НАЦИОНАЛЬНЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ АРМЕНИИ

ХАЧАТРЯН АМАЯК АЗАТОВИЧ

ВОПРОСЫ РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ГАЗОВ

Диссертация

На соискание ученой степени кандидата

физико-математических наук по специальности

Ա.01.02-“Дифференциальные уравнения и Математическая

Физика”

Научный руководитель доктор

физико-математических наук, профессор

А.Х.Хачатрян

Е Р Е В А Н - 2018

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Как известно многочисленные задачи, возникающие в различных областях математической физики, в частности в кинетической теории газов, описываются нелинейным интегро-дифференциальным уравнением Больцмана. Поэтому изучение вопросов разрешимости кинетического уравнения Больцмана представляет собой большую теоретическую и прикладную важность.

Нелинейное стационарное уравнение Больцмана в одномерном приближении записывается в виде (см [20,29,48]):

$$s_1 \frac{\partial f(x,\vec{s})}{\partial x} = \mathrm{F}\,(f(x,\vec{s})), \tag{0.1}$$

где $\mathrm{F}(f)$-истинный интеграл столкновения, который для молекул, обладающих сферическим потенциалом взаимодействия имеет вид:

$$\mathrm{F}(f(x,\vec{s})) = \iiint\limits_{R^3 R^3 R^3} \left[f(x,\vec{s})\, f(x,\vec{p}) - f(x,\vec{s}\,')\, f(x,\vec{p}\,') \right] W(\vec{s},\vec{p},\vec{s}\,',\vec{p}\,')\, d^3p\, d^3s'\, d^3p' \ . \tag{0.2}$$

Здесь $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$, $-\infty < s_i < +\infty \ \ (i = 1,2,3)$- молекулярная скорость, $f(x,\vec{s})$ - функция распределения частиц по скоростям, функция $W(\vec{s},\vec{p},\vec{s}\,',\vec{p}\,')$- имеет следующий вероятностный смысл (см. [20]): она представляет собой вероятность того, что в результате столкновения молекулы со скоростями $\vec{s}$ и $\vec{p}$, приобретуют скорости $\vec{s}\,'$ и $\vec{p}\,'$ соответственно. Сложная структура истиного интеграла столкновений существенно усложняет изучение и решение уравнения Больцмана. Поэтому при рассмотрении ряда задач кинетической теории газов истинный интеграл столкновений заменяют приближенными моделями. Существуют ряд кинетических моделей уравнения Больцмана (см [25,54,57, 62]), среди которых особое место занимают модель Бхатнагара-Гросса-Крука (БГК) (см [50,20,48,]), модель Шахова (см [58,59,66]) и модифицированная БГК модель (МБГК) (см [63]).

Как уже отмечалось из-за сложной структуры истинного интеграла столкновений его приближенно заменяют

$$\mathrm{F}(f(x,\vec{s})) \approx \upsilon(x)\left[f_0(x,\vec{s}) - f(x,\vec{s}) \right], \tag{0.3}$$

где

$$f_0(x,\vec{s}) = f_0^{loc}(x,\vec{s})(1+\varepsilon\varphi(x,\vec{s})), \tag{0.4}$$

$$f_0^{loc}(x,\vec{s}) = \frac{\rho(x) e^{\frac{-(\vec{s}-\vec{u}(x))^2}{T(x)}}}{(\pi T(x))^{\frac{3}{2}}} \ - \tag{0.5}$$

-локально максвелловская функция распределения, $\rho(x)$, $T(x)$ и $u(x)$ - плотность, температура и скорость газа, $\upsilon(x)$-частота столкновений, которая пропорциональна плотности газа, $\varepsilon \geq 0$-свободный параметр

Случай $\varepsilon = 0$

соответствует БГК модели.

Случай

$$\varphi(x,\vec{s}) = \frac{\alpha s_1 q(x)}{\rho(x)T^2(x)}\left[\frac{(\vec{s}-\vec{u}(x))^2}{T(x)} - \frac{5}{2}\right],\ \varepsilon = 1, \tag{0.6}$$

соответствует модели Шахова. Здесь $q(x)$-проекция вектора потока энергии, $\alpha > 0$-параметр Шахова.

Случай

$$\varphi(x,\vec{s}) = (s_2 - u(x))^2 - \frac{(s_1^2 + s_3^2)}{2}, \quad \varepsilon > 0.$$

соответствует модифицированной БГК модели.

Отметим,что макроскопические параметры $\rho(x)$, $T(x)$, $u(x)$ и $q(x)$ представляют собой моменты искомой функции распределения $f(x,\vec{s})$:

$$\rho(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,\vec{s})d^3s \tag{0.7}$$

$$\vec{u}(x) = \frac{1}{\rho(x)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \vec{s} f(x,\vec{s})d^3s \tag{0.8}$$

$$T(x) = \frac{2}{3\rho(x)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (\vec{s}-\vec{u}(x))^2\ f(x,\vec{s})d^3s \tag{0.9}$$

$$\vec{q}(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \vec{s}(\vec{s}-\vec{u}(x))^2\ f(x,\vec{s})d^3s \tag{0.10}$$

Заметим, что модель Шахова и МБГК модель отличаются от классической БГК модели наличием множителя $\varphi(x,\vec{s})$.

Параметр α , входящий в модель Шахова равен $\alpha = \frac{4}{5}(1-P_r)$,где P_r-число Прандтля (см. напр. [59]). Число Прандтля - это физическая характеристика газа , зависящая только от ее термодинамического состояния. Заметим, что когда $\alpha = 0$ $(P_r = 1)$, модель Шахова переходит в БГК модель.

Каждая из этих моделей имеет свои преимущества и недостатки. Так, например, БГК модель сохраняет все свойства кинетического уравнения Больцмана, связанные со столкновением молекул. Она наиболее проста из моделей, в которых имеют место законы сохранения и Н-теорема. Любая задача кинетической теории газов в рамках БГК модели сводится к нелинейным интегральным уравнениям (или системе таких уравнений). Недостатком БГК модели является отсутствие в ней вектора потока энергии, а также тот факт, что она дает неверное значение числа Прандтля $\left(P_r = 1\right)$, в то время как для одноатомных газов его точное значение $P_r = \frac{2}{3}$. Модель Шахова этого недостатка лишена, в ней число Прандтля принимает свое точное значение. В модели Шахова и в МБГК модели релаксационный член знакопеременен. Н-теорема Больцмана имеет место в БГК модели, а в моделях Шахова и МБГК Н-теорема имеет место, тогда когда газ находится в состоянии близком к локально равновесному. Тем не менее, в настоящее время наиболее широко используемой и популярной остается модель Шахова, поскольку при $P_r = 1$ она переходит в БГК модель, т.е. является ее прямым обобщением.

Как видно из (0.2) нелинейность истинного интеграла столкновений квадратична по функциям распределения f, в то время как в вышеуказанных моделях она более сложная. Тем не менее любая новая модель близкая в том или ином смысле к истинному интегралу столкновений дает возможность выявить новые свойства решений, получаемых в рамках этих моделей.

Существуют многочисленные работы, посвященные вопросам разрешимости линейных задач течения газа как в конечном плоском канале Π_r толщиной $r < +\infty$, так и в полупространстве $\Pi_\infty (r = \infty)$ (см [11,20,21,35,37-39, 48, 49, 51-54, 60, 61.]). В работах [25-28] А.В. Латышева и Ю.А. Юшканова разработана линейная теория аналитического решения уравнения Больцмана в рамках различных моделей. В отличие от линейной теории работы по нелинейных уравнений Больцмана в рам-ках различных моделей в настоящее время мало изучены (см [9,12,41,42,46,47]).

Со второй половины прошлого столетия началось бурное развитие теории переноса излучения и она стала самостоятельным разделом математической физики (см. [1-4, 6,7,10,15-19, 30,31,33,36 и ссылки в них.])

По своей сложности и важности особое место в теории переноса излучения занимают нелинейные задачи. В начале 60-х годов академиком В.А.Амбарцумяном был сформулирован метод самосогласованных оптических глубин, который основан на идее перехода к новому аргументу – к реальной оптической глубине (см.[2,3]). В работах Н.Б.Енгибаряна был найден метод решения нелинейных задач переноса излучения, примыкающий к методу самосогласованных оптических глубин (см.[17,18]). В дальнейшем этот метод был применен для решения различных нелинейных задач переноса при общих законах перераспределения по частотам (см.[7,10,34,40.]). В [4] Л.Г.Арабаджяном был разработан метод решения одного нелинейного интегрального уравнения типа Гаммерштейна. В работах (см. [15,16, 32]) был предложен метод решения линейных задач переноса в слое конечной толщины с приведением их к решению соответствущей задачи в полубесконечной среде.

В последние годы Х.А. Хачатряном был интенсивно разработаны ряд методов по решению нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна и Урысона (см.[44,43, 56,]).

В дальнейшем А.Х. Хачатряном и Х.А. Хачатряном были рассмотрены ряд задач по разрешимости нелинейного уравнения Больцмана в рамках БГК модели (см [41,42,46,47]).

Оказывается, вышеуказанные методы теории нелинейных интегральных уравнений, некоторые методы теории переноса излучения, специальный факторизационный метод могут быть успешно применены в решениях ряда нелинейных задач кинетической теории газов.

Настоящая диссертация посвящена исследованию вопросов разрешимости нелинейного стационарного уравнения Больцмана в одномерном приближении в рамках следующих моделей: БГК, МБГК и модели Шахова. В рамках этих моделей рассматриваются классические задачи течения газа как в плоском слое, ограниченном двумя параллельными пластинками, так и в полупространстве, ограниченном твердой плоской стенкой. Эти задачи сводятся к нелинейным или линейным интегральным уравнениям или системам уравнений. Сочетание специальных факторизационных методов, различных методов теории переноса излучения, методов теории нелинейного анализа с новыми математическими построениями, предлагаются эффективные подходы решения вышеуказанных уравнений. Доказаны теоремы существования (в некоторых случаях и единственности) решения. Удается точно линеаризовать нелинейные задачи сведя их к изучению линейных интегральных уравнений или более простых нелинейных уравнений. Для одного нелинейного интегрального уравнения Урысона доказана теорема о существовании однопараметрического семейства положительных решений. В некоторых случаях удается задачи точно линеаризовать. Наряду с доказательствами теорем в работе приводятся также конструктивные методы построения решений.

Диссертация состоит из введения, двух глав, 9 параграфов, заключения и списка цитируемой литературы, содержащего 67 наименований. Общий объем диссертации 79 страниц.

Первая глава диссертации посвящена вопросам разрешимости некоторых нелинейных граничных задач, возникающих в кинетической теории газов.

В §1 рассматривается следующая граничная задача

$$\pm s_1 \frac{\partial f^{\pm}(x,\vec{s})}{\partial x} + f^{\pm}(x,\vec{s}) = \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}} e^{-(\vec{s}-\vec{u}(x))^2} \left[1+\varepsilon[(s_2-u(x))^2 - \frac{(s_1^2+s_3^2)}{2}] \right], \; x>0, \quad (0.11)$$

где

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s_2 \left[f^{+}(x,\vec{s}) + f^{-}(x,\vec{s}) \right] ds_3 ds_2 ds_1 \quad (0.12)$$

$$\vec{u}(x) = (0,u(x),0) \; s_2, s_3 \in (-\infty,+\infty), \; s_1 \in (0,+\infty)$$

$$\varepsilon \geq 0.$$

с граничными условиями:

$$f^{+}\left(0,\vec{s}\right)=\frac{\rho_{-}}{\left(\pi T_{-}\right)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{\left(\vec{s}-\vec{\omega}\right)^{2}}{T_{-}}},\ f^{-}\left(x,\vec{s}\right)=o\left(e^{\frac{x}{s_{1}}}\right),\ \textit{когда}\, x\to+\infty. \qquad (0.13)$$

$\vec{\omega}=\left(0,\omega,0\right);\rho_{\pm}$ и $T_{\pm}$ - постоянные величины.

Доказана

Лемма1.1. *Нелинейная граничная задача (0.11)-(0.13) эквивалентна следующему неоднородному линейному интегральному уравнению:*

$$u\left(x\right)=g\left(x\right)+\int_{0}^{\infty}K\left(x-t\right)u\left(t\right)dt,\ x\geq 0\ , \qquad (0.14)$$

относительно функции $u\left(x\right)$,

где

$$g\left(x\right)=\frac{\omega\rho_{-}}{\left(\pi T_{-}\right)^{\frac{3}{2}}}\int_{0}^{\infty}e^{-\frac{x}{s_{1}}}e^{-\frac{s^{2}}{T_{-}}}ds_{1},\ x\geq 0\ , \qquad (0.15)$$

$$K\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}e^{-\frac{|x|}{s_{1}}}e^{-s_{1}^{2}}\left(\frac{1}{4}+\frac{\varepsilon}{4}-\frac{\varepsilon s_{1}^{2}}{2}\right)\frac{ds_{1}}{s_{1}}\ ,\ x\in R, \qquad (0.16)$$

а искомые функции $f^{\pm}\left(x,\vec{s}\right)$ *определяются из простых нелинейных соотношений*

(подробно см. Главу 1 . параграф 1, формулы (1.9), (1.10)).

§2 посвящен вопросам решения скалярного интегрального уравнения (0.14).

Нетрудно проверить, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}K(x)dx=1\ . \qquad (0.17)$$

Равенство (0.17) означает, что уравнение (0.14) представляет собой уравнение с необратимым интегральным оператором, ядро которого знакопеременно, что в свою очередь, существенно усложняет вопрос разрешимости указанного уравнения. С применением специальной факторизации удается доказать теоремы существования уравнения (0.14).

Наряду с уравнением (0.14) рассматривается следующее вспомогательное интегральное уравнение Винера-Хопфа

$$F(x)=H(x)+\beta\int_{0}^{\infty}T_{\beta}(x-t)F(t)dt\ ,\ \ H\in L_{1}(0,+\infty)\cap L_{\infty}(0,+\infty), \qquad (0.18)$$

с оператором

$$T_\beta(x)=\int_0^\infty e^{-\frac{|x|}{s}}G_1(s)(1-\beta^2 s^2)ds,\quad G_1(\text{s})=\frac{1}{\sqrt{\pi}s}e^{-s^2}(\frac{1}{4}+\frac{\varepsilon}{4}-\frac{\varepsilon s^2}{2}),\tag{0.19}$$

где $\beta>0$ - свободный параметр.

Имеют место

__Теорема 2.1__ *Для любого $\varepsilon\in[0,2)$ существует $\beta_\varepsilon>0$, такое что оператор $\hat{T}_\beta$ является сжимющим в $L_1(0,\infty)$. Более того, если $\varepsilon\in[2,\infty)$, то оператор $\hat{T}_\beta$ не является сжимющим в $L_1(0,\infty)$.*

__Теорема 2.2.__ *Пусть $\varepsilon\in[0,2)$, а функции g и K задаются посредством формул (0.15) и (0.16). Тогда неоднородное уравнение (0.14) имеет ограниченное решение вида:*

$$u(x)\in\beta\int_0^x F(t)dt+F(x),\quad u(x)\in L_\infty(0,+\infty),$$

где $F(x)$ является решением линейного интегрального уравнения (0.18). Соответствующее однородное уравнение кроме тривиального решения, обладает нетривиальным решением с асимптотикой O(x), когда $x\to\infty$.

§3 посвящен изучению и решению следующего нелинейного интегрального уравнения Урысона

$$\varphi(x)=\int_0^\infty U\left(x,t,\varphi(t)\right)dt, x\in R^+\equiv[0,+\infty)\tag{0.20}$$

относительно искомой измеримой и вещественной функции $\varphi(x)$.

Здесь

$$U\left(x,t,z\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\left(e^{-\frac{|x-t|}{p}}+\varepsilon e^{-\frac{(x+t)}{p}}\right)\frac{e^{-p^2}}{p}z\left(1+Q(\text{z})\right)e^{-p^2(2Q(z)+Q^2(z))}dp\tag{0.21}$$

$$\left(x,t,z\right)\in R^+\times R^+\times R^+,\ \varepsilon\in[0,1),$$

где $Q(z)$- определенная на $[0,+\infty)$ непрерывная вещественозначная функция, удовлетворяющая следующим условиям:

а) существует число $A>0$, такое что $Q(z)\geq 0,\quad z\in\left[A,+\infty\right)$,

$$Q\in L_1(R^+)\cap L_\infty(R^+),\ m_j(Q):=\int_0^\infty z^j Q(z)dz<+\infty,\ j=1,2.\tag{0.22}$$

б) функция $zQ(z)\downarrow$ по z на $\left[A,+\infty\right)$, а функция $z+zQ(z)\uparrow$ по z на $\left[A,+\infty\right)$. (0.23)

Имеет место следующая

<u>Лемма 3.1.</u> *При условиях а)-б) функция* $U(x,t,z)$ *монотонно возрастает по* z на $[A,+\infty)$.

