях пластинки переменной толщины // Изв. НАН РА, Механика, т.60, №1, 2007 С. 95-99.
167. Саркисян С.О. Асимптотический анализ уравнений, граничных и начальных условий в магнитоупругости тонких пластинок конечных размеров.// Межвуз. сборник. Механика. Изд-во ЕГУ. Механика. 1982. Вып.2. с.126-133.
168. Саркисян С.О. Построение асимптотической двумерной теории магнитоупругости проводящих тонких оболочек, находящихся в неоднородном



- и нестационарном магнитном поле.// Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1989.Т.42.№5.с.25-34.
169. Саркисян С.О. Общая двумерная теория магнитоупругости тонких оболочек. Ереван. Изд-во АН Армении. 1992. 235 с.
170. Саркисян С.О. Микрополярная теория тонких стержней, пластин и оболочек// Известия НАН Армении. Механика. 2005. Т. 58. N 2. С. 84-95.
171. Саркисян С.О. Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких оболочек// Доклады АН России. 2011. Т. 436. N 2. С. 195-198.
172. Саркисян С.О. Построение уточненной классической теории упругих тонких оболочек по микрополярной теории. // ДНАН Арм.2012,т.112, №3, стр.246-255.
173. Сейранян А.П. Оптимальное проектирование балок при ограничениях по прогибам. Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1975, Т.28, №6, с.24-33.
174. Степанян С.П. Проектирование равнопрочных кольцевых пластин из цилиндрически ортотропного упругого материала при учете касател. напряж. //8-ой всероссийский съезд по теоретической и прикладной мехамике, Пермь, 2001, стр.543.
175. Степанян С.П. К задаче двухслойной круглой ортотропной пластинки при учете поперечного сдвига// Сб. научн. трудов межд. конф.: Актуальные проблемы механики сплошной среды. Ереван. 2010г., том 2, стр 175-179.
176. Степанян С.П., Аревшатыан Н.Г. О влиянии характера изменения касательных напряжений по толщине пластинок//Изв. Союза Строителей Армении, 2011г, №10-11, с.55-66.
177. Степанян С.П. Линейная задача статической устойчивости ортотропной оболочки переменной толщины при учете поперечного сдвига //Актуальные проблемы прикладной математики информатики и механики. Сб. трудов межд. конф., Воронеж 26-28 ноября, 2012г. часть 1, стр. 351-355.
178. Степанян С.П. Об одной задаче термоупругости ортотропной пластинки-полосы переменной толщины с учетом поперечного сдвига // Актуальные проблемы прикладной математики информатики и механики, Воронеж 12-14 декабря, 2013г., стр.284-289.
179. Степанян С.П. Неклассическая задача изгиба балки линейно переменной толщины при наличии упруго защемленной опоры. //Труды VIII международной

- конференции Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред Горис-Степанакерт, сентябрь 22-26, 2014г., стр. 408-412.
180. Степанян С.П. Задача термоупругости ортотропной пластинки-полосы переменной толщины при наличии упруго заземленной опоры //ДНАН Арм.2016,т.116, №1, стр.26-33.
  181. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. М.-Л.: Огиз-гостехиздат, 1946. 532с.
  182. Тимошенко С.П, Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки, изд-во физматгиз. Москва. 1963. 636с.
  183. Тимошенко С.П. *Гере Дж.* Механика материалов. – М: Мир, 1976. – 669 с.
  184. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек: Асимптотические методы. М.: Наука. 1995. 320с.
  185. Филин А.П. Элементы теории оболочек. Л.: Стройиздат. 1987. 384с.
  186. Флюгге В. Статика и динамика оболочек. Москва: Государственное издательство литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам,1961.306 с.
  187. Хачатрян А.А. Устойчивость круговой кольцевой пластинки, сжимаемой радиальными силами, приложенными по внешнему контуру. Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1966. Т. 19. N 6. с. 9-16.
  188. Хачатрян А.М. О напряженных состояниях и их определяющих уравнениях цилиндрических оболочек с общей анизотропией// Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1979. Т. 32. N 3. с. 26-41.
  189. Хачатрян А.М. Об уравнениях двухслойной анизотропной цилиндрической оболочки при неполном контакте между слоями// Вестник Нижегородского универ. Серия Механика. 2000. Вып. 2. С. 123-129.
  190. Черных К.Ф. Линейная теория оболочек. Ч.1. 1962. Л.: изд-во ЛГУ. 272с.
  191. Черных К.Ф. Линейная теория оболочек. Ч. 2. 1964. Л.: изд-во ЛГУ. 395с.
  192. Шавлакадзе Н.Н. Изгиб круглой пластинки с упругим включением//Известия НАН Армении. Механика. 2001. Т. 54. № 2. С. 22-31.
  193. Agalovyan L.A. Asymptotic theory of anisotropic plates and shells (Singapore-London World Scientific Publishing) 2015, 375p.