Для формулировки основного результата нам понадобится также следующий новый результат:

Теорема ***<u>3.1.</u>*** *Пусть* $u_0(x)$ *допускает представление*

$$u_0(\tau)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{|\tau|}{p}}\frac{e^{-p^2}}{p}dp, \tau\in R \qquad (0.24)$$

а $0\le\varepsilon<1$. *Тогда уравнение*

$$\Phi(x)=\int_0^\infty\left(u_0(x-t)+\varepsilon u_0(x+t)\right)\Phi(t)dt, x\ge 0 \qquad (0.25)$$

имеет положительное решение с асимптотикой $\Phi(x)=\sqrt{2}x+o(x)$, *при* $x\to+\infty$. *Более того для функции* $\Phi(x)$ *имеет место следующая оценка снизу:*

$$\Phi(x)\ge\frac{\sqrt{2}x}{2}+\frac{1}{2}, x\ge 0. \qquad (0.26)$$

Справедлива следующая

<u>Теорема 3.2.</u> *При условиях а)-б) уравнение (0.20) (с ядром (0.21)) обладает однопараметрическим семейством положительных решений* $\left\{\varphi^\gamma(x)\right\}_{\gamma\in\Pi}$, *имеющих линейный рост в бесконечности. Более того, для* $\forall\gamma\in\Pi$ *справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\varphi^\gamma(x)}{x}=\sqrt{2}\gamma. \qquad (0.27)$$

Множество параметров Π *задается согласно формуле*

$$\Pi:=\left[2\mathrm{A}+2\lambda,+\infty\right), \qquad (0.28)$$

здесь $\lambda\equiv\sup_{x\ge 0}\psi(x)$, $\psi(x)$ - *ограниченное решение следующего неоднородного линейного интегрального уравнения*

$$\psi(x)=g(x)+\int_0^\infty\left(u_0(x-t)+\varepsilon u_0(x+t)\right)\psi(t)dt, x\ge 0, \qquad (0.29)$$

$$g(x)=\int_0^\infty\left(u_1(x-t)+\varepsilon u_1(x+t)\right)G\left(\sqrt{2}At+A\right)dt,\ x\ge 0, \qquad (0.30)$$

$$G(z):=z\left(2Q(z)+Q^2(z)\right), z\ge 0, \qquad (0.31)$$

$$u_1(\tau) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{|\tau|}{p}} p e^{-p^2} dp, \tau \in R. \qquad (0.32)$$

Замечание1. *Ограниченность решения уравнения (0.29) не предполагается, а устанавливается в ходе доказательства теоремы 3.2.*

В конце §3 приведены примеры функций, удовлетворяющих условиям а)-б) теоремы 3.2. В качестве функции $Q(z)$ могут служить следующие функции

$$Q(z) = ze^{-z}, z \in [2, +\infty).$$

$$Q(z) = ze^{-z^2}, z \in [1, +\infty).$$

$$Q(z) = \frac{1}{z^4 + 1}, z \in [1, +\infty).$$

$$Q(z) = \sin \frac{1}{z^4 + 1}, z \in [1, +\infty).$$

В §4 рассматривается следующая нелинейная граничная задача

$$s_1 \frac{\partial f(x, \vec{s})}{\partial x} + \rho(x) f(x, \vec{s}) = \frac{\rho^2(x)}{\pi^{\frac{3}{2}}} e^{-(\vec{s} - \vec{u}(x))^2}, \ x \in [0, d]. \qquad (0.33)$$

Здесь $f(x, \vec{s})$ - искомая функция, $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$, $s_i \in (-\infty, +\infty)$, $(i = 1, 2, 3)$,

$$\rho(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, \vec{s}) ds_1 ds_2 ds_3, \qquad (0.34)$$

$$\vec{u}(x) = (0, u(x), 0); \quad u(x) = \frac{1}{\rho(x)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s_2 f(x, \vec{s}) ds_1 ds_2 ds_3 \ . \qquad (0.35)$$

К уравнению (0.33) присоединяются граничные условия

$$f^+(0, \vec{s}) = \frac{\rho_+ e^{\frac{-(\vec{s} + \vec{\omega})^2}{T_+}}}{(\pi T_+)^{\frac{3}{2}}}; \qquad f^-(d, \vec{s}) = \frac{\rho_- e^{\frac{-(\vec{s} - \vec{\omega})^2}{T_-}}}{(\pi T_-)^{\frac{3}{2}}}; \qquad (0.36)$$

где

$$\vec{\omega} = (0, \omega, 0); \quad \rho_{\pm} = const, T_{\pm} = const; \quad \omega = const \ ,$$

$$f^+(x, \vec{s}) = \begin{cases} f(x, s_1, s_2, s_3), & \text{если } s_1 \ge 0 \ , \\ 0 \ , & \text{если } s_1 < 0 \ , \end{cases}$$

$$f^-(x, \vec{s}) = \begin{cases} f(x, -s_1, s_2, s_3), & \text{если } s_1 \ge 0 \ , \\ 0, & \text{если } s_1 < 0. \end{cases}$$

Имеет место следующая

<u>Теорема 4.1.</u> *Пусть функции* $R_r(\tau)$ *и* $\mathrm{F}_r(\tau)$ *являются решениями следующих линейных несвязанных интегральных уравнений вида:*

$$R_r(\tau) = h_r(\tau) + \int_0^r K(\tau - t) R_r(t)dt, \quad \tau \in [0,r], \tag{0.37}$$

$$\mathrm{F}_r(\tau) = g_r(\tau) + \int_0^r K(\tau - t)\, \mathrm{F}_r(t)dt \ , \quad \tau \in [0,r], \tag{0.38}$$

где

$$K(\tau) = \int_0^\infty e^{-|\tau| p} G(p)dp, \qquad G_2(p) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\frac{1}{p^2}}}{p} \ , \tag{0.39}$$

$$h_r(\tau) = \int_0^\infty \left[\mathrm{e}^{-\tau p} G_+(p) + e^{-(r-\tau)p} G_-(p)dp \right], \tag{0.40}$$

$$g_r(\tau) = \int_0^\infty \omega \left[e^{-(r-\tau)p} G_-(p) - e^{-\tau p} G_+(p) \right] dp, \quad \tau \in [0,\mathrm{r}], \tag{0.41}$$

$$G_\pm(p) = \frac{\rho_\pm}{\sqrt{\pi T_\pm} p^2} e^{-\frac{1}{p^2 T_\pm}} \ . \tag{0.42}$$

Тогда решение нелинейной граничной задачи (0.33)-(0.36) выражается через функции $R_r(\tau)$ *и* $\mathrm{F}_r(\tau)$ *согласно следующим формулам*

$$\rho(\mathrm{x}) = R_r(\tau(\mathrm{x})), \quad u(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{F}_r(\tau(\mathrm{x}))}{R_r(\tau(\mathrm{x}))} \ ,$$

где $\tau(\mathrm{x})$ *является обратной функцией функции* $x(\tau) = \int_0^\tau \frac{d\tau'}{R_r(\tau')}$.

Кинетическая толщина r определяется согласно формуле $r = x^{-1}(d)$,

где x^{-1} *является обратной к функции* $x(r) = \int_0^r \frac{d\tau'}{R_r(\tau')}$.

Замечание2. *Существование и единственность непрерывного решения уравнения (27) (аналогично (28)) установливается в ходе доказательства теоремы 4.1.* ***Замечание3.*** *Существование обратной к функции* $x(\tau)$ *дополнительно устанавливается в ходе доказательства теоремы 4.1.*

В конце §4 в качестве приложения на простейшем примере продемонстрирован подход для определения кинетической толщины слоя и приведены некоторые результаты численных расчетов.

Вторая глава диссертации посвящена вопросам разрешимости нелинейного уравнения Больцмана в рамках модели Шахова, для классической задачи течения газа в плоском слое , ограниченном двумя бесконечными параллельными пластин-ками.

В § 5 в ходе вывода основных интегральных уравнений удается частично упростить нелинейность рассматриваемой задачи путем перехода к новому аргументу. При этом первоначальная граничная задача упрощается, но остается существенно нелинейной. Используя специфичность полученной нелинейной системы и исходя из некоторых физических соображений предлагается эффективный метод приближенного решения полученной нелинейной системы сведением ее к следующей системе линейных интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \varphi(\tau) &= h_1(\tau) + \int_0^r K_{11}(\tau - t)\varphi(t)dt + \int_0^r K_{12}(\tau - t)\psi(t)dt, \\ \psi(\tau) &= h_2(\tau) + \int_0^r K_{21}(\tau - t)\varphi(t)dt + \int_0^r K_{22}(\tau - t)\psi(t)dt, \quad \tau \in [0, r], \end{aligned} \tag{0.43}$$

где

$$K_{ij}(\tau) = \int_0^\infty e^{-\frac{\tau}{s}} G_{ij}(s)ds, \ i = 1, 2, \quad \tau \in [-r, r] \tag{0.44}$$

$$G_{11}(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi} s} e^{-s^2}, \ G_{12}(s) = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi} s} e^{-s^2} \left(s^2 - \frac{3}{2} \right), \tag{0.45}$$

$$G_{21}(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-s^2} (s^2 + 1), \ G_{22}(s) = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \left(s^5 - \frac{s^3}{2} - \frac{s}{2} \right), \tag{0.46}$$

$$h_i(\tau) = \int_0^\infty \left[e^{-\frac{r}{s}} G_+^{(i)}(s) + e^{-\frac{(r-\tau)}{s}} G_-^{(i)}(s) \right] ds, \ i = 1, 2, \tag*{\textit{(0.47)}}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{G}_\pm^{(1)}(\mathrm{s}) &= \frac{\rho_\pm}{\sqrt{\pi \mathrm{T}_\pm}} \mathrm{e}^{-\frac{|\bar{\mathrm{s}}|^2}{\mathrm{T}_\pm}} \\ \mathrm{G}_\pm^{(2)}(\mathrm{s}) &= \frac{\rho_\pm \sqrt{\mathrm{T}_\pm}}{\sqrt{\pi}} \mathrm{s} \mathrm{e}^{-\frac{|\bar{\mathrm{s}}|^2}{\mathrm{T}_\pm}} \left(\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{T}_\pm} + 1 + \frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{T}_\pm} \right) \end{aligned} \tag{0.48}$$

и нелинейному скалярному интегральному уравнению типа Урысона

$$\varphi(\tau)\chi(\tau) = h(\tau) + \int_0^r W_5(\tau, t, \chi(t))\varphi(t)dt \tag{0.49}$$

относительно искомой функции $\chi(\tau)$,

где

$$h(\tau)=\frac{2}{3}\frac{\alpha q_0}{\sqrt{\pi}}+\int_0^{\infty}\left[e^{-\frac{\tau}{s}}G_+(s)+e^{-\frac{|r-\tau|}{s}}G_-(s)\right]ds, \tag{0.50}$$

$$G_{\pm}(s)=\frac{2}{3\sqrt{\pi}}\rho_{\pm}\sqrt{T_{\pm}}e^{-\frac{s^2}{T_{\pm}}}\left(\frac{s^2}{T_{\pm}}+1\right)e^{-s^2}-\frac{2\alpha_0 q_0}{3\sqrt{\pi}}\left(s^5-\frac{s^3}{2}-\frac{s}{2}\right)e^{-s^2}, \tag{0.51}$$

$$W_5(\tau,t,\chi)=\frac{2}{3}\frac{\sqrt{\chi}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-\frac{|\tau-t|}{s}}e^{-\frac{s^2}{\chi}}\left(\frac{s^2}{\chi}+1\right)\frac{ds}{s}. \tag{0.52}$$

Здесь $\varphi(\tau)$- заданная непрерывная функция на $[0,r]$, удовлетворяющая системе уравнений (0.43).

§6 посвящен изучению и решению системы (0.43).

Пусть E - одно из следующих банаховых пространств: $L_p(0,r),\ p\geq 1,\ M[0,r].\ E^2=E\times E$ - пространство двумерных вектор - столбцов с элементами из E.

Доказывается следующая

<u>Теорема 6.1.</u> *Пусть ядра* $K_{ij}(\tau),\ (i,j=0,1,2)$ и $h_i(\tau)\ (i=1,2)$ *системы (0.43) задаются согласно (0.44)-(0.48). Тогда система уравнений (0.43) имеет единственное решение в каждом из пространств* $E^2[0,r]$.

§7 посвящен вопросам разрешимости нелинейного интегрального уравнения (0.49) относительно температуры $\chi(\tau)$.

Доказана следующая

<u>Теорема 7.1.</u> *Пусть* $\varphi(\tau)$ *- заданная непрерывная на* $[0,r]$ вещественная *функция, удовлетворяющая системе (0.43). Тогда нелинейное интегральное уравнение (0.49) имеет положительное решение. Имеют место оценки*

$$\int_0^r \chi(t)\Gamma(t,\chi(t))d\tau\leq\frac{C_r}{m}; \tag{0.53}$$

$$\chi(t)\geq\frac{h(\tau)}{M}, \tag{0.54}$$

где
$$0<C_r=\int_0^r h(\tau)d\tau$$

$$m=\min_{t\in[0,r]}\varphi(t),\ M=\max_{t\in[0,r]}\varphi(t). \tag{0.55}$$

$$\Gamma(t,z)=\int_0^r W_5(\tau,t,z)d\tau=\frac{2}{3\sqrt{\pi z}}\int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{z}}\left(\frac{s^2}{z}+1\right)\left[e^{-\frac{t}{s}}+e^{-\frac{(r-t)}{s}}\right]ds\ . \qquad (0.56)$$

§8 посвящен вопросу линеаризации первоначальной нелинейной системы. В результате линеаризации исходной системы получается линейная система интегральных уравнений относительно поправок искомых функций. Приводятся результаты некоторых численных расчетов. Найден температурный скачок как в линейном, так и в нелинейном случаях. Осуществляется сравнительный анализ между моделями БГК и Шахова.

Относительная ошибка в линейном и нелинейном случаях в рамках модели Шахова составляет незначительный процент (2% - 3 %). Последний факт дает основание на эвристическом уровне утверждать, что предложенный нами подход к решению исходной нелинейной системы близок к точному решению.

В **§9** рассматривается следующие нелинейные интегро-дифференциальные уравнения

$$\pm s_1\frac{\partial f^{\pm}\left(x,\vec{s}_1\right)}{\partial x}+f^{\pm}\left(x,\vec{s}\right)=f_0\left(x,\vec{s}\right)\left(1+\phi\left(x,\vec{s}\right)\right),\ x>0, \qquad (0.57)$$

где

$$f_0\left(x,\vec{s}\right)=\frac{\rho_0 e^{-\left(\vec{s}-\vec{u}(x)\right)_2}}{\pi^{\frac{3}{2}}}, \qquad (0.58)$$

$$\phi\left(x,\vec{s}\right)=\frac{\alpha q_0 s_1}{\rho_0}\left[\left(\vec{s}-\vec{u}(x)\right)^2-\frac{5}{2}\right], \qquad (0.59)$$

$$\vec{s}=\left(s_1,s_2,s_3\right),\ s_1\in\left(0,+\infty\right),\ s_2,s_3\in\left(-\infty,+\infty\right),\ \vec{u}(x)=\left(0,u(x),0\right),$$

$$u(x)=\frac{1}{\rho_0}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}s_2\left[f^{+}\left(x,\vec{s}\right)+f^{-}\left(x,\vec{s}\right)\right]ds_3ds_2ds_1 \qquad (0.60)$$

с граничными условиями

$$f^{+}\left(0,\vec{s}\right)=\frac{\rho_+ e^{-\left(\frac{\vec{s}+\vec{\omega}}{T_+}\right)_2}}{\left(\pi T_+\right)^{\frac{3}{2}}},\ \ f^{-}\left(r,\vec{s}\right)=\frac{\rho_- e^{-\left(\frac{\vec{s}-\vec{\omega}}{T_-}\right)}}{\left(\pi T_-\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad (0.61)$$

$$\vec{\omega}=\left(0,\omega,0\right),\ \omega=const,\ \ \rho_{\pm}=const,\ T_{\pm}=const.$$

Уравнения (0.57) выводятся из нелинейного стационарного уравнения Больцмана в рамках модели Шахова в предположении постоянства температуры, плотности и проекции вектора потока энергии. В отличие от §5 здесь предполагается, что пластинки движутся относительно друг друга со скоростью $\vec{\omega}$.

Справедлива

Теорема 9.1. *Нелинейная граничная задача (0.57)-(0.61) эквивалентна линейному интегральному уравнению*

$$u(x) = g(x) + \int_0^r K(x-t)u(t)dt. \qquad (0.62)$$

Здесь

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{|x|}{s}} e^{-s^2}\left[\frac{1}{s} + \frac{\alpha q_0}{\rho_0}\left(s^2 - \frac{3}{2}\right)\right]ds \quad , \qquad (0.63)$$

$$g(x) = g_-(x) - g_+(x),$$
$$g_-(x) = \omega\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{(r-x)}{s}} e^{-\frac{s^2}{T_-}}\rho_-}{\sqrt{\pi T_-}}ds, \qquad (0.64)$$

$$g_+(x) = \omega\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{x}{s}} e^{-\frac{s^2}{T_+}}\rho_+}{\sqrt{\pi T_+}}ds. \qquad (0.65)$$

Более того, если дополнительно выполняется условие $\frac{\alpha q_0}{\rho_0} < \sqrt{2}$,

то уравнение (0.62) , на отрезке $[0,r]$, *имеет непрерывное, единственное решение вида*

$$u(x) = u_-(x) - u_+(x), \qquad (0.66)$$

где $u_+(x)$ *и* $u_-(x)$ *являются неотрицательными решениями уравнений*

$$u_\pm(x) = g_\pm(x) + \int_0^r K(x-t)u_\pm(t)dt. \qquad (0.67)$$

Замечание 5: *Заметим, что, когда пластинки неподвижны* $(\vec{\omega} = 0)$, *то линейное уравнение (0.62), как и следовало ожидать, обладает только тривиальным решением.*

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [63-67] автора.

Выражаю искреннюю благодарность своему научному руководителю доктору физ.мат наук , профессору А.Х. Хачатряну за постановку задач и полезные замечания. Считаю своим приятным долгом выразить глубокую благодарность доктору физ.мат наук Х.А.Хачатряну за постоянное внимание и полезные обсуждения при подготовке настоящей диссертации.

ГЛАВА 1

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ, ВОЗНИКАЮЩИХ В КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ГАЗОВ

Первая глава диссертации посвящена вопросам изучения и решения некоторых нелинейных задач, описывающих течение газа в полупространстве или в слое конечной толщины.

В §1 и §2 стационарное уравнение Больцмана в одномерном приближении в рамках модифицированной БГК (Бхатнагар-Гросс-Крук) модели применено к задаче течения газа в полупространстве, ограниченном плоской твердой стенкой. Задача точно линеаризуется и сводится к линейному интегральному уравнению с необратимым интегральным оператором со знакопеременным ядром. С применением специальных факторизационных методов доказывается существование решения в пространстве ограниченных функций.

§3 посвящен вопросу разрешимости одного нелинейного интегрального уравнения типа Урысона. Указанное уравнение кроме самостоятельного математического интереса, имеет непосредственное применение в физической кинетике. Доказана теорема существования однопараметрического семейства положительных решений в пространстве функций, имеющих линейный рост в бесконечности. Для каждого представителя из этого семейства найдена точная асимптотическая формула в бесконечности. Получены двусторонние оценки решения и предложен конструктивный способ построения решения. Приведены примеры функций, описывающих нелинейность и удовлетворяющих условиям теоремы.

В §4 рассмотрена одна нелинейная граничная задача, имеющая применение в кинетической теории газов. Она описывает течение газа в плоском слое конечной толщины, состоящем из двух параллельных бесконечных пластинок. Применяя известный в теории переноса излучения метод самосогласованных оптических глубин (СОГ) Амбарцумяна, удается точно линеаризовать задачу и свести ее к отдельным скалярным линейным интегральным уравнениям со сжимающим оператором. Определена кинетическая толщина слоя. В качестве приложения на простейшем примере определена кинетическая толщина слоя в зависимости от геометрической толщины.

§1. О ТОЧНОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОДЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА

Пусть полупространство $x>0$, заполненное газом, ограничено плоской твердой стенкой: плоскостью $x=0$. Газ течет со среднемассовой скоростью $\vec{u}(x)=(0,u(x),0)$ вдоль оси OY. Стенка движется с постоянной скоростью $\vec{\omega}=(0,-\omega,0)$ по отрицательному направлению OY. Обозначим через $f(x,\vec{s})$ искомую функцию распределения частиц по скоростям $\vec{s}=(s_1,s_2,s_3)$, $s_k\in(-\infty,+\infty),(\mathrm{k}=1,2,3)$. В силу предполагаемой плоской геометрии функция распределения частиц f не зависит от y и z. Стационарное нелинейное уравнение Больцмана в рамках модифициораванной БГК модели при постоянной частоте столкновения в одномерном приблежении записывается в виде (см [63]).

$$s_1\frac{\partial f(x,\vec{s})}{\partial x}+f(x,\vec{s})=f_0^{loc}(x,\vec{s})\big(1+\varepsilon\varphi(x,\vec{s})\big), \tag{1.1}$$

где $\varepsilon\geq 0$,

$$f_0^{loc}(x,\vec{s})=\frac{\rho}{(\pi T)^{\frac{3}{2}}}e^{\frac{-(\vec{s}-\vec{u}(x))^2}{T}} \tag{1.2}$$

-локально-максвелловская функция распределения, ρ и T - плотность и температура газа соответственно.

$$\varphi(x,\vec{s})=(s_2-u(x))^2-\frac{(s_1^2+s_3^2)}{2}. \tag{1.3}$$

Среднемассовая скорость газа $\vec{u}(x)$ выражается через функцию распределения посредством:

$$\rho u(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}s_2 f(x,\vec{s})\,d^3s\,. \tag{1.4}$$

Решение уравнения (1.1) ищем в классе функций $f(x,\vec{s})$, определенные на множестве $R^1\times R^3$, имеющие ограниченные производные по x, такие что интеграл (1.4) равномерно сходится

Ограничимся рассмотрением простого случая, когда температура и плотность газа являются заданным и постоянным. Для простоты примем $\rho=T\equiv 1$.

Заметим, что новая модель отличается от БГК модели наличием множителя $\varphi(x,\vec{s})$, в которой нелинейность по f квадратична. БГК модель (когда $\varepsilon=0$) обладает основными свойствами истинного интеграла столкновений. Любая задача в рамках этой модели сводится к нелинейным интегральным уравнениям (или системе уравнений). Однако, как известно, нелинейность истинного интеграла столкновений квадратична по функции распределения $f(x,\vec{s})$,(см.(0.2)), в то время как в БГК модели она более сложна и содержит квадрат по f в экспоненте (см.(1.2),(1.4))). В модифицированной модели прибавляется еще квадратичная нелинейность, обусловленная множителем $\varphi(x,\vec{s})$(см.(1.3),(1.4))).

Введем следующие функции распределения частиц по скоростям :

$$f^{+}(x,\vec{s}) = \begin{cases} f(x,s_1,s_2,s_3), & \text{если } s_1 \geq 0 \ , \\ 0 \ , & \text{если } s_1 < 0 \ , \end{cases} \tag{1.5}$$

$$f^{-}(x,\vec{s}) = \begin{cases} f(x,-s_1,s_2,s_3), & \text{если } s_1 \geq 0 \ , \\ 0, & \text{если } s_1 < 0. \end{cases} \tag{1.6}$$

Функции $f^{+}(x,\vec{s})$ и $f^{-}(x,\vec{s})$ представляют собой функции распределения частиц, летящих к стенке $(s_1 < 0)$ и отлетающих $(s_1 > 0)$ от нее соответственно.

Перепишем уравнение (1.1) в виде:

$$\pm s_1 \frac{\partial f^{\pm}(x,\vec{s})}{\partial x} + f^{\pm}(x,\vec{s}) = \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}} e^{-(\vec{s}-\vec{u}(x))^2} \left(1+\varepsilon\varphi(x,\vec{s})\right). \tag{1.7}$$

К уравнениям (1.7) присоединяются граничные условия на стенке и в бесконечности:

$$f^{+}(0,\vec{s}) = \frac{\rho_{+}}{(\pi T_{+})^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(\vec{s}-\vec{\omega})^2}{T_{+}}} \ , \ f^{-}(x,\vec{s}) = o\left(e^{\frac{x}{s_1}}\right), \ \textit{когда}\, x \to +\infty. \tag{1.8}$$

ρ_{+} и T_{+} - плотность и температура частиц, отраженных от стенки.

Из (1.7) с учетом граничных условий (1.8) имеем

$$f^{+}(x,\vec{s}) = f^{+}(0,\vec{s}) e^{-\frac{x}{s_1}} + \int_0^x \frac{e^{-\frac{(x-t)}{s_1}}}{(\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{-(\vec{s}-\vec{u}(t))^2} \left[1+\varepsilon\varphi(t,\vec{s})\right] \frac{dt}{s_1} \tag{1.9}$$

$$f^{-}(x,\vec{s}) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-\frac{(t-x)}{s_1}}}{(\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{-(\vec{s}-\vec{u}(t))^2} \left[1+\varepsilon\varphi(t,\vec{s})\right] \frac{dt}{s_1} \quad . \tag{1.10}$$

Подставляя (1.9), (1.10) в (1.4), учитывая

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 5\cdot 3\cdot 1}{2^n} \sqrt{\pi} \tag{1.11}$$

и произведя интегрирование, получим следующее линейное интегральное уравнение:

$$u(x)=g(x)+\int_0^\infty K(x-t)u(t)dt \quad , \tag{1.12}$$

где

$$g(x)=\frac{\omega\rho_+}{(\pi T_+)^{\frac{3}{2}}}\int_0^\infty e^{-\frac{x}{s_1}}e^{-\frac{s_1^2}{T_+}}ds_1 \tag{1.13}$$

$$K(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{|x|}{s_1}}e^{-s_1^2}\left(1+\frac{\varepsilon}{4}-\frac{\varepsilon s_1{}^2}{2}\right)\frac{ds_1}{s_1} \ . \tag{1.14}$$

Таким образом нелинейная граничная задача (1.7), (1.4), (1.8) точно линеаризовалась и свелась к неоднородному линейному интегральному уравнению (1.12) со знакопеременным ядром.

Итак справедлива

__Лемма 2.1:__ *Нелинейная граничная задача (1.7), (1.4),(1.3), (1.8) эквивалентна неоднородному линейному интегральному уравнению (1.12), а искомые функции* $f^{\pm}(x,\vec{s})$ *определяются из простых нелинейных соотношений (1.9), (1.10).*

Теперь займемся вопросом линеаризации уравнения (1.7). Предположив, что модуль молекулярной скорости $|\vec{s}|$ намного больше по сравнению со среднемассовой скоростью газа $u(x)$, разложим экспоненту в ряд Тейлора около нуля, ограничиваясь членами, линейными по u :

$$\frac{e^{-(\vec{s}-\vec{u})^2}}{\pi^{\frac{3}{2}}}\left(1+\varepsilon\varphi(x,\vec{s})\right)\approx\frac{e^{-s_1^2}}{\pi^{\frac{3}{2}}}\left[1+\left(2\varepsilon s_3^2+2(1-\varepsilon)\mathrm{s}_2-\varepsilon(s_2s_1^2+s_2s_3^2)\right)u(\mathrm{x})+\varepsilon s_2^2-\frac{\varepsilon\left(s_1^2+s_3^2\right)}{2}\right] . \tag{1.15}$$

Искомые функции $f^{\pm}(x,\vec{s})$ ищем в виде :

$$f^{\pm}(x,\vec{s})=\frac{e^{-|\vec{s}|^2}}{\pi^{\frac{3}{2}}}\left(1+h^{\pm}(x,\vec{s})\right) \ , \tag{1.16}$$

где $h^{\pm}(x,\vec{s})$ - поправки к функциям распределения $f^{\pm}$.

Граничные условия (1.8) примут вид:

$$h^{+}(0,\vec{s})=\frac{2\omega\rho_+}{(\pi T_+)^{\frac{3}{2}}}s_2e^{-\frac{|\vec{s}|^2}{T_+}}; \quad h^{-}(x,\vec{s})=o\left(e^{\frac{x}{s_1}}\right), \text{когда } x\to+\infty . \tag{1.17}$$

Тогда из (1.9),(1.10) с учетом (1.15)-(1.17) имеем :

$$h^{+}\left(x,\vec{s}\right)=h^{+}\left(0,\vec{s}\right)e^{-\frac{x}{s_1}}+$$
$$\int_0^x e^{-\frac{(x-t)}{s_1}}\frac{e^{-s^2}}{\pi^{\frac{3}{2}}}\left[\left(2\varepsilon s_3^2+2(1-\varepsilon)s_2-\varepsilon(s_2 s_1^2+s_2 s_3^2)\right)u\left(t\right)+\varepsilon s_2^2-\frac{\varepsilon(s_1^2+s_3^2)}{2}\right]\frac{dt}{s_1} \tag{1.18}$$

$$h^{-}\left(x,\vec{s}\right)=\int_x^{\infty} e^{-\frac{(t-x)}{s_1}}\frac{e^{-s^2}}{\pi^{\frac{3}{2}}}\left[\left[\left(2\varepsilon s_3^2+2(1-\varepsilon)s_2-\varepsilon(s_2 s_1^2+s_2 s_3^2)\right)u\left(t\right)+\varepsilon s_2^2-\frac{\varepsilon(s_1^2+s_3^2)}{2}\right]\right]\frac{dt}{s_1} \tag{1.19}$$

$$u\left(x\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}s_2\left[h^{+}\left(x,\vec{s}\right)+h^{-}\left(x,\vec{s}\right)\right]ds_3 ds_2 ds_1 \ . \tag{1.20}$$

Подставляя (1.18), (1.19) в (1.20) после некоторых выкладок приходим к линейному интегральному уравнению (1.12).

Итак основное различие между решениями задачи в нелинейном и линейном случаях заключается в следующем:

И в нелинейном, и линейном случаях $u(x)$ определяется из линейного уравнения (1.12)-(1.14), т.е. в обоих случаях решение имеет одинаковую асимптотику в бесконечности. Но искомые функции $f^{\pm}(x,\vec{s})$ в нелинейном случае определяются из нелинейных соотношений (1.9), (1.10), а в линейном случае из линейных соотношений (1.16), (1.18), (1.19).

§2. **О РАЗРЕШИМОСТИ ЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ (1.12)**

Легко заметить, что ядро K(x) уравнения (1.12), задаваемое посредством (1.14), знакопеременно. Нетрудно проверить, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x)\,dx = 1. \tag{2.1}$$

Равенство (2.1) означает, что уравнение (1.12) представляет собой уравнение с необратимым интегральным оператором. С одной стороны, знакопеременность ядра $K(x)$, с другой стороны, необратимость соответствующего оператора весьма усложняют вопрос изучения и решения уравнения (1.12).
Ниже займемся вопросом разрешимости уравнения (1.12).

Перепишем уравнение (1.12) в операторном виде:

$$\left(I-\hat{K}\right)u = g. \tag{2.2}$$

Здесь I - единичный оператор, $\hat{K}$ – интегральный оператор Винера-Хопфа

$$\left(\hat{K}f\right)(x) = \int_{0}^{\infty} K(x-t)\, f(t)\,dt\ . \tag{2.3}$$

Вопрос обратимости оператора $I-\hat{K}$ в естественных банаховых пространствах

$$E\left(L_p(0,+\infty),\, p\geq 1, M(0,+\infty)\equiv L_\infty(0,+\infty); C_0\right)$$

и другие его важные свойства определяются с помощью символа $1-\overline{K}(s)$, где $\overline{K}(s)$ – преобразование Фурье функции $K(x)$, т. е.

$$\overline{K}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x) e^{isx}\,dx\ . \tag{2.4}$$

Для обратимости оператора $I-\hat{K}$ в любом из пространств E одним из необходимых условий (см. [8,23,24]) является отличие от нуля символа оператора $\hat{K}$, т. е

$$1-\overline{K}(s)\neq 0\ , s\in(-\infty;+\infty).$$

Из (2.1) и (1.14) следует, что символ оператора $\hat{K}$ в нуле имеет вырожденность второго порядка. Поэтому уравнение (1.12) выпадает из общей теории интегрального уравнения Винера-Хопфа и возникает необходимость развить другой подход к решению указанного уравнения.

Ниже, с применением метода специальной факторизации, удается свести исходное уравнение (1.12) к новому уравнению с невырожденным интегральным оператором. Предложенный нами подход исходит из факторизационной интерпретации “сдвига альбедо” (см [13,14, 55]). Этот метод в дальнейшем был применен в работах (см [35,45,61]).

С учетом (1.14) из (2.4) имеем

$$1-\overline{K}(s) = \int_{0}^{\infty} \frac{p^2 s^2\, 2pG_1(p)\,dp}{1+p^2 s^2}\ , \tag{2.5}$$

где

$$G_1(p)=\frac{1}{\sqrt{\pi}p}e^{-p^2}\left(1+\frac{\varepsilon}{4}-\frac{\varepsilon p^2}{2}\right). \tag{2.6}$$

Для любого $\beta>0$ в силу (2.1) будем иметь

$$1-\overline{K}(s)=\frac{s^2}{s^2+\beta^2}\left(1-\overline{T}_\beta(s)\right), \tag{2.7}$$

где $\overline{T}_\beta(s)$ - преобразование Фурье функции $T_\beta(x)$:

$$T_\beta(x)=\int_0^\infty e^{-\frac{|x|}{s}}G_1(s)\left(1-\beta^2s^2\right)ds \quad . \tag{2.8}$$

Введем нижние и верхние вольтерровые операторы:

$$(\hat{V}_-f)(x)=\beta\int_x^\infty e^{-\beta(t-x)}f(t)dt;\ (\hat{V}_+f)(x)=\beta\int_0^x e^{-\beta(x-t)}f(t)dt. \tag{2.9}$$

Легко убедиться, что символы операторов $\hat{V}_\pm$ задаются согласно

$$1-\overline{V}_\pm(s)=\frac{\mp is}{\beta\mp is}. \tag{2.10}$$

Правую часть (2.7) можно переписать в виде

$$1-\overline{K}(s)=\left[1-\overline{V}_-(s)\right]\left[1-\overline{T}_\beta(s)\right]\left[1-\overline{V}_+(s)\right]. \tag{2.11}$$

Как известно, из равенства символов следует равенство соответствующих операторов (см [5]).
Поэтому

$$I-\hat{K}=\left(I-\hat{V}_-\right)\left(I-\hat{T}\right)\left(I-\hat{V}_+\right). \tag{2.12}$$

Операторы $I-\hat{V}_\pm$ необратимы в пространстве E, ибо $1-\overline{V}_\pm(0)=0$. Из (2.8) легко можно убедиться, что символ оператора $\hat{T}_\beta$ в нуле отличен от нуля для произвольного $\beta>0$. Последнее вовсе не означает, что оператор $I-\hat{T}_\beta$ обратим. Отсутствие других нулей функции $1-\overline{T}_\beta(s)$ можно установить исходя из того факта, что символ исходного оператора $\hat{K}$ не имеет других нулей, т. е. $1-\overline{K}(s)\neq 0,\ s\neq 0$.

Для нормы скалярного интегрального оператора Винера-Хопфа имеет место оценка:

$$\left\|\hat{T}_\beta\right\|_E\le\int_{-\infty}^{\infty}\left|T_\beta(x)\right|dx=\left\|\hat{T}_\beta\right\|_{L_1}. \tag{2.13}$$

Пусть $f\in E$ - произвольная функция. Рассмотрим следующую функцию $\varphi=\hat{T}f$ и оценим норму функции φ в каждом из пространств E. С учетом (2.13) нетрудно убедиться, что в любом из пространств E имеет место оценка

$$\|\varphi\|_E\le\lambda(\beta)\|f\|_E\ , \tag{2.14}$$

где

$$\lambda(\beta)\equiv\int_{-\infty}^{\infty}\left|T_\beta(x)\right|dx\ .$$

Для того чтобы интегральный оператор $\hat{T}_\beta$ был сжимающим достаточно, чтобы $\exists\beta>0$ такое, что

$$\lambda(\beta) < 1. \tag{2.15}$$

Покажем, что существует множество значений параметра $\beta > 0$, для которых оператор $\hat{T}_\beta$ в пространстве E является сжимающим с коэффициентом сжатия $\lambda(\beta) < 1$.

Теорема 2.1 *Для любого $\varepsilon \in [0,2)$ существует $\beta = \beta_\varepsilon > 0$, такое что оператор $\hat{T}_\beta$ является сжимющим. Более того, если $\varepsilon \in [2,\infty)$, то оператор $\hat{T}_{\beta_\varepsilon}$ не является сжимающим.*

Доказательство.

Пусть $\varepsilon = (0,2)$. В качестве β_ε выбираем $\beta_\varepsilon = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{4+\varepsilon}}$. Имеем:

$$\lambda(\beta_\varepsilon) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \left|T_{\beta_\varepsilon}(x)\right| dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-s^2} \left|1 + \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon s^2}{2}\right| \left|1 - \beta_\varepsilon^2 s^2\right| ds =$$

$$= \frac{\varepsilon \beta_\varepsilon^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-s^2} \left(\frac{1}{\beta_\varepsilon^4} - \frac{2s^2}{\beta_\varepsilon^2} + s^4\right) ds = \frac{4+\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{3\varepsilon^2}{4(4+\varepsilon)} = \frac{\varepsilon^2+8}{8+2\varepsilon} < 1.$$

Если же $\varepsilon \ge 2$, тогда докажем что оператор $\hat{T}_{\beta_\varepsilon}$ не является сжимающим. Действительно

$$\lambda(\beta_\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \left|T_{\beta_\varepsilon}(x)\right| dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-s^2} \left|1 + \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon s^2}{2}\right| \left|1 - \beta_\varepsilon^2 s^2\right| ds \ge$$

$$\ge \left|\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-s^2} \left(1 + \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon s^2}{2} - \frac{\beta_\varepsilon \varepsilon s^2}{4} - \beta_\varepsilon s^2 + \frac{\beta_\varepsilon \varepsilon s^4}{2}\right) ds\right| = \left|1 - \frac{\beta_\varepsilon^2}{2} + \frac{\beta_\varepsilon^2 \varepsilon}{4}\right| \ge 1$$

для любого $\varepsilon \ge 2$.