194. Aghalovyan L.A., Gevorgyan R.S., Ghulghazaryan L.G. The asymptotic solutions of 3d dynamic problems for orthotropic cylindrical and toroidal shells. Proceedings of National Academy of Sciences. Mechanics. 2010. T. 63, N 1, pp. 6-22.
195. Aghalovyan L.A., Ghulghazaryan L.G. Asymptotic solutions of non-classical boundary-value problems of the natural vibrations of orthotropic shells. ELSEVIER. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 70 (2006). pp.102-115.
196. Aghalovyan L.A., Ghulghazaryan L.G. Non-classical boundary-value problems of the forced vibrations of orthotropic shells. International sciences journal of Applied Mechanics. SPRINGER. T. 45, N8, 2009. pp. 888-903.
197. Avetisyan A.S. , Belubekyan M.V., Ghazaryan K.B. Stability of a Beam with periodic supports//Proceedings. of NA of SA 2015, V.68, №3, P 16-21.
198. Atarashi T., Minagawa S. Transient coupled-thermoelastic problem of heat conduction in a multilayered composite plate// Int. J. Eng. Sci. – 1992. – 30, No. 10. - P. 1543-1550.
199. Bagdasaryan Gevorg Y., Hasanyan Armanj D., Hasanyan Davresh J. Dynamic bimorph thermo-piezoelectric benders with arbitrary support location. Part i: application to energy harvesting-analytical derivations. Proceedings. of NA of SA 2016, V.69, Issue 1, P 67-76.
200. Belubekyan M., Ghazaryan K., Marzocca P., Gormier C. Localized Magneto elastic Bending Vibration of an Electro conductive Elastic Plate. Journal of Applied Mechanics. USA 2007, vol. 74, p. 1071-1076.
201. Bhullara S. K., Wegner J. L. Some transient thermoelastic plate problems//J. Therm. Stresses. – 2009.-32, No. 8. – P. 768-790.
202. Chernopiskii D.I. Numerical Stress-Strain Analysis of a Nonthin Elastic Plate //Int. Appl.Mech. -2006. – 42. №3. – P.350-356.
203. Danoyan Z., Ghazaryan K., Piliposyan G. Surface gap wave propagation in layered electro-magneto-elastic structures. Waves in Random and Complex Media. UK. Vol. 19, N3, 2009, p. 521-534.
204. Ghazaryan K.B., Piliposyan D.G. Interfacial effects for shear waves in one dimensional periodic piezoelectric structure. Journal of Sound and vibration. Elsevier publ. V. 330. December, 2011, p. 6456-6466.
205. Green A.E. On the linear theory of thin elastic shells// Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1962.

Vol. 266. N1325.

206. Green A.E. Boundary layer equations in the linear theory of thin elastic shells. Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1962. Vol.269. N1339.
207. Grine A., Saury D., Desmons J-Y., Harmand S. Identification models for transient heat transfer on a flat plate// Exper. Therm. and Fluid Sci. – 2007. – 31, No. 7. – P. 701–710.
208. Hakobyan V., Dashtoyan L. On a stress state of orthotropic plane with absolutely rigid inclusion.// Proceedings of NAS RA, Mechanics, 2016, v. 69, Issue 2, pp. 23–31.
209. Hector Gomez, Laura De Lorenzis. The variational collocation method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Vol. 309, 2016, pp. 152–181.
210. Kirakosyan R.M., Stepanyan S.P. On a Model of Elastic Clamped Support of Plate-Strip //International scientific Journal Modeling of Artificial Intelligence, ISSN: 2312-0355, 2015. vol. 6, Is 2, pp. 67-74.
211. Kirakosyan R.M., Stepanyan S.P. Problem of Thermoelasticity for an orthotropic plate-strip of variable thickness with regard for transverse shear //JOURNAL OF MATHEMATICAL SCIENCES, 2015. Vol. 208, No. 4, pp. 417-424, July, Springer.
212. Kirakosyan R.M., Stepanyan S.P. Stress-Strain State of a Two-Layer Circular Orthotropic Plate with Low Shear Stiffness//International Applied Mechanics, 2014, volum 50, Issue 5, pp. 593-604, Springer.
213. Kirakosyan R.M., Stepanyan S.P. Non-classical problem of bend of an orthotropic annular plate of variable thickness with an elastically clamped support// Proceedings of the Yerevan State University, Physical and Mathematical Sciences, 2017, 51, №2, pp.168-176.
214. Lokavarapu Bhaskara Rao, Chellapilla Kameswara Rao. Buckling of circular plate with foundation and elastic edge. International Journal of Mechanics and Materials in Design. 2015, vol. 11, Issue 2, pp. 149–159.
215. Friedrichs K.O. Asymptotic phenomena in mathematical physics. Bull. Amer. Math. Soc. 1955. Vol.61. pp.484-504.

216. Friedrichs K.O. Kirchhoff's Boundary Conditions and the Edge Effect for Elastic Plates. Proc. Symp., Appl. Math. 3. Amer. Math. Soc. N.Y. 1950.
217. Friedrichs K.O. and Dressler R.F. A Boundary-layer Theory for Elastic Plates. Comm. Pure and Appl. Math. 1961. Vol. 14. N 1.
218. Menq-Chenq Chen, Xue-Chenq Pinq, Wan-Hui Liu, Zheng Xie. A novel hybrid finite element analysis of two polyqonal holes in an infinite elastic plate// Engin. Fract. Mech. 2012. Vol. 83. pp. 26-39.
219. Reisser E. On the theory of bending of Elastic plates// J. Math and Phys. 1944. Vol. 23.
220. Reisser E. The Effects of transversal-shear deformation on the bending of elastic plates// J. Appl. Mech. 1945. Vol. 12.
221. Santaoja K. Gradient theory from the thermomechanics point of view //Eng. Fract. Mech. – 2004. -71, No. 4-6. – p. 557-566.
222. Sargsyan S.H. Boundary-value problems of asymmetric theory of elasticity for thin plates// Journal of applied mathematics and Mechanics.-2008-72-p. 77-86.
223. Sargsyan S.H. Mathematical models of micropolar elastic thin shells//Advanced structured materials. Shell-like structures. Non-classical theories and applications. Springer. 2011. Vol. 15. P.91-100.
224. Sargsyan S.H. Mathematical models of micropolar elastic thin plates and their strength and stiffness Characteristics// Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2012. Vol.53. N2. P. 275-282.
225. Sargsyan S.H. The theory of micropolar thin elastic shells// Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2012. Vol. 76. N2. P. 235-249.
226. Sarkisyan S.V. Tridimensional waves at the interface of two elastic media on contact without fraiction. Proceedings of Yerevan state university,Physical and Mathematical Sciences 2016, № 3, p. 79–83.
227. Schanz M., Steinbach O. Boundary element analysis. Mathematical aspects and analysis// Lecture notes in applied and computational mechanics. V. 29. 2007.
228. Selim M. M. Orthotropic elastic medium under the effect of initial and couple stresses // Appl. Math. and Comput. – 2006. – 181. – P. 185–192.

229. Sergey Kanaun. An Efficient Numerical Method for Calculation of Elastic and Thermo- Elastic Fields in Homogeneous Medium with Several Heterogeneous Inclusions. // Engineering Physics and Mathematics, 2011, Vol. 1, Num. 2. pp. 31-43.
230. Stepanyan S.P. The Bending Problem of Hinged Circular Plate on an Elastic Foundation.// Russian Journal of Mathematical Research. Series A, 2016, Vol. (4), Is. 2, pp. 64-70.
231. Sugano Y. Transient thermal stresses in a rectangular plate due to variation of heat-transfer coefficients on upper and lower surfaces // Int. J. Eng. Sci. – 1983. – 21, No. 10. – P. 1203–1214.
232. Sugano Y., Chiba R., Hirose K., Takahashi K. Material design for reduction of thermal stress in a functionally graded material rotating disk // JSME Int. J. Ser. A. – 2004. – 47, No. 2. – P. 189-197.
233. Tokovyy Y., Ma C.-C. Analytical solutions to the 2D elasticity and thermoelasticity problems for inhomogeneous planes and half-planes// Arch. Appl. Mech.- 2009. – 79, No 5. – p. 441-456.