Пусть теперь $\varepsilon = 0$. Тогда имеем

$$\lambda(\beta_\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-s^2} \left|1 - \beta_\varepsilon^2 s^2\right| ds = \frac{2\beta_\varepsilon^2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{1}{\beta}}^\infty e^{-s^2} \left(s^2 - \frac{1}{\beta^2}\right) ds + \frac{4\beta^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{\beta}} e^{-s^2} \left(\frac{1}{\beta^2} - s^2\right) ds = \frac{\beta^2}{2} - 1 + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{\beta}} e^{-s^2} ds +$$

$$+ \frac{2\beta^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{\beta}} s\,de^{-s^2} = \frac{\beta^2}{2} - 1 + \frac{2\beta}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{\beta^2}} + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{\beta_\varepsilon^2}{2}\right) \int_0^{\frac{1}{\beta}} e^{-s^2} ds \le \frac{\beta_\varepsilon^2}{2} - 1 + \frac{2\beta_\varepsilon}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{\beta^2}} +$$

$$+ \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{\beta_\varepsilon^2}{2}\right) arctg \frac{1}{\beta_\varepsilon} \equiv \lambda^*(\beta_\varepsilon)$$

В последнем неравенстве использована оценка

$$\int_0^{\frac{1}{\beta}} e^{-s^2} ds \le \int_0^{\frac{1}{\beta}} \frac{ds}{1+s^2}.$$

Ниже выберем число $\beta_\varepsilon > 0$ так чтобы $\lambda^*(\beta_\varepsilon) < 1$.

Заметим, то при $\beta_\varepsilon = 1$ приближенное значение $\lambda(1) = \frac{4 - \sqrt{\pi}e + \pi e}{2\sqrt{\pi}e} \approx 0{,}796$. В силу непрерывности функции $\lambda(\beta)$ существует окрестность β, в которой $\lambda(\beta) < 1$.

Теорема доказана.

Перейдем теперь к решению уравнения (1.12) с применением факторизации (2.12). Факторизация (2.12) сводит исходное уравнение (2.2) к последовательному решению следующих связанных уравнений:

$$\left(I-\hat{V}_{-}\right)H=g, \tag{2.16}$$

$$\left(I-\hat{T}_{\beta}\right)F=H, \tag{2.17}$$

$$\left(I-\hat{V}_{+}\right)U=F. \tag{2.18}$$

Легко проверить, что решение уравнения (2.16) имеет вид:

$$H\left(x\right)=g\left(x\right)+\beta\int_{x}^{\infty}g\left(t\right)dt, \tag{2.19}$$

Так как $g\in L_1(0,+\infty)$, $m_1(g)=\int_0^{\infty}xg(x)dx<+\infty$, (см.(1.13)), то

$$H\in L_1\left(0,+\infty\right)\cap L_{\infty}\left(0,\infty\right). \tag{2.20}$$

Перейдем к решению уравнения (2.17), которое в раскрытом виде примет вид

$$F\left(x\right)=H\left(x\right)+\int_{0}^{\infty}T_{\beta}\left(x-t\right)F\left(t\right)dt\ . \tag{2.21}$$

Поскольку при $\varepsilon\in[0,2)$ оператор $\hat{T}_{\beta}$ является сжимающим в каждом из пространств E, а сответствующее ядро, то линейное интегральное уравнение (2.21) с ядром (2.8) имеет единственное решение $F(\square)\in L_1\left(0,+\infty\right)\cap L_{\infty}\left(0,+\infty\right)$. Заметим, что построение этого решения не представляет особой трудности.

Наконец, решение исходного уравнения (2.18) записывается в виде:

$$u\left(x\right)=\beta\int_{0}^{x}F\left(t\right)dt+F\left(x\right). \tag{2.22}$$

Рассмотрим теперь случай, когда пластинки неподвижны ($\vec{\omega}=0,\ g(x)=0$). Покажем, что однородное уравнение (1.12), кроме тривиального решения, обладает также решением, имеющим линейный рост в бесконечности. Заметим, что $\mathrm{H}(x)\equiv 1$ является решением уравнения

$$H(x)=\beta\int_{x}^{\infty}e^{-\beta(\mathrm{t}-x)}H(\mathrm{t})\,\mathrm{dt}\,.$$

Уравнение (2.21) со свободным членом $\mathrm{H}(x)\equiv 1$ имеет ограниченное решение $F(x)$. Тогда из (2.22) следует, что $u(x)=\mathrm{O}(x)$, когда $x\to\infty$.

Итак, справедлива

<u>Теорема 2.2.</u> *Пусть* $\varepsilon\in[0,2)$, а *функции* g *и* K *задаются посредством формул (1.13) и (1.14). Тогда неоднородное уравнение (1.12) имеет ограниченное решение вида (2.22), а соответствующее однородное уравнение обладает решением, имеющим линейный рост в бесконечности.*

<u>Замечание 1.</u> *Отметим, что из исходного необратимого оператора нами выделены простейшие вольтерровые необратимые операторы* $\hat{V}_{\pm}$ *(см.(2.9)), которые являются главными носителями качественных свойств решения исходного уравнения (1.12).*

§3. ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ СЕМЕЙСТВО ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА УРЫСОНА

Рассмотрим следующее нелинейное интегральное уравнение Урысона

$$\varphi(x)=\int_0^\infty U\left(x,t,\varphi(t)\right)dt,\ x\in R^+:=[0,+\infty) \tag{3.1}$$

относительно искомой измеримой и вещественной функции $\varphi(x)$. Здесь

$$U(x,t,z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\left(e^{-\frac{|x-t|}{p}}+\varepsilon e^{-\frac{(x+t)}{p}}\right)\frac{e^{-p^2}}{p}z\left(1+Q(z)\right)e^{-p^2(2Q(z)+Q^2(z))}dp \tag{3.2}$$

$$(x,t,z)\in R^+\times R^+\times R^+,$$

где $Q(z)$- определенная на $[0,+\infty)$ непрерывная вещественнозначная функция, удовлетворяющая следующим условиям:

а) существует число $A>0$, такое что $Q(z)\geq 0, z\in[A,+\infty)$,

$$Q\in L_1(R^+)\cap L_\infty(R^+), m_2(Q):=\int_0^\infty z^2Q(z)dz<+\infty.$$

б) функция $zQ(z)\downarrow$ по z на $[A,+\infty)$, а функция $z+zQ(z)\uparrow$ по z на $[A,+\infty)$.

Уравнениями (3.1)-(3.2) описывается задача течения газа в полупространстве $x>0$, ограниченном твердой плоской стенкой $x=0$. Искомая функция $\varphi(x)$ играет роль скорости газа, $0\leq\varepsilon<1$-коэффициент аккомодации. Случай $\varepsilon=0$ соответствует чисто диффузному отражению, $\varepsilon\neq 0$ соответствует случаю учета диффузного и зеркального отражения . Заметим, что при $Q(z)=0$ уравнение (3.1)-(3.2) становится линейным интегральным уравнением с суммарно-разностным ядром.

Настоящий параграф посвящен изучению и решению уравнения Урысона (3.1)-(3.2). Доказывается, что при условиях а)-б) уравнение (3.1)-(3.2) обладает однопараметрическим семейством положительных решений, имеющих линейный рост в бесконечности. Более того для каждого решения из этого семейства найдена точная асимптотическая формула в бесконечности. Получены двусторонние оценки решения, описан конструктивный способ построения решения. В конце параграфа приведены примеры функций, описывающих нелинейность и удовлетворяющих условиям теоремы.

Для получения основного результата нам понадобятся некоторые новые вспомогательные факты. По пунктам приведем доказательство этих фактов.

Пункт 1. Сперва убедимся, что при каждом фиксированном $(x,t)\in R^+\times R^+$ функция $U(x,t,z)$монотонно возрастает по z на множестве $[A,+\infty)$.

Действительно, если обозначить через $\chi(p,z)$ функцию

$$\chi(p,z)=z\left(1+Q(z)\right)e^{-p^2(2Q(z)+Q^2(z))},$$

определенную на $R^+\times R^+$, то в силу условий а)-б) нетрудно убедиться, что $\chi(p,z)\uparrow$ по z на $\left[A,+\infty\right)$. На самом деле, пусть $z_1,z_2\in\left[A,+\infty\right)$ и $z_1>z_2$. Сперва проверим, что $Q(z_1)\le Q(z_2)$. Поскольку $zQ(z)\downarrow$ по z на $\left[A,+\infty\right)$, то из соотношения $0\ge z_1Q(z_1)-z_2Q(z_2)=z_1\left(Q(z_1)-Q(z_2)\right)+\left(z_1-z_2\right)Q(z_2)$ и в силу неотрицательности функции $Q(z)$ на $\left[A,+\infty\right)$ получим $Q(z_1)\le Q(z_2)$.

Следовательно,

$$\chi(p,z_1)-\chi(p,z_2)\ge z_1\left(1+Q(z_1)\right)e^{-p^2(2Q(z_2)+Q^2(z_2))}-z_2\left(1+Q(z_2)\right)e^{-p^2(2Q(z_2)+Q^2(z_2))}=$$

$$=e^{-p^2(2Q(z_2)+Q^2(z_2))}\left(z_1-z_2+z_1Q(z_1)-z_2Q(z_2)\right)\ge 0,$$

ибо $z+zQ(z)\uparrow$ по z на $\left[A,+\infty\right)$.

Из представления (3.2) с учетом монотонности функции $\chi(p,z)$ по z на $\left[A,+\infty\right)$, следует , что

$$U\left(x,t,z\right)\uparrow \text{ по } z \text{ на } \left[A,+\infty\right).$$

Справедлива следующая

Лемма 3.1. *При условиях а)-б) функция $U\left(x,t,z\right)$ монотонно возрастает по z* на $\left[A,+\infty\right)$.

Пункт2. Наряду с уравнением (3.1) (с ядром (3.2)) рассмотрим следующее вспомогательное однородное уравнение Винера-Хопфа:

$$S(x)=\int_0^\infty u_0(x-t)S(t)dt,\ x\ge 0 \tag{3.3}$$

с начальным условием

$$S(0)=1 \tag{3.4}$$

относительно искомой функции $S(x)$, где

$$u_0(\tau)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{|\tau|}{p}}\frac{e^{-p^2}}{p}dp,\ \tau\in R. \tag{3.5}$$

Из определения функции $u_0(\tau)$ следует, что

$$u_0(\tau)\ge 0,\ \ \tau\in R,\ \ \int_{-\infty}^\infty u_0(\tau)d\tau=1, \tag{3.6}$$

$$u_0(-\tau)=u_0(\tau), \tau>0, \tag{3.7}$$

$$\lim_{\tau\to 0} u_0(\tau)=+\infty \tag{3.8}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^j u_0(\tau)d\tau<+\infty, j=0,1,2... \tag{3.9}$$

Из результатов работы [5] следует, что решение $S(x)$ задачи (3.3)-(3.4) обладает следующими свойствами:

$$S(x)\uparrow \text{ по } x \text{ на } R^+ \tag{3.10}$$

$$S(x)\geq \frac{x}{\sqrt{\frac{1}{2}\upsilon_2}},\ x\in R^+,\ \text{ где } \upsilon_2\equiv\int_{-\infty}^{+\infty}\tau^2 u_0(\tau)d\tau. \tag{3.11}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{S(x)}{x}=\left(\sqrt{\frac{1}{2}\upsilon_2}\right)^{-1}. \tag{3.12}$$

Существует положительные числа a и b такие, что

$$S(x)\leq ax+b, x\in R^+. \tag{3.13}$$

В нашем случае (3.5) легко проверить, что $\upsilon_2=1$.

Так как $S(0)=1$ из (3.10), (3.11) имеем что

$$S(x)\geq\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}, x\in R^+. \tag{3.14}$$

<u>Пункт 3.</u> Введем в рассмотрение также следующие вспомогательные неоднородные интегральные уравнения с суммарно-разностными ядрами:

$$\psi(x)=g(x)+\int_0^\infty\left(u_0(x-t)+\varepsilon u_0(x+t)\right)\psi(t)dt, x\geq 0, \tag{3.15}$$

$$\tilde{\psi}(x)=\tilde{g}(x)+\int_0^\infty\left(u_0(x-t)+\varepsilon u_0(x+t)\right)\tilde{\psi}(t)dt, x\geq 0 \tag{3.16}$$

относительно искомых функций ψ и $\tilde{\psi}$, где функции g и $\tilde{g}$ допускают следующие представления:

$$g(x)=\int_0^\infty\left(u_1(x-t)+\varepsilon u_1(x+t)\right)G\left(\sqrt{2}At+A\right)dt, x\in R^+. \tag{3.17}$$

$$\tilde{g}(x)=\int_0^\infty\left(u_0(x-t)+\varepsilon u_0(x+t)\right)\left(\sqrt{2}At+A\right)Q\left(\sqrt{2}At+A\right)dt, x\in R^+. \tag{3.18}$$

$$G(z):=z\left(2Q(z)+Q^2(z)\right), z\geq 0, \tag{3.19}$$

$$u_1(\tau):=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{|\tau|}{p}}pe^{-p^2}dp,\tau\in R. \qquad (3.20)$$

Из условий а)-б), накладываемых на функцию Q, непосредственно ледует, что

$$G(z)\downarrow \text{ по } z \text{ на } \left[A,+\infty\right) \qquad (3.21)$$

$$G(z)\geq 0,\ z\in\left[A,+\infty\right),G\in L_1(R^+)\cap L_\infty(R^+) \qquad (3.22)$$

$$m_1(G)<+\infty \qquad (3.23)$$

Так как $\int_{-\infty}^{+\infty}|\tau|^j u_1(\tau)d\tau<+\infty,\left(j=0,1,2...\right)$, то из (3.17), (3.18) и (3.21)-(3.23) имеем

$$g(x)\geq 0,x\geq 0,g\in L_1(R^+)\cap L_\infty(R^+) \qquad (3.24)$$

$$m_1(g)<+\infty \qquad (3.25)$$

$$\tilde{g}(x)\geq 0,x\geq 0,\tilde{g}\in L_1(R^+)\cap L_\infty(R^+) \qquad (3.26)$$

$$m_1(\tilde{g})<+\infty\quad . \qquad (3.27)$$

Из результатов работ [11],[45] вытекает, что уравнения (3.15) и (3.16) обладают положительными и ограниченными решениями ψ и $\tilde{\psi}$ соответственно.

Обозначим через

$$\lambda\equiv\sup_{x\geq 0}\psi(x),\quad \tilde{\lambda}\equiv\sup_{x\geq 0}\tilde{\psi}(x), \qquad (3.28)$$

<u>Пункт4.</u> Наряду с уравнением (3.1) ниже займемся изучением следующего однородного уравнения с суммарно-разностным ядром:

$$\Phi(x)=\int_0^\infty\left(u_0(x-t)+\varepsilon u_0(x+t)\right)\Phi(t)dt,x\geq 0 \qquad (3.29)$$

относительно искомой функции $\Phi(x)$, где ядерная функция u_0 задается согласно формуле (3.5), а $\varepsilon\in\left[0,1\right)$.

Ниже убедимся, что уравнение (3.29) имеет положительное решение с асимптотикой $\Phi(x)=\sqrt{2}x+o(x)$, когда $x\to+\infty$.

А именно справедлива

<u>Теорема 3.1.</u> *Пусть $u_0(x)$ допускает представление (3.5), а $\varepsilon\in\left[0,1\right)$. Тогда уравнение (3.29) имеет положительное решение с асимптотикой $\Phi(x)=\sqrt{2}x+o(x)$, при $x\to+\infty$. Более того $\Phi(x)\geq\frac{\sqrt{2}x}{2}+\frac{1}{2},x\geq 0.$*

<u>Доказательство:</u> Сначала рассмотрим следующее неоднородное уравнение со специальным свободным членом:

$$F_0(x)=g_0(x)+\int\limits_0^\infty \left(u_0(x-t)+\varepsilon u_0(x+t)\right)F_0(t)dt, x\geq 0, \tag{3.30}$$

где

$$g_0(x)=\int\limits_0^\infty u_0(x+t)(at+b)dt, x\geq 0, \tag{3.31}$$

(числа $a,b>0$ те же , что и в (3.13)). Из представления функции g_0 легко следует, что $g_0(x)\geq 0,\ x\in R^+,\ g_0\in L_1\left(R^+\right),\ m_1(g_0)<+\infty$ и представляется в виде суперпозиции экспонент:

$$g_0(x)=\int\limits_0^\infty e^{-\frac{x}{p}}G_0(p)dp, x\geq 0, \tag{3.32}$$

где

$$G_0(p)=\frac{ap+b}{\sqrt{\pi}}e^{-p^2}, p\geq 0. \tag{3.33}$$

Из результатов работ [11],[45] непосредственно следует, что уравнение (3.30) обладает положительным ограниченным решением $F_0(x)$, имеющим конечный предел в бесконечности.

Для уравнения (3.29) рассмотрим следующие итерации:

$$\Phi_{n+1}(x)=\int\limits_0^\infty \left(u_0(x-t)+\varepsilon u_0(x+t)\right)\Phi_n(t)dt, x\geq 0 \tag{3.34}$$

$$\Phi_0(x)=S(x), n=0,1,2....$$

где $S(x)$ -решение задачи (3.3)-(3.4).

Индукцией по n можно убедиться, что последовательность функций $\left\{\Phi_n(x)\right\}_{n=0}^\infty$ монотонно возрастает по n. Покажем, что

$$\Phi_n(x)\leq S(x)+F_0(x), n=0,1,2..., x\geq 0. \tag{3.35}$$

Так как $\Phi_{n+1}(\mathrm{x})\geq 0,\ x\in R^+$, то неравенство (3.35) верно для $n=0$, Пусть (3.35) имеет место при некотором натуральном n. Так как $u_0\geq 0,\ \varepsilon\geq 0$, из определения $\Phi_{n+1}(\mathrm{x})$ в силу (3.30), то имеем

$$\Phi_{n+1}(x)\leq\int\limits_0^\infty \left(u_0(x-t)+\varepsilon u_0(x+t)\right)\left(S(t)+F_0(t)\right)dt\leq$$

$$\leq\int\limits_0^\infty u_0(x-t)S(t)dt+\varepsilon\int\limits_0^\infty u_0(x+t)\left(at+b\right)dt+$$

$$+\int_0^\infty (u_0(x-t)+\varepsilon u_0(x+t))F_0(t)dt \le S(x)+g_0(x)+$$

$$+\int_0^\infty (u_0(x-t)+\varepsilon u_0(x+t))F_0(t)dt = S(x)+F_0(x).$$

Следовательно последовательность функций $\{\Phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ имеет поточечный предел, при $n\to+\infty: \lim_{x\to\infty}\Phi_n(x)=:\Phi(x)$, причем предельная функция удовлетворяет уравнению (3.29) Б.Леви (см [22]). Из монотонности $\Phi_n(x)$ по n и из неравнества (3.35) следует, что для $\Phi(x)$ выполняется двустороннее неравенство:

$$S(x)\le\Phi(x)\le S(x)+F_0(x), x\ge 0. \tag{3.36}$$

Так как $S(x)$ удовлетворяет неравенству (3.14) и имеет асимптотику (3.12), а $F_0\in L_\infty(R^+)$, то из (3.36) получим, что

$\Phi(x)\ge\frac{\sqrt{2}x}{2}+\frac{1}{2}, x\ge 0$ и $\Phi(x)=\sqrt{2}x+o(x)$, когда $x\to+\infty$.

Теорема доказана.

<u>Пункт5.</u> Перейдем к построению однопараметрического семейства положительных решений исходного уравнения (3.1). Рассмотрим следующее семейство последовательных приближений для уравнения (3.1):

$$\varphi_{n+1}^{\gamma}(x)=\int_0^\infty U(x,t,\varphi_n^{\gamma}(t))dt, x\in R^+, \tag{3.37}$$

$$\varphi_0^{\gamma}(x)=\gamma\Phi(x)-\psi(x), n=0,1,2...,$$

где γ -некоторое число из множества параметров:

$$\Pi:=[2\mathrm{A}+2\lambda,+\infty). \tag{3.38}$$

Ниже индукцией по n убедимся, что при всяком фиксированном $\gamma\in\Pi$ последовательность функций $\{\varphi_n^{\gamma}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ обладает следующими свойствами:

I) $\varphi_n^{\gamma}(x)\uparrow$ по n, $x\in R^+, \gamma\in\Pi,$

II) $\varphi_n^{\gamma}(x)\le\gamma\Phi(x)+\tilde{\psi}(x), n=0,1,2,...., x\in R^+, \gamma\in\Pi.$

Сначала заметим, что

$$\varphi_0^{\gamma}(x):=\gamma\Phi(x)-\psi(x)\ge\sqrt{2}(A+\lambda)x+A, x\in R^+. \tag{3.39}$$

Действительно, из (3.37), (3.28), (3.14) и (3.36) следует, что

$$\varphi_0^{\gamma}(x)\ge\gamma\Phi(x)-\lambda\ge\gamma S(x)-\lambda\ge\frac{\gamma x}{\sqrt{2}}+\frac{\gamma}{2}-\lambda\ge\sqrt{2}(A+\lambda)x+A,$$

Сперва убедимся, что

$$\varphi_1^\gamma(x) \ge \varphi_0^\gamma(x), x \in R^+, \gamma \in \Pi..$$

В силу (3.21), условий а)-б), используя (3.29), (3.14) и (3.36) имеем

$$\varphi_1^\gamma(x) = \int_0^\infty U(x,t,\varphi_0^\gamma(t))dt \ge$$

$$\ge \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty (e^{-\frac{|x-t|}{p}} + \varepsilon e^{-\frac{(x+t)}{p}}) \frac{e^{-p^2}}{p} \varphi_0^\gamma(t) e^{-p^2(2Q(\varphi_0^\gamma(t))+Q^2(\varphi_0^\gamma(t)))} dpdt \ge$$

$$\ge \int_0^\infty \left(u_0(x-t)+\varepsilon u_0(x+t)\right)\varphi_0^\gamma(t)dt - \int_0^\infty \left(u_1(x-t)+\varepsilon u_1(x+t)\right)G(\varphi_0^\gamma(t))dt =$$

$$= \gamma\Phi(x) - \int_0^\infty \left(u_0(x-t)+\varepsilon u_0(x+t)\right)\psi(t)dt - \int_0^\infty \left(u_1(x-t)+\varepsilon u_1(x+t)\right)G(\gamma S(t)-\psi(t))dt \ge$$

$$\ge \gamma\Phi(x) - \int_0^\infty \left(u_0(x-t)+\varepsilon u_0(x+t)\right)\psi(t)dt - \int_0^\infty \left(u_1(x-t)+\varepsilon u_1(x+t)\right)G(\frac{\gamma t}{\sqrt{2}}+\frac{\gamma}{2}-\lambda)dt \ge$$

$$\ge \gamma\Phi(x) - \int_0^\infty \left(u_0(x-t)+\varepsilon u_0(x+t)\right)\psi(t)dt - \int_0^\infty \left(u_1(x-t)+\varepsilon u_1(x+t)\right)G(\sqrt{2}At+A)dt =$$

$$= \gamma\Phi(x) - \int_0^\infty \left(u_0(x-t)+\varepsilon u_0(x+t)\right)\psi(t)dt - g(x) = \gamma\Phi(x)-\psi(x) = \varphi_0^\gamma(x).$$

Предполагая, что $\varphi_n^\gamma(x) \ge \varphi_{n-1}^\gamma(x), x \in R^+, \gamma \in \Pi.$ при некотором $n \in N$ и, учитывая монотонность функции $U(x,t,z)$ по z на $[A,+\infty)$, из (3.37) получим, что

$$\varphi_{n+1}^\gamma(x) \ge \int_0^\infty U(x,t,\varphi_{n-1}^\gamma(t))dt = \varphi_n^\gamma(x), x \in R^+, \gamma \in \Pi.$$

Следовательно, монотонность по n функциональной последовательности $\left\{\varphi_n^\gamma(x)\right\}_{n=0}^\infty$ установлена.

Теперь перейдем к доказательтву неравенства II). В случае когда $n=0$ неравенство II) очевидным образом выполняется, ибо $\psi(x), \tilde{\psi}(x) \ge 0, x \in R^+$.

Предположим , что II) имеет место при некотором $n \in N$. Тогда в силу монотонности $U(x,t,z)$ по z на $[A,+\infty)$ с учетом условия б), (3.3), (3.14) из (3.37) будем иметь

$$\varphi_{n+1}^\gamma(x) \le \int_0^\infty U(x,t,\gamma\Phi(t)+\tilde{\psi}(t))dt \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty (e^{-\frac{|x-t|}{p}} + \varepsilon e^{-\frac{(x+t)}{p}}) \frac{e^{-p^2}}{p} \left(\gamma\Phi(t)+\tilde{\psi}(t)+(\gamma\Phi(t)+\tilde{\psi}(t))Q(\gamma\Phi(t)+\tilde{\psi}(t))\right)dpdt \le$$

$$\leq \gamma\int_0^\infty \left(u_0(x-t)+\varepsilon u_0(x+t)\right)\Phi(t)dt+\int_0^\infty \left(u_0(x-t)+\varepsilon u_0(x+t)\right)\tilde{\psi}(t)dt+$$

$$+\int_0^\infty \left(u_0(x-t)+\varepsilon u_0(x+t)\right)\left(\frac{\gamma t}{\sqrt{2}}+\frac{\gamma}{2}+\tilde{\psi}(t)\right)Q\left(\frac{\gamma t}{\sqrt{2}}+\frac{\gamma}{2}+\tilde{\psi}(t)\right)dt\leq$$

$$\leq \gamma\Phi(x)+\int_0^\infty \left(u_0(x-t)+\varepsilon u_0(x+t)\right)\tilde{\psi}(t)dt+$$

$$+\int_0^\infty \left(u_0(x-t)+\varepsilon u_0(x+t)\right)(\sqrt{2}At+A)Q(\sqrt{2}At+A)dt=$$

$$=\gamma\Phi(x)+\int_0^\infty \left(u_0(x-t)+\varepsilon u_0(x+t)\right)\tilde{\psi}(t)dt+\tilde{g}(x)=\gamma\Phi(x)+\tilde{\psi}(x).$$

Этим неравенство II) также доказано.

Следовательно, последовательность функций $\left\{\varphi_n^\gamma(x)\right\}_{n=0}^\infty$ при каждом фик-сированном $\gamma\in\Pi$ имеет поточечный предел при $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n^\gamma(x)=:\varphi^\gamma(x), x\in R^+ .$$

Из представления (3.2) с учетом свойств а)-б), в силу предельной теоремы Б.Леви (см. [22]) следует, что $\varphi_n^\gamma(x)$ удовлетворяет уравнению (3.1). Из I) и II) следует также двойное неравенство

$$\gamma\Phi(x)-\psi(x)\leq\varphi^\gamma(x)\leq\gamma\Phi(x)+\tilde{\psi}(x), x\in R^+ \tag{3.40}$$

при каждом фиксированном $\gamma\in\Pi$. Так как $\psi,\tilde{\psi}\in L_\infty(R^+)$, а $\Phi(x)$ удовлетворяет предельному соотношению $\Phi(x)=\sqrt{2}x+o(x)$, $x\to+\infty$, то из (3.40) следует, что существует

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\varphi^\gamma(x)}{x}=\sqrt{2}\gamma. \tag{3.41}$$

Из предельного соотношеия (3.41) следует, что различным значениям $\gamma\in\Pi$ соответствуют различные решения уравнения (3.1).

Итак, справедлива следующая

<u>Теорема 3.2.</u> *При условиях а)-б) уравнение (3.1) (с ядром (3.2)) обладает однопараметрическим семейством положительных решений* $\left\{\varphi^\gamma(x)\right\}_{\gamma\in\Pi}$, *имеющих линейный рост в бесконечности. Более того, для* $\forall\gamma\in\Pi$ *справедливо также предельное соотношение (3.41), где множество параметров* Π *задается согласно формуле (3.38).*

Замечание 5. *Заметим, что в частном случае, когда* $Q \equiv 0$, *уравнение (3.1) преобразуется в линейное консервативное уравнение (3.29) с ядром* $u_0(x)$. *Решение* $\varphi^{\gamma}(x)$ *исходного уравнения (3.1) оценивается решениями линейных уравнений (3.29) и (3.15), (3.16), согласно (3.40). Причем свободные члены уравнения (3.15) и (3.16) строятся специальным образом с помощью функции* $Q(z)$ *(см (3.17) и (3.18)).*

Приложение. Приведем примеры функций, удовлетворяющих условиям а)-б) основной теоремы 3.2. В качестве функции $Q(z)$ могут служить следующие функции

$$Q(z) = ze^{-z}, z \in [2, +\infty).$$

$$Q(z) = ze^{-z^2}, z \in [1, +\infty).$$

$$Q(z) = \frac{1}{z^4 + 1}, z \in [1, +\infty).$$

$$Q(z) = \sin\frac{1}{z^4 + 1}, z \in [1, +\infty).$$

Действительно, например докажем , что функция $Q(z) = ze^{-z}$ удовлетворяет всем условиям теоремы 3.2. Очевидно, что $\left(zQ(z)\right)' = ze^{-z}(2 - z) \le 0$, при $z \ge 2$, следовательно $zQ(z) \downarrow$ по z на $z \in [2, +\infty), (A = 2)$.

С другой стороны

$$\left(z + zQ(z)\right)' = 1 + ze^{-z}(2 - z) \tag{3.42}$$

Ниже проверим, что если $z \in [2, +\infty)$, то правая сторона последнего равенства неотрицательна. Обозначим через $\delta(z)$ следующую функцию: $\delta(z) = e^z + 2z - z^2$. Имеем $\delta(2) = e^2 > 0, \delta'(z) = e^z + 2 - 2z$. Заметим, что $\delta'(z) \ge 0$ при $z \in [2, +\infty)$, ибо $\delta'(2) = e^2 - 2 > 0$,а $\delta''(z) = e^z - 2 \ge z - 1 > 0$ при $z \in [2, +\infty)$. Поскольку $\delta(2) > 0$ и

$\delta(z) \uparrow$ по z на $z \in [2, +\infty)$, то из (3.42) сразу следует, что $\left(z + zQ(z)\right)' = e^{-z}(e^z + 2 - 2z) = e^{-z}\delta(z) \ge 0, z \in [2, +\infty)$. Остальные условия теоремы на функцию $Q(z)$, легко проверяются.

§4. ТОЧНАЯ ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОЙ ТОЛЩИНЫ СЛОЯ.

В настоящем параграфе рассматривается следующее нелинейное интегро-дифференциальное уравнение:

$$s_1 \frac{\partial f\left(x,\vec{s}\right)}{\partial x} + \rho\left(x\right) f\left(x,\vec{s}\right) = \frac{\rho^2\left(x\right)}{\pi^{\frac{3}{2}}} e^{-\left(\vec{s}-\vec{u}\left(x\right)\right)^2}, \; x \in [0, \mathrm{d}]. \tag{4.1}$$

Здесь $f\left(x,\vec{s}\right)$ - искомая функция, $\vec{s} = \left(s_1,s_2,s_3\right)$, $s_i \in \left(-\infty,+\infty\right)$, $i = 1,2,3.$

$$\rho\left(x\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(x,\vec{s}\right) ds_1 ds_2 ds_3, \tag{4.2}$$

$$\vec{u}\left(x\right) = \left(0, u\left(x\right), 0\right); \quad u\left(x\right) = \frac{1}{\rho\left(x\right)} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} s_2 f\left(x,\vec{s}\right) ds_1 ds_2 ds_3 \; . \tag{4.3}$$

К уравнению (4.1) присоединяются граничные условия:

$$f^+\left(0,\vec{s}\right) = \frac{\rho_+ e^{\frac{-(\vec{s}+\vec{\omega})^2}{T_+}}}{\left(\pi T_+\right)^{\frac{3}{2}}} \; ; \tag{4.4}$$

$$f^-\left(d,\vec{s}\right) = \frac{\rho_- e^{\frac{-(\vec{s}-\vec{\omega})^2}{T_-}}}{\left(\pi T_-\right)^{\frac{3}{2}}} \; ; \quad \vec{\omega} = \left(0, \omega, 0\right); \tag{4.5}$$

$$\rho_\pm = T_\pm = const; \quad \omega = const \; ,$$

где

$$f^+\left(x,\vec{s}\right) = \begin{cases} f\left(x,s_1,s_2,s_3\right), & \text{если } s_1 \geq 0 \; , \\ 0 \; , & \text{если } s_1 < 0 \; , \end{cases} \tag{4.6}$$

$$f^-\left(x,\vec{s}\right) = \begin{cases} f\left(x,-s_1,s_2,s_3\right), & \text{если } s_1 \geq 0 \; , \\ 0, & \text{если } s_1 < 0. \end{cases} \tag{4.7}$$

Задача (4.1)-(4.5) имеет применение в кинетической теории газов (см напрмер [20]) и описывает течение газа в плоском слое конечной толщины d, состоящем из двух параллельных бесконечных пластинок, ограниченных плоскостями $x = 0$ и $x = d$.

Искомая функция $f\left(x,\vec{s}\right)$ играет роль функции распределения частиц по скоростям $\vec{s}$, $\rho\left(x\right)$ - плотность газа, $\vec{u}\left(x\right)$ - скорость движения газа, ω - скорость движения пластинок относительно друг друга, $\rho_\pm$ - числа частиц, отраженных от нижних и верхних стенок соответственно. $T_{\pm}$ - температура нижних и верхних стенок. Температура газа считается постоянной и равной значению температуры, получаемой в средне-молекулярном режиме (см [20]).

$$T = \sqrt{T_+ T_-} + \frac{8\omega^2}{3} \frac{\sqrt{T_+ T_-}}{\left(\sqrt{T_-} + \sqrt{T_+}\right)^2}$$

Эта классическая задача Куэтта, которая в нелинейной постановке до сих не решена. В линейном приближении задаче Куэтта посвящены многочисленные работы (см. напр.. [20,48] и ссылки в них). Нам удалось решить указанную нелинейную задачу лишь в предположении, что температура постоянна. Для простоты примем $T \equiv 1$: Заметим, что в уравнении (4.1) нелинейность квадратична по $\rho\left(x\right)$ (см. (4.2)) и "экспоненциально-квадратична" по $u\left(x\right)$ (см. (4.3)).

В уравнении (4.1) перейдем к новому аргументу τ, который зависит от решения самой задачи

$$\tau\left(x\right) = \int_0^x \rho\left(x'\right)dx', \quad x \geq 0. \tag{4.8}$$

Функция $\tau\left(x\right)$- строго возрастающая, непрерывно дифференцируемая на $\left[0,+\infty\right)$. Величина τ в отличие от геометрического расстояния x, называется кинетическим расстоянием переменной точки от границы плоскости $\tau\left(0\right) = x\left(0\right) = 0$ (см. [17,18]). В случае, когда $x = d$ из (4.8) имеем

$$\tau\left(d\right) \equiv r = \int_0^d \rho\left(x\right)dx. \tag{4.9}$$

Очевидно, что если $d < +\infty$, то $r < +\infty$. Величина r называется кинетической толщиной слоя, которая пока неизвестна и подлежит дальнейшему определению. При решении задач течения газа в полупространстве, т.е. когда $d < +\infty$, такая необходимость отпадает. Задача намного сложнее для случая слоя конечной толщины $d < +\infty$.

После полного решения задачи возвращение к исходному аргументу x может быть осуществлено по формуле

$$x\left(\tau\right) = \int_0^\tau \frac{d\tau'}{R\left(\tau'\right)}, \qquad R\left(\tau\left(x\right)\right) = \rho\left(x\right). \tag{4.10}$$

Идея перехода к новому аргументу исходит из работ академика В. А. Амбарцумяна при рассмотрении задачи переноса излучения в спектральных линиях в среде, состоящей из двухуровневых атомов (см [4]). Этот подход Амбарцумяном был назван методом самосогласованных оптических глубин (СОГ).

В работах [17,18] Н. Б. Енгибаряном впервые был предложен метод определения оптической толщины $r < +\infty$ слоя. В дальнейшем метод СОГ был применен в ряде других работ (см. [7,10 34,40,64]).

После перехода к новому аргументу τ, введем следующие обозначения:

$$F\left(\tau(x),\vec{s}\right)=f\left(x,\vec{s}\right);\ R\left(\tau(x)\right)=\rho(x);\ \nu\left(\tau(x)\right)=u(x). \tag{4.11}$$

Тогда граничная задача (4.5)-(4.7) упрощается, однако, оставаясь все ещё нелинейной, принимает вид:

$$s_1\frac{\partial F\left(\tau,\vec{s}\right)}{\partial\tau}=\frac{R(\tau)}{(\pi)^{\frac{3}{2}}}e^{-\left(\vec{s}-\vec{v}(\tau)\right)^2}-F\left(\tau,\vec{s}\right), \tag{4.12}$$

$$F^+\left(0,\vec{s},\right)=\frac{e^{-\frac{(s+\omega)^2}{T_+}}}{\left(\pi T_+\right)^{\frac{3}{2}}}\rho_+\quad,\qquad s_1>0\ , \tag{4.13}$$

$$F^-\left(r,\vec{s}\right)=\frac{e^{-\frac{(s-\omega)^2}{T_-}}}{\left(\pi T_-\right)^{\frac{3}{2}}}\rho_-,\ s_1<0\ . \tag{4.14}$$

Здесь

$$\vec{v}(\tau)=\left(0,\nu(\tau),0\right);\qquad \nu(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}p_2F\left(\tau,\vec{p}\right)d^3p, \tag{4.15}$$

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F\left(\tau,\vec{p}\right)d^3p\ . \tag{4.16}$$

Ниже покажем, что нелинейная граничная задача (4.12)-(4.16) может быть сведена к решению линейных интегральных уравнений относительно $R_r(\tau)$ и $\mathrm{F}_r(\tau)=\nu_r(\tau)R_r(\tau)$.

Действительно, из (4.12) с учетом (4.13)-(4.14) имеем

$$F^+\left(\tau,\vec{s}\right)=\frac{e^{-\frac{(\vec{s}+\vec{\omega})^2}{T_+}}}{(\pi T_+)^{\frac{3}{2}}}\rho_+e^{-\frac{\tau}{s_1}}+\int_0^\tau\frac{e^{-\frac{(\tau-t)}{s_1}}e^{-\left(\vec{s}-\vec{v}(t)\right)^2}}{\pi^{\frac{3}{2}}}R(t)\frac{dt}{s_1}\quad, \tag{4.17}$$

$$F^-\left(\tau,\vec{s}\right)=\frac{e^{-\frac{(\vec{s}-\vec{\omega})^2}{T_-}}}{(\pi T_+)^{\frac{3}{2}}}\rho_-e^{-\frac{(r-\tau)}{s_1}}+\int_\tau^r\frac{e^{-\frac{(t-\tau)}{s_1}}e^{-\left(\vec{s}-\vec{v}(t)\right)^2}}{\pi^{\frac{3}{2}}}R(t)\frac{dt}{s_1}\quad. \tag{4.18}$$

Подставляя (4.17), (4.18) в (4.15) и (4.16) и произведя интегрирование будем иметь

$$R_r(\tau)=h_r(\tau)+\int_0^rK(\tau-t)R_r(t)dt, \tag{4.19}$$

$$\mathrm{F}_r(\tau)=g_r(\tau)+\int_0^rK(\tau-t)\mathrm{F}_r(t)dt\ , \tag{4.20}$$

где

$$K\left(\tau\right)=\int_0^\infty e^{-|\tau|p}G_2\left(p\right)dp, \qquad G_2\left(p\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-\frac{1}{p^2}}}{p}, \tag{4.21}$$

$$h_r\left(\tau\right)=\int_0^\infty\left[\mathrm{e}^{-\tau p}G_+\left(p\right)+e^{-(r-\tau)?}G_-\left(p\right)dp\right], \tag{4.22}$$

$$g_r\left(\tau\right)=\omega\int_0^\infty\left[e^{-(r-\tau)p}G_-\left(\rho\right)-e^{-\tau p}G_+\left(p\right)\right]dp, \tag{4.23}$$

$$G_\pm\left(p\right)=\frac{\rho_\pm}{\sqrt{\pi T_\pm}p^2}e^{-\frac{1}{p^2T_\pm}}\quad. \tag{4.24}$$

Следует отметить, что первоначальная нелинейная задача (4.15)-(4.17) точно линеаризовалась и свелась к решению двух несвязанных скалярных линейных интегральных уравнений (4.19)-(4.20).

Заметим, что оператор

$$\left(\hat{K}f\right)\left(\tau\right)=\int_0^r K\left(\tau-t\right)f\left(t\right)dt,\ 0\le\tau\le r \tag{4.25}$$

является сжимающим при всех значениях $r<+\infty$ в каждом из банаховых пространств $L_p\left(0,r\right),\ \ 1\le p\le+\infty;\ C\left[0,r\right],$ что непосредственно следует из неравенства

$$\lambda\left(r\right)=\int_{-r}^r K\left(x\right)dx=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-rs}e^{-\frac{1}{s^2}}\frac{ds}{s^2}<1. \tag{4.26}$$

Следовательно, уравнения (4.19) и (4.20) имеют единственные решения в указанных классах функций.

Перейдем к определению кинетической толщины r слоя. Из (4.10) имеем

$$d=x(r)=\int_0^r\frac{d\tau}{R_r\left(\tau\right)}\ . \tag{4.27}$$

Поскольку $x\left(0\right)=0$, $x\left(r\right)>0,$ то в силу непрерывности существует некоторая окрестность $\left[0,r_0\right]$, где $Q\left(r\right)$ сохраняет знак, r_0 - точка максимума. Итак, $x\left(r\right)\uparrow$ по r на $\left[0,r_0\right]$ и $x\left(r\right)\downarrow$ по r на $[r_0,+\infty)$. В силу монотонности из (4.27) следует, что в каждом из множеств $\left[0,r_0\right]$ или $[r_0,+\infty)$ можно определить толщину слоя посредством

$$r=x^{-1}\left(d\right), \tag{4.28}$$

где x^{-1} является обратной к функции x на отрезке $\left[0,r_0\right]$ или на $[r_0,+\infty)$.

В конце параграфа (см. приложение) на простейшем примере реализован подход определения кинетической толщины слоя r в зависимости от геометрической.

Итак справедлива:

Теорема 4.1. *Пусть функции* $R_r(\tau)$ *и* $\mathrm{F}_r(\tau)$ *являются непрерывными на* $[0,\mathrm{r}]$ *решениями следующих линейных несвязанных интегральных уравнений вида (4.19) , (4.20.*

Тогда решение нелинейной граничной задачи (0.33)-(0.36) выражается через функции $R_r(\tau)$ *и* $\mathrm{F}_r(\tau)$ *согласно следующим формуамл*

$$\rho(\mathrm{x}) = R_r(\tau(\mathrm{x})), \quad u(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{F}_r(\tau(\mathrm{x}))}{R_r(\tau(\mathrm{x}))}$$

где $\tau(\mathrm{x})$ *является обратной функцией функции* $x(\tau) = \int\limits_0^\tau \frac{d\tau'}{R_r(\tau')}$.

Кинетическая толщина r определяется согласно формуле $r = x^{-1}(d)$,

где x^{-1} *является обратной к функции* $x(r) = \int\limits_0^r \frac{d\tau'}{R_r(\tau')}$.

Замечание 2. *Существование и единственность непрерывного решения уравнения (27) (аналогично (28)) установливается в ходе доказательства теоремы 4.1.*

Замечание3. *Существование обратной к функции* $x(\tau)$ *допольнительно установливается в ходе доказательстве теоремы.*

Заметим, что если $\omega = 0$, то $g_r(\tau) = 0$ и уравнение (4.20) имеет только тривиальное решение.

Остался открытым вопрос решения уравнения (4.19) (или (4.20)). Впервые в работе [15] был предложен метод решения линейных задач переноса в однородной плоскопараллельной среде конечной толщины, основанный на установлении связи между решениями этой задачи с решением соответствующей задачи в полупространстве. В дальнейшем указанный метод был развит для консервативного случая (см. [37]). Ниже мы применим этот подход к уравнениям (4.19), (4.20), что даст возможность определить функцию $x(r)$, а тем самым и кинетическую толщину r. Следуя работе [15] рассмотрим следующие вспомогательные уравнения:

$$Y_r(\tau,p) = e^{-\tau p} + \int\limits_0^r K(\tau - t) Y_r(t,p) dt, \tag{4.29}$$

$$Y_r(r-\tau,p) = e^{-(r-\tau)p} + \int\limits_0^r K(\tau - t) Y_r(r-t,p) dt, \tag{4.30}$$

$$Y_\infty(\tau,p) = e^{-\tau p} + \int\limits_0^\infty K(\tau - t) Y_\infty(t,\ p) dt. \tag{4.31}$$

Очевидно, что решения исходных уравнений (4.19)-(4.20) записываются через функцию $Y_r(\tau,p)$ посредством следующих формул:

$$R_r(\tau) = \int_0^\infty \left[Y_r(\tau,p) G_+(p) + Y_r(r-\tau,p) G_-(p) \right] dp, \tag{4.32}$$

$$\mathrm{F}_r(\tau) = \omega \int_0^\infty \left[Y_r(r-\tau,p) G_-(p) - Y_r(\tau,p) G_+(p) \right] dp. \tag{4.33}$$

Установим связь между Y_r и Y_∞. Из (4.31) имеем

$$Y_\infty(\tau,p) = e^{-\tau p} + \int_0^r K(\tau - t) Y_\infty(t, p) dt +$$

$$+\int_0^\infty e^{\tau s} \int_r^\infty e^{-ts} G_2(s) Y_\infty(t,p) dt ds. \tag{4.34}$$

Сравнивая правые части уравнений (4.34), (4.29) и (4.30) , в силу линейности будем иметь

$$Y_\infty(\tau,p) = Y_r(\tau,p) + \int_0^\infty U_r(p,p') Y_r(r-\tau, p') G_2(p') dp', \tag{4.35}$$

где

$$U_r(p,p') = e^{rp'} \int_r^\infty e^{-tp'} Y_\infty(t,p) dt, \tag{4.36}$$

а $G(p)$ задается согласно (4.21).

Вопросу построения аналитического решения уравнения (4.31) посвящены многочисленные работы, (см. [15,16,36]), поэтому на нем мы останавливаться не будем. Решение уравнения (4.31) с ядром (4.21) на полуоси намного легче по сравнению с решением соответствующего уравнения (4.29) на конечном промежутке. Соотношение (4.35) дает возможность определить $Y_r(\tau,p)$(а тем самым и $R_r(\tau)$, $\mathrm{F}_r(\tau)$ по формулам (4.32), (4.33) соответственно) по известной функции $Y_\infty(\tau,p)$ (см. приложение).

ПРИЛОЖЕНИЕ

В настоящем пункте осуществим вышеизложенный подход определения кинетической толщины слоя на простейшем примере, а также приведем некоторые результаты численных расчетов.

Рассмотрим следующую простую нелинейную граничную задачу:

$$\pm \frac{df^\pm(x)}{dx} = \rho(x)\left[-f^\pm(x) + \rho(x) \right], \tag{п.1}$$

$$\rho(x) = \frac{1}{2}\left[f^+(x) + f^-(x) \right], \tag{п.2}$$

$$f^+(0) = \rho_+; \quad f^-(d) = \rho_-. \tag{п.3}$$

Уравнением (п.1) описывается движение частиц вперед и назад. Пластинки неподвижны $\omega = 0$, следовательно скорость газа равна нулю.

В (п.1) перейдем к новому аргументу

$$d\tau = \rho\left(x\right)dx, \quad \tau\left(x\right) = \int_0^x \rho\left(x'\right)dx'; \quad r = \int_0^d \rho\left(x\right)dx. \tag{п.4}$$

Тогда граничная задача (п.1)-(п.3) может быть сведена к следующему интегральному уравнению относительно функции $R_r\left(\tau\left(x\right)\right) = \rho\left(x\right)$:

$$R_r\left(\tau\right) = \frac{\rho_+}{2}e^{-\tau} + \frac{\rho_-}{2}e^{-\left(r-\tau\right)} + \int_0^r W\left(\tau - t\right)R_r\left(t\right)dt \tag{п.5}$$

с ядром Лалеско

$$W\left(\tau\right) = \frac{1}{2}e^{-\left|\tau\right|}, \quad \tau \in \left[-r,\ r\right]. \tag{п.6}$$

Решение уравнения (п.5) можно представить в виде

$$R_r\left(\tau\right) = \frac{\rho_+}{2}Y_r\left(\tau\right) + \frac{\rho_-}{2}Y_r\left(r - t\right), \tag{п.7}$$

где $Y_r\left(\tau\right)$ удовлетворяет уравнению

$$Y_r\left(\tau\right) = e^{-\tau} + \int_0^r W\left(\tau - t\right)Y_r\left(t\right)dt. \tag{п.8}$$

Рассмотрим уравнение (п.8) при $r = +\infty$

$$Y_\infty\left(\tau\right) = e^{-\tau} + \int_0^\infty W\left(\tau - t\right)Y_\infty\left(t\right)dt. \tag{п.9}$$

С учетом (п.6) перепишем уравнения (п.9) в виде

$$Y_\infty\left(\tau\right) = e^{-\tau} + e^{-\left(r-\tau\right)}a\left(r\right) + \int_0^r W\left(\tau - t\right)Y_\infty\left(t\right)dt, \tag{п.10}$$

где

$$a\left(r\right) = \frac{e^r}{2}\int_r^\infty e^{-t}Y_\infty\left(t\right)dt. \tag{п.11}$$

Очевидно, что

$$Y_\infty\left(\tau\right) = Y_r\left(\tau\right) + a\left(r\right)Y_r\left(r - \tau\right). \tag{п.12}$$

Из (п.12) следует

$$Y_r\left(\tau\right) = \frac{Y_\infty\left(\tau\right) - a\left(r\right)Y_\infty\left(r - \tau\right)}{1 - a^2\left(r\right)}. \tag{п.13}$$

Легко можно убедиться, что общее положительное решение уравнения (п.9) имеет вид

$$Y_\infty\left(\tau\right) = 2 + c\left(\tau + 1\right), \tag{п.14}$$

где $c > 0$, произвольная постоянная. Из (п.13) и (п.11) получим

$$Y_r(\tau) = \frac{c\tau}{1 - a(r)} + \frac{c + 2 - ca(r)r}{1 - a^2(r)}, \qquad \tau \in [0, r], \tag{п.15}$$

где

$$a(r) = \frac{2(c+1) + cr}{2}. \tag{п.16}$$

Из (п.16) нетрудно убедиться, что при любых значениях $c > 0$ имеют место

$$\frac{c}{1 - a(r)} = -\frac{2}{2+r}; \qquad \frac{c + 2 - rca(r)}{1 - a^2(r)} = \frac{2(1+r)}{2+r},$$

т.е. единственное решение уравнения (п.8) имеет вид:

$$Y_r(\tau) = \frac{-2\tau}{2+r} + \frac{2(1+r)}{2+r}. \tag{п.17}$$

Прямой подстановкой можно убедиться, что функция $Y_r(\tau)$, задаваемая согласно (п.17), удовлетворяет уравнению (п.8).

Решение исходного уравнения (п.5) выражается через функцию $Y_r(\tau)$:

$$R_r(\tau) = \frac{\rho_+}{2} Y_r(\tau) + \frac{\rho_-}{2} Y_r(r - \tau) = a_1(r)\tau + a_2(r), \tag{п.18}$$

где

$$a_1(r) = \frac{(\rho_- - \rho_+)}{2+r}; \; a_2(r) = \frac{(\rho_+ + \rho_-) + \rho_+ r}{2+r}. \tag{п.19}$$

Используя решение уравнения (п.9), найдем связь между исходным и новым аргументами

$$x(\tau) = \int_0^\tau \frac{d\tau'}{Y_\infty(\tau')} = ln\left(\frac{c\tau}{c+2} + 1\right) \quad \text{или} \quad \tau(x) = \frac{(c+2)e^x}{c} - \frac{(c+2)}{c}. \tag{п.20}$$

Таким образом, решение уравнения (п.9) - линейная функция

$$Y_\infty(\tau) = c(\tau + 1) + 2, \tag{п.21}$$

в то время как решение исходной нелинейной задачи (п.1), (п.2) для полупространства с граничными условиями

$$f^+(0) = \rho_+, \quad f^-(x) = O(e^x) \quad \text{при} \, x \to +\infty \tag{п.22}$$

имеет вид

$$Y_\infty(x) = Y_\infty(\tau(x)) = (c+2)e^x. \tag{п.23}$$

Перейдем к определению кинетической глубины и толщины слоя. Имеем

$$x(\tau) = \int_0^\tau \frac{dt}{R_r(t)}, \qquad d = \int_0^r \frac{dt}{R_r(t)} = x(r). \tag{п.24}$$

где

$$x(r)=\begin{cases}\dfrac{r}{a_2(r)}, & \text{если}\, a_1(r)=0,\\ \dfrac{1}{a_1(r)}ln\left(\dfrac{a_1(r)r+a_2(r)}{a_2(r)}\right), & \text{если}\, a_1(r)\neq 0.\end{cases} \qquad (п.25)$$

Очевидно, что функция $x(r)$ монотонно возрастает на $[0,+\infty)$. Следовательно, существует $x^{-1}(r)$ на $[0,+\infty)$.

Решением первоначальной нелинейной граничной задачи будет функция

$$\rho_r(x)=R_r(\tau(x))=a_2(r)e^{a_1(r)x}, \quad 0\le x\le d,\ 0\le\tau\le r. \qquad (п.26)$$

Итак решение $R_r(\tau)$ линеаризованного уравнения (п.5) линейно растет по τ в интервале $0\le\tau\le r$ (см. п.18), в то время как решение исходного нелинейного уравнения растет экспоненциально по x в интервале $0\le x\le d$ (см. п26).

Ниже приведена таблица значений кинетической толщины слоя r при различных значениях ρ_+ и ρ_-. В случае $\rho_+=\rho_-$ из (п.24) видно, что $r=\rho_+ d$.

Таблица.

	r	0	0.5	1	1.5	2	2.5	5	7	9	12	15
$\rho_- = 4$ $\rho_+ = 1$	d	0	0.2	0.41	0.61	0.83	1.04	2.14	3.03	3.94	5.3	6.68
$\rho_- = 2$ $\rho_+ = 1$	d	0	0.33	0.67	1.01	1.35	1.69	3.40	4.776	6.156	8.229	10.30
$\rho_- = 1$ $\rho_+ = \frac{1}{5}$	d	0	0.84	1.69	2.57	3.466	4.375	9.07	12.922	16.827	22.737	28.686
$\rho_+ = 1$ $\rho_- = 1$	d	0	0.5	1	1.5	2	2.5	5	7	9	12	15

Значения кинетической толщины слоя r в зависимости от геометрической d при различных значениях ρ_+ и ρ_-.

ГЛАВА 2

ВОПРОСЫ РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНОГО СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА В РАМКАХ МОДЕЛИ ШАХОВА

В главе 2 рассматривается стационарное нелинейное уравнение Больцмана в одномерном приближении в рамках модели Шахова для классической задачи течения газа в плоском слое, ограниченном двумя бесконечными параллельными пластинками.

В §5 формулируется постановка задачи. Удается отчасти упростить нелинейность рассматриваемой системы путем перехода к новому аргументу, который зависит от решения самой задачи. Задача сводится к системе нелинейных интегральных уравнений относительно четырех макропараметров: плотности, потока вектора энергии, температуры и скорости газа. Структура получаемой системы достаточно сложна: с одной стороны, нелинейность интегральных уравнений системы, с другой, отсутствие свойства монотонности соответствующего интегрального оператора, что весьма усложняет построение неподвижной точки. Тем не менее исходя из физических соображений и используя специфичность полученной новой нелинейной системы предлагается метод построения приближенного решения указанной нелинейной системы, сведением ее к системе линейных интегральных уравнений относительно плотности и вектора энергии и к скалярному нелинейному интегральному уравнению типа Урысона относительно тевмпературы.

§6 посвящен изучению и решению получаемой линейной системы интегральных уравнений относительно плотности и проекции вектора потока энергии. Доказаны существование и единственность решения системы линейных интегральных уравнений со знакопеременным ядром в пространстве двумерных вектор столбцов $E^2[0,\mathrm{r}]$ с элементами из банахова пространства $E[0,\mathrm{r}]$.

В § 7 изучается нелинейное скалярное интегральное уравнение типа Урысона относительно температуры. Доказано существование положительного решения этого уравнения. Для решения получены оценки снизу и интегральная оценка сверху.

В §8 рассматривается линейная система интегральных уравнений относительно макропараметров, получаемая в результате линеаризации первоначальной линейной системы. Найдено максимальное значение расстояния между пластинками, при котором указанная система однозначно разрешима. Выполнены численные расчеты и найден температурный скачок на стенках как в линейном, случае, так и в случае нелинейной системы по предложенной нами схеме. Сравнительный анализ численных расчетов в линейном и нелинейном случаях показывает, что они достаточно близки. Последнее может служить поводом для обоснования (на эвристическом уровне) предложенного нами подхода приближенного решения первоначальной нелинейной системы.

В §9 Рассмотривается одна нелинейная граничная задача относителцно скорости течения газа в рамках модели Шахова в предположении о постоянстве макроскопических параметров; задачу удается точно линеаризовать и свести к неоднородному линейному интегральному уравнению. Доказанывается теоре-ма существования и единственности непрерывного положительного решения полученного линейного интегрального уравнения. Показано,что если стенки неподвижны, то уравнение имеет только тривиальное решение, что с физической точки зрения вполне естественно.

§5. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ПЕРЕХОД К КИНЕТИЧЕСКОМУ РАССТОЯНИЮ

Рассмотрим задачу течения газа в плоском слое, ограниченном твердыми параллельными пластинками $x=0$ и $x=d$. Обозначим через $f\left(x,\vec{s}\right)$ искомую функцию распределения частиц по скоростям $\vec{s}=\left(s_1,s_2,s_3\right)$ - газ течет вдоль оси OY со скоростью $\vec{u}\left(x\right)=\left(0,u\left(x\right),0\right)$. Стационарное уравнение Больцмана в рассматриваемом одномерном случае имеет вид (см. например [20]).

$$s_1\frac{\partial f\left(x,\vec{s}\right)}{\partial x}=\mathrm{F}\ (f(x,\vec{s}))\tag{5.1}$$

где $\mathrm{F}\ (f(x,\vec{s}))$ - истинный интеграл столкновений (см. (0.1), (0.2)).

Согласно модели Шахова точное уравнение Больцмана (5.1) заменяем приближенным (см [58,59])

$$s_1\frac{\partial f\left(x,\vec{s}\right)}{\partial x}=\upsilon(x)\left[f_0^{Sh}\left(x,\vec{s}\right)-f\left(x,\vec{s}\right)\right],\tag{5.2}$$

где

$$f_0^{Sh}\left(x,\vec{s}\right)=f_0^{loc}(x,\vec{s})\left(1+\frac{\alpha s_1 q(x)}{\rho(x)\mathrm{T}^2(x)}\left(\frac{\left(\vec{s}-\vec{u}(x)\right)^2}{T(x)}-\frac{5}{2}\right)\right).\tag{5.3}$$

Здесь $f_0^{loc}(x,\vec{s})$ - задается согласно (0.5), $\alpha=\frac{4}{5}\left(1-P_r\right)$, $\rho(x)$, $q(x)$, $T(x)$ и $u(x)$ - плотность, проекция вектора потока. $\vec{q}(x)=(q(x),0,0)$ - температура и скорость газа соответственно , которые выражаются через функцию распределения посредством:

$$\rho(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,\vec{s})d^3s,\tag{5.4}$$

$$q(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}s_1(\vec{s}-\vec{u}(x))^2f(x,\vec{s})d^3s,\tag{5.5}$$

$$\rho(x)T(x)=\frac{2}{3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(\vec{s}-\vec{u}(x))^2f(x,\vec{s})d^3s,\tag{5.6}$$

$$\rho(x)u(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}s_2f(x,\vec{s})d^3s.\tag{5.7}$$

Наконец $\upsilon(x)$ - частота столкновений:

$$\upsilon(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,\vec{s})|g|\sigma d^3s=\beta\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,\vec{s})d^3s=\beta\rho(x)\tag{5.8}$$

Здесь σ - сечение столкновений, $|g|$ - относительная скорость сталкивающихся частиц.

В (5.8) предполагалось, что сечение столкновений обратно пропорционально относительной скорости g сталкивающихся частиц (псевдомаксвелловские молекулы), поэтому частота столкновений не зависит от скорости молекул, β - коэффициент пропорциональности, α -параметр характеризующий физическое состояния газа: $\alpha=\frac{4}{5}(1-P_r)$, где P_r -число Прандтля. Заметим, что, когда $\alpha=0\left(P_r=0\right)$ модель Шахова переходит в модель БГК.

Модельное уравнение Больцмана (1.2) перепишем в виде:

$$\pm s_1\frac{\partial f^{\pm}\left(x,\vec{s}\right)}{\partial x}+\upsilon(x)f^{\pm}\left(x,\vec{s}\right)=\upsilon(x)f_0^{Sh}\left(x,\vec{s}\right), \tag{5.9}$$

где $f^{-}\left(x,\vec{s}\right)$ и $f^{+}\left(x,\vec{s}\right)$ функции распределения частиц, летящих к стенке ($s_1<0$) и отлетающих от нее ($s_1>0$) (см. формулы (4.6), (4.7) Главы 1).

К уравнениям (5.9) присоединим граничные условия:

$$f^{+}\left(0,\vec{s}\right)=\frac{\rho_{+}e^{-\frac{|\vec{s}|^2}{T_+}}}{\left(\pi T_+\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{5.10}$$

$$f^{-}\left(d,\vec{s}\right)=\frac{\rho_{-}e^{-\frac{|\vec{s}|^2}{T_-}}}{\left(\pi T_-\right)^{\frac{3}{2}}}\quad . \tag{5.11}$$

Здесь $\rho_{\pm}$ - плотность частиц, отлетающих от нижней и верхней стенок с температурами $T_{\pm}$ соответственно. Предполагается, что стенки неподвижны.

К уравнению (5.9) применим метод самосогласованных оптических глубин Амбарцумяна аналогично как это осуществлялось в §4.

В уравнении (5.9) перейдем к кинетическому расстоянию $\tau(x)$:

$$d\tau=\upsilon(x)dx;\ \tau(x)=\int_0^x\upsilon(x)dx'=\beta\int_0^x\rho(x')dx'\ . \tag{5.12}$$

Схема возвращения к исходному аргументу x и определения кинетической толщины r осуществляются идентично (как в §4) и на этом останавливаться не будем.

Введем следующие обозначения

$$F(\tau(x),\vec{s})=f\left(x,\vec{s}\right);\ F_0^{Sh}(\tau(x),\vec{s})=f_0^{Sh}\left(x,\vec{s}\right);\varphi(\tau(x))=\rho(x);\ \psi(\tau(x))=q(x);\ \chi(\tau(x))=T(x) \tag{5.13}$$

$$\vec{v}(\tau(x))=\vec{u}(x)$$

В новых обозначениях граничная задача (5.9)-(5.11) примет вид:

$$\pm s_1 \frac{\partial F^{\pm}(\tau,\vec{s})}{\partial \tau} + F^{\pm}(\tau,\vec{s}) = F_0^{Sh}(\tau,\vec{s}) \tag{5.14}$$

$$F^{+}(0,\vec{s}) = \frac{\rho_+ e^{-\frac{|\vec{s}|^2}{T_+}}}{(\pi T_+)^{\frac{3}{2}}} \tag{5.15}$$

$$F^{-}(r,\vec{s}) = \frac{\rho_- e^{-\frac{|\vec{s}|^2}{T_-}}}{(\pi T_-)^{\frac{3}{2}}} \ . \tag{5.16}$$

Как уже отмечалось (см §4) главным вопросом является определение кинетической толщины r слоя. В граничном условии (5.16) r играет роль параметра.

После полного решения граничной задачи (5.14)-(5.16) следует перейти к исходному аргументу x по формуле

$$x(\tau) = \int_0^{\tau} \frac{d\tau'}{\beta\varphi(\tau')} \quad , \tag{5.17}$$

а с помощью соотношения

$$x(r) = d = \frac{1}{\beta}\int_0^{r} \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} \tag{5.18}$$

определить кинетическую толщину r слоя по известной геометрической

толщине d

$$r = x^{-1}(d) \ . \tag{5.19}$$

После перехода к новому аргументу первоначальная нелинейная граничная задача (5.9)-(5.11) упростилась, но осталось нелинейной. С учетом граничных условий (5.15), (5.16) из (5.14) имеем

$$F^{+}(\tau,\vec{s}) = \frac{\rho_+ e^{-\frac{|\vec{s}|^2}{T_+}} e^{-\frac{\tau}{s_1}}}{(\pi T_+)^{\frac{3}{2}}} + \int_0^{\tau} e^{-\frac{(\tau-t)}{s_1}} F_0^{Sh}(t,\vec{s}) \frac{dt}{s_1} \ , \tag{5.20}$$

$$F^{-}(\tau,\vec{s}) = \frac{\rho_- e^{-\frac{|\vec{s}|^2}{T_-}} e^{-\frac{(r-\tau)}{s_1}}}{(\pi T_-)^{\frac{3}{2}}} + \int_{\tau}^{r} e^{-\frac{(t-\tau)}{s_1}} F_0^{Sh}(t,\vec{s}) \frac{dt}{s_1} \quad . \tag{5.21}$$

Здесь

$$F_0^{Sh}\left(\tau,\vec{s}\right)=\frac{\varphi(\tau)}{\left(\pi\chi\left(\tau\right)\right)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{\left(\vec{s}-\vec{v}(\tau)\right)^2}{\chi(\tau)}}\left(1+\frac{\alpha s_1\psi(\tau)}{\varphi(\tau)\chi^2\left(\tau\right)}\left(\frac{\left(\vec{s}-\vec{v}(\tau)\right)^2}{\chi(\tau)}-\frac{5}{2}\right)\right)\quad . \tag{5.22}$$

Функции φ,ψ,χ,v являются моментами искомой функции распределения:

$$\varphi(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[F^{+}(\tau,\vec{s})+F^{-}(\tau,\vec{s})\right]ds_3ds_2ds_1, \tag{5.23}$$

$$\psi(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}s_1(\vec{s}-\vec{v}(x))^2\left[F^{+}(\tau,\vec{s})+F^{-}(\tau,\vec{s})\right]ds_3ds_2ds_1, \tag{5.24}$$

$$\chi(\tau)\varphi(\tau)=\frac{2}{3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(\vec{s}-\vec{v}(x))^2\left[F^{+}(\tau,\vec{s})+F^{-}(\tau,\vec{s})\right]ds_3ds_2ds_1, \tag{5.25}$$

$$v(\tau)\varphi(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}s_2\left[F^{+}(\tau,\vec{s})+F^{-}(\tau,\vec{s})\right]ds_3ds_2ds_1. \tag{5.26}$$

Подставляя (5.20) , (5.21) в (5.23)-(5.26) с учетом (5.22), проводя интегрирование и трудоемкие, но элементарные вычисления, получаем следующую систему нелинейных интегральных уравнений относительно искомых функций φ,ψ,χ,v.

$$\varphi(\tau)=h_1(\tau)+\int_0^r W_1(\tau,t,\chi(t))\varphi(t)dt+\int_0^r W_2(\tau,t,\chi(t))\psi(t)dt, \tag{5.27}$$

$$\psi(\tau)=h_2(\tau)+\int_0^r W_3(\tau,t,\chi(t))\varphi(t)dt+\int_0^r W_4(\tau,t,\chi(t))\psi(t)dt, \tag{5.28}$$

$$\varphi(\tau)\chi(\tau)=h_3(\tau)+\int_0^r W_5(\tau,t,\chi(t))\varphi(t)dt+\int_0^r W_6(\tau,t,\chi(t))\psi(t)dt, \tag{5.29}$$

$$\varphi(\tau)v(\tau)=\int_0^r W_1(\tau,t,\chi(t))\varphi(t)v(t)dt+\int_0^r W_4(\tau,t,\chi(t))\psi(t)v(t)dt, \tag{5.30}$$

$$0\le\tau\le r\,.$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$h_i(\tau)=\int_0^{\infty}\left[e^{-\frac{r}{s}}G_{+}^{(i)}(s)+e^{-\frac{(r-\gamma)}{s}}G_{-}^{(i)}(s)\right]ds,\ i=1,2,3, \tag{5.31}$$

$$G_{\pm}^{(1)}\left(s\right)=\frac{\rho_{\pm}}{\sqrt{\pi T_{\pm}}}e^{-\frac{|\vec{s}|^2}{T_{\pm}}}, \tag{5.32}$$

$$G_{\pm}^{(2)}(s)=\frac{\rho_{\pm}\sqrt{T_{\pm}}}{\sqrt{\pi}}se^{-\frac{|\vec{s}|^2}{T_{\pm}}}\left(\frac{s^2}{T_{\pm}}+1+\frac{v^2}{T_{\pm}}\right), \tag{5.33}$$

$$G_{\pm}^{(3)}(s)=\frac{2}{3s}G_{\pm}^{(2)}(s), \tag{5.34}$$

$$W_1(\tau,t,\chi)=\frac{1}{\sqrt{\pi\chi}}\int_0^{\infty}e^{-\frac{|\tau-t|}{s}}e^{-\frac{s^2}{\chi}}\frac{ds}{s}, \tag{5.35}$$

$$W_2(\tau,t,\chi)=\frac{\alpha}{\sqrt{\pi\chi}}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\frac{|\tau-t|}{s}}e^{-\frac{s^2}{\chi}}}{\chi^3}\left(s^2-\frac{3}{2}\chi\right)ds, \tag{5.36}$$

$$W_3(\tau,t,\chi)=\frac{\sqrt{\chi}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-\frac{|\tau-t|}{s}}e^{-\frac{s^2}{\chi}}\left(\frac{s^2}{\chi}+1\right)ds, \tag{5.37}$$

$$W_4(\tau,t,\chi)=\frac{\alpha}{\sqrt{\pi\chi}}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\frac{|\tau-t|}{s}}e^{-\frac{s^2}{\chi}}}{\chi^3}s\left(s^4-\frac{s^2}{2}\chi-\frac{\chi^2}{2}\right)ds, \tag{5.38}$$

$$W_5(\tau,t,\chi)=\frac{2}{3}\frac{\sqrt{\chi}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-\frac{|\tau-t|}{s}}e^{-\frac{s^2}{\chi}}\left(\frac{s^2}{\chi}+1\right)\frac{ds}{s}, \tag{5.39}$$

$$W_6(\tau,t,\chi)=\frac{2\alpha}{3\sqrt{\pi\chi}}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\frac{|\tau-t|}{s}}e^{-\frac{s^2}{\chi}}}{\chi^3}s\left(s^4-\frac{s^2}{2}\chi-\frac{\chi^2}{2}\right)ds\ . \tag{5.40}$$

В последующих параграфах займемся изучением и решением нелинейной системы (5.27)-(5.30).Интегральный оператор указанной системы не обладает свойством монотонности, что весьма усложняет построение неподвижной точки. Однако структура системы специфична. Во-первых, заметим, что при любом заданном виде функций φ,ψ,χ уравнение (5.30) обладает тривиальным решением. Это следует также из физических соображений, так как пластинки неподвижны. Далее, при любом заданном виде функции χ уравнение (5.27)-(5.28) образуют линейную систему интегральных уравнений относительно φ и ψ. Наконец, при заданных φ и ψ уравнение (5.29) представляет собой нелинейное скалярное интегральное уравнение типа Урысона относительно функции χ. Вышеизложенные соображения наводят на мысль предложить следующую схему решения системы (5.27)-(5.30). Сперва фиксируем тривиальное решение уравнения (5.30). Далее рассматриваем систему линейных интегральных уравнений (5.27)-(5.28) в предположении постоянства что $\chi\equiv1$. Тогда из (5.27) и (5.28) имеем

$$\varphi(\tau)=h_1(\tau)+\int_0^r K_{11}(\tau-t)\varphi(t)dt+\int_0^r K_{12}(\tau-t)\psi(t)dt,$$
$$\psi(\tau)=h_2(\tau)+\int_0^r K_{21}(\tau-t)\varphi(t)dt+\int_0^r K_{22}(\tau-t)\psi(t)dt, \tag{5.41}$$

где

$$K_{ij}(\tau)=\int_0^\infty e^{-\frac{r}{s}}G_{ij}(s)ds,\ i=1,2, \qquad \tau\in[-r,r]\ , \tag{5.42}$$

$$G_{11}(s)=\frac{1}{\sqrt{\pi}s}e^{-s^2},\ G_{12}(s)=\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}s}e^{-s^2}\left(s^2-\frac{3}{2}\right), \tag{5.43}$$

$$G_{21}(s)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-s^2}(s^2+1),\ G_{22}(s)=\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\left(s^5-\frac{s^3}{2}-\frac{s}{2}\right), \tag{5.44}$$

а $h_i(\tau)\ (\tau=1,2)$ задается согласно (5.31)-(5.33).

Исходя из физических рассуждений упростим уравнение (5.29). Заметим, что второй интеграл по W_6 в уравнении (5.29) содержит вектор потока энергии. В приближении БГК модели $W_6=0$,так как при этом $\alpha=0\ (P_r=1)$.Поэтому функции $\chi(\tau)$и $\psi(\tau)$,входящие во второй интеграл уравнения (5.29), приближенно заменим, например, их значениями в свободномолекулярном режиме (см [20]):

$$\chi(\tau)\equiv T_0,\quad \psi(\tau)\equiv q_0,$$

$$T_0=\sqrt{T_+T_-},\ q_0=\frac{\sqrt{T_+}}{\sqrt{\pi}}\rho_+(T_+-T_-),\ \ q_0>0,\ \ (T_+>T_-)\,. \tag{5.45}$$

Для простоты примем $T_0\equiv 1$. Тогда уравнение (5.29) преобразуется к нелинейному интегральному уравнению типа Урысона относительно температуры χ

$$\varphi(\tau)\chi(\tau)=h(\tau)+\int_0^r W_5(\tau,t,\chi(t))\varphi(t)dt\ , \tag{5.46}$$

$$h(\tau)=\frac{2}{3}\frac{\alpha q_0}{\sqrt{\pi}}+\int_0^\infty\left[e^{-\frac{\tau}{s}}G_+(s)+e^{-\frac{(r-\tau)}{s}}G_-(s)\right]ds\,, \tag{5.47}$$

где

$$G_{\pm}(s)=\frac{2}{3\sqrt{\pi}}\rho_{\pm}\sqrt{T_{\pm}}e^{-\frac{s^2}{T_{\pm}}}\left(\frac{s^2}{T_{\pm}}+1\right)e^{-s^2}-\frac{2}{3\sqrt{\pi}}\left(s^5-\frac{s^3}{2}-\frac{s}{2}\right). \qquad (5.48)$$

§6 и §7 посвящены изучению вопросов разрешимости линейной системы интегральных уравнений (5.41) и нелинейного скалярного интегрального уравнения (5.46) соответственно.

§6.О РАЗРЕШИМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ (5.41)

В настоящем параграфе займемся вопросом разрешимости линейной системы (5.41).

Пусть E -одно из следующих банаховых пространств: $L_p[0,r],\ p\geq 1,\ M[0,r]$.

Обозначим $E^2 = E\times E$ - пространство двумерных вектор-столбцов с элементами из E. Пусть $\widehat{K}$ - матричный интегральный оператор вида

$$(\widehat{K}f)(x)=\int_0^r K(x-t)f(t)dt\ . \tag{6.1}$$

Введем следующую вектор-функцию:

$$\zeta=(\varphi,\psi)^T,$$

где T -знак транспонирования.

Рассмотрим отображение:

$$\zeta=\widehat{K}\eta\ . \tag{6.2}$$

Покажем, что в любом из пространств E^2 имеет место оценка

$$\|\zeta\|_{E^2}\leq \max(\lambda(r),\mu(r))\|\eta\|_{E^2}, \tag{6.3}$$

где

$$\lambda(r):=\|\widehat{K}_{11}\|_{L_1}+\|\widehat{K}_{12}\|_{L_1}\geq \|\widehat{K}_{11}\|_E+\|\widehat{K}_{12}\|_E, \tag{6.4}$$

$$\mu(r):=\|\widehat{K}_{21}\|_{L_1}+\|\widehat{K}_{22}\|_{L_1}\geq \|\widehat{K}_{21}\|_E+\|\widehat{K}_{22}\|_E. \tag{6.5}$$

Действительно,

$$\|\zeta\|_{E^2}\leq \|\widehat{K}\eta\|_{E^2}=\|\widehat{K}_{11}\eta_1+\widehat{K}_{12}\eta_2\|_E+\|\widehat{K}_{21}\eta_1+\widehat{K}_{22}\eta_2\|_E\leq$$

$$\leq\left(\|\widehat{K}_{11}\eta_1\|_E+\|\widehat{K}_{21}\|_E\right)\|\eta_1\|_E+\left(\|\widehat{K}_{12}\|_E+\|\widehat{K}_{22}\|_E\right)\|\eta_2\|_E\leq \max(\lambda(r),\mu(r))\cdot\|\eta\|_{E^2}. \tag{6.6}$$

Из (5.42)-(5.44) следует

$$\lambda(r)=\int_{-\infty}^r K_{11}(\tau)d\tau+\int_{-r}^r |K_{12}(\tau)|\,d\tau=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{r}{s}}e^{-s^2}ds+$$

$$+\frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\left(1-e^{-\frac{r}{s}}\right)s\left|s^2-\frac{3}{2}\right|ds, \tag{6.7}$$

$$\mu(r)=\int_{-\infty}^r K_{21}(\tau)d\tau+\int_{-r}^r |K_{22}(\tau)|\,d\tau=\frac{2}{\sqrt{\pi}}-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{r}{s}}e^{-s^2}(s^3+s)ds+$$

$$+\frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-s^2}\left(1-e^{-\frac{r}{s}}\right)s^2\left|s^4-\frac{s^2}{2}-\frac{1}{2}\right|ds. \qquad (6.8)$$

Заметим, что функции $\lambda(r)$ и $\mu(r)$ непрерывны, $\lambda(0)=0, \mu(0)=0, \lambda(r)>0, \mu(r)>0, \lambda(r)\uparrow$ по r, $\mu(r)\uparrow$по r, следовательно существуют r_1 и r_2, при которых $\lambda(r_1)<1, \mu(r_2)<1$. Для всех $0\le r\le r_1$ и $0\le r\le r_2$ имеют место $\lambda(\mathrm{r})<1, \mu(\mathrm{r})<1$. Тогда имеем

$$\sigma=\max(\lambda(r),\mu(r))<1. \qquad (6.9)$$

<u>Замечание 4.</u> *Численные расчеты на ЭВМ показали, что* $\lambda(r_1)<1$ *при* $r_1=0.85, \mu(r)<1$, *при* $r_2=0.9$, *т.е.* $r_m=0.85$. *Тогда* $\lambda(r_1)=0.991, \mu(r_2)=0.984$, *т.е. коэффициент сжатия равен* $\sigma=0.991$, *и интегральный оператор исходной системы (5.41) – сжимающий с коэффициентом сжатия* $\sigma<1$.

Решение $(\varphi,\psi)^T$ системы (5.41) строится с помощью следующих простых итераций:

$$\varphi^{(n+1)}(\tau)=h_1(\tau)+\int_0^r K_{11}(\tau-t)\varphi^{(n)}(t)dt+\int_0^r K_{12}(\tau-t)\psi^{(n)}(t)dt, \qquad (6.10)$$

$$\psi^{(n+1)}(\tau)=h_2(\tau)+\int_0^r K_{21}(\tau-t)\varphi^{(n)}(t)dt+\int_0^r K_{22}(\tau-t)\psi^{(n)}(t)dt, \qquad (6.11)$$

$$\varphi^{(0)}=0,\psi^{(0)}=0,\ n=1,2,3,... \qquad (6.12)$$

Итак, имеет место следующая

<u>Теорема 6.1.</u> *Пусть ядра* $K_{ij}(\tau)\ (i,j=1,2)$ *системы уравнении (5.41) задаются согласно (5.42)-(5.44). Тогда, при условии (6.9) система уравнений (5.41) имеет единственное решение в пространстве* $E^2[0,r]$ *Решением является предел итераций (6.10)-(6.12).*

§7. О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ (5.46)

В настоящем параграфе займемся вопросами разрешимости уравнения (5.46) при заданной непрерывной на $[0,r]$ функции $\varphi(\tau)$. Сперва убедимся, что функция $W_5(\tau,t,z)$ монотонна по третьему аргументу. Пусть

$$\gamma(\mathrm{z}) := \sqrt{z}e^{-\frac{s^2}{z}}\left(\frac{s^2}{z}+1\right),\ z\in[0,+\infty), s>0 \quad . \tag{7.1}$$

Так как для любого $s^2>0$ функция $\gamma(\mathrm{z})$ монотонно возрастает при $\mathrm{z}\in(0,+\infty)$, то функция W_5 (см.(5.39)) также монотонно возрастает по z. Теперь покажем, что $h(\tau)\geq 0$. Из (5.47), (5.49) имеем

$$h(\tau)=h_3(\tau)+\frac{2\alpha q_0}{3\sqrt{\pi}}\xi(\tau), \tag{7.1}$$

где $h_3(\tau)$ задается согласно (5.31),(5.32), а

$$\xi(\tau)=1-\int_0^\infty [e^{-\frac{r}{s}}+e^{-\frac{(r-\tau)}{s}}]se^{-s^2}\left(s^4-\frac{s^2}{2}-\frac{1}{2}\right)ds\,. \tag{7.2}$$

Из (7.2) имеем

$$\xi(\tau)=1+\int_0^1 [e^{-\frac{r}{s}}+e^{-\frac{(r-\tau)}{s}}]se^{-s^2}\left(s^2+\frac{1}{2}\right)(1-s^2)ds-\int_1^\infty [e^{-\frac{r}{s}}+e^{-\frac{(r-\tau)}{s}}]se^{-s^2}\left(s^2+\frac{1}{2}\right)(s^2-1)ds\,. \tag{7.3}$$

Наименьшее значение функции $e^{-\frac{r}{s}}+e^{-\frac{(r-\tau)}{s}}$ на отрезке $[0,r]$ при каждом фиксированном s равно $2e^{-\frac{r}{2s}}$, а наибольшее значение - $1+e^{-\frac{r}{2s}}$. Тогда из (7.3) получим

$$\xi(\tau)\geq 1+2\int_0^1 e^{-\frac{r}{2s}}e^{-s^2}s(1-s^2)\left(s^2+\frac{1}{2}\right)ds-\int_1^\infty (1+e^{-\frac{r}{s}})e^{-s^2}s(s^2-1)(s^2+1)ds\,.$$

Тогда при $r=0.85$ (см. замечание 1) имеем $\xi(\tau)\geq 0.079$. Поскольку $h_3(\tau)\geq 0$, то $h(\tau)\geq 0$.

Рассмотрим следующие итерации для уравнения (5.46)

$$\varphi(\tau)\chi^{(n+1)}(\tau)=h(\tau)+\int_0^r W_5(\tau,t,\chi(t))\varphi(t)dt \tag{7.4}$$

$$\chi^{(0)}(\tau)=\frac{h(\tau)}{\varphi(\tau)},\ \tau\in[0,r];\ n=0,1,2... \tag{7.5}$$

где φ -решение системы (5.41).

Интегрируя уравнение (7.4) по τ от 0 до r, с учетом (5.39) и монотонности функции W_5 получим

$$\int_0^r \varphi(\tau)\chi^{(n+1)}(\tau)d\tau \le \int_0^r h(\tau)d\tau + \int_0^r\int_0^r W_5(\tau,t,\chi^{(n+1)}(t))\varphi(t)dtd\tau =$$

$$= \int_0^r h(\tau)d\tau + \int_0^r \varphi(t)\chi^{(n+1)}(t)[1-\Gamma(t,\chi^{(n+1)}(t))]dt, \tag{7.6}$$

где

$$\Gamma(t,z) = \int_0^r W_5(\tau,t,z)d\tau = \frac{2}{3\sqrt{\pi z}}\int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{z}}\left(\frac{s^2}{z}+1\right)\left[e^{-\frac{t}{s}}+e^{-\frac{(r-t)}{s}}\right]ds\ . \tag{7.7}$$

Из (7.6) имеем

$$\int_0^r \varphi(\tau)\chi^{(n+1)}(t)\chi(t,\chi^{(n+1)}(t))dt \le C_r, \tag{7.8}$$

где

$$0 < C_r = \int_0^r h(\tau)d\tau = \frac{2\alpha q_0}{3\sqrt{\pi}} + \int_0^\infty s(G_+(s)+G_-(s))\left(1-e^{-\frac{r}{s}}\right)ds\ .$$

Функция $\Gamma(t,z)$ непрерывна по совокупности своих аргументов, а из (6.7) следует, что $z\Gamma(t,z)\uparrow$ по z. В силу, того, что $z\Gamma(t,z)\uparrow$ по z, $\chi^{(n+1)}(\tau)\ge\chi^{(n)}(\tau)$, имеем

$$\varphi(\tau)\chi^{(n+1)}(\tau)\Gamma(\tau,\chi^{(n+1)}(\tau)) \ge \varphi(\tau)\chi^{(n)}(\tau)\Gamma(\tau,\chi^{(n)}(\tau))\ . \tag{7.9}$$

Из (7.8) и (7.9) следует

$$\int_0^r \varphi(\tau)\chi^{(n)}(\tau)\Gamma(\tau,\chi^{(n)}(\tau))d\tau \le C_r\ . \tag{7.10}$$

Согласно вышеуказанным свойствам функций $\Gamma(t,z)$ и $z\Gamma(t,z)$ из (7.10) следует существование поточечного предела функциональной последовательности $\left\{\chi^{(n)}(\tau)\right\}_{n=0}^\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\chi^{(n)}(\tau)=\chi(\tau)$, причем

$$\int_0^r \varphi(\tau)\chi(\tau)\Gamma(\tau,\chi(\tau))d\tau \le C_r\ . \tag{7.11}$$

Итак имеет место

Теорема 7.1. *Пусть $\varphi(\tau)$-заданная непрерывная на $[0,r]$ функция, удовлетворяющая системе (5.41). Тогда нелинейное интегральное уравнение (5.46) имеет положительное решение. Имеют место следующие оценки сверху и снизу:*

$$\int_0^r \chi(t)\Gamma(t,\chi(t))d\tau \le \frac{C_r}{m};$$

$$\chi(t) \ge \frac{h(\tau)}{M},$$

где

$$0 < C_r = \int_0^r h(\tau)d\tau = \frac{2\alpha q_0}{3\sqrt{\pi}} + \int_0^\infty s(G_+(s) + G_-(s))\left(1 - e^{-\frac{r}{s}}\right)ds$$

$$m = \min_{t\in[0,r]} \varphi(t),\ M = \max_{t\in[0,r]} \varphi(t).$$

§8. ЛИНЕЙНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ (5.27)-(5.29)

Настоящий параграф посвящен рассмотрению линейного приближения первоначальной линейной системы (5.27)-(5.29). В линейном приближении искомые функции φ,ψ и χ представимы в виде

$$\varphi(\tau)=1+\Delta\varphi(\tau);\ \psi(\tau)=q_0+\Delta\psi(\tau);\ \ \chi(\tau)=1+\Delta\chi(\tau)\ , \tag{8.1}$$

где $\Delta\varphi,\Delta\psi,\Delta\chi$- возмущения плотности, потока энергии и температуры газа соответственно.

Линеаризуя функции $W_i(\tau,t,z)$ $(i=1,2,...,6)$ по z в окрестности нуля и ограничиваясь первыми двумя членами разложения, получим

$$W_1(\tau,t,\chi)\approx\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{(\gamma-t)}{s}}e^{-s^2}\left[1+\left(s^2-\frac{1}{2}\right)\Delta\chi(t)\right]\frac{ds}{s}, \tag{8.2}$$

$$W_2(\tau,t,\chi)\approx\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{(\gamma-t)}{s}}e^{-s^2}\left[\left(s^2-\frac{3}{2}\right)+\left(s^4-5s^2+\frac{15}{4}\right)\Delta\chi(t)\right]ds, \tag{8.3}$$

$$W_3(\tau,t,\chi)\approx\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{(\gamma-t)}{s}}e^{-s^2}\left[s^2+1+\left(s^4+\frac{s^2}{2}+\frac{1}{2}\right)\Delta\chi(t)\right]ds, \tag{8.4}$$

$$W_4(\tau,t,\chi)\approx\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{(\gamma-t)}{s}}e^{-s^2}\left[s^4-\frac{s^2}{2}-\frac{1}{2}+\left(s^6-4s^4+\frac{3}{4}s^2+\frac{3}{4}\right)\Delta\chi(t)\right]ds, \tag{8.5}$$

$$W_5(\tau,t,\chi)\approx\frac{2}{3\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{(\gamma-t)}{s}}e^{-s^2}\left[s^2+1+\left(s^4+\frac{s^2}{2}+\frac{1}{2}\right)\Delta\chi(t)\right]\frac{ds}{s}, \tag{8.6}$$

$$W_6(\tau,t,\chi)\approx\frac{2\alpha}{3\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{(\gamma-t)}{s}}e^{-s^2}\left[s^4-\frac{s^2}{2}-\frac{1}{2}+\left(s^6-4s^4+\frac{3}{4}s^2+\frac{3}{4}\right)\Delta\chi(t)\right]ds. \tag{8.7}$$

Подставляя (8.2)-(8.7) в (5.27)-(5.29), с учетом (8.1) проделав несколько громоздких, но несложных выкладок, приходим к следующей системе линейных интегральных уравнений относительно поправок $\Delta\varphi,\Delta\psi,\Delta\chi$:

$$\Delta\varphi(\tau)=g_1(\tau)+\int_0^r K_{11}(\tau-t)\Delta\varphi(t)dt+\int_0^r K_{12}(\tau-t)\Delta\psi(t)dt+\int_0^r K_{13}(\tau-t)\Delta\chi(t)dt, \tag{8.8}$$

$$\Delta\psi(\tau)=g_2(\tau)+\int_0^r K_{21}(\tau-t)\Delta\varphi(t)dt+\int_0^r K_{22}(\tau-t)\Delta\psi(t)dt+\int_0^r K_{23}(\tau-t)\Delta\chi(t)dt, \tag{8.9}$$

$$\Delta\chi(\tau)=g_3(\tau)+\int_0^r K_{31}(\tau-t)\Delta\varphi(t)dt+\int_0^r K_{32}(\tau-t)\Delta\psi(t)dt+\int_0^r K_{33}(\tau-t)\Delta\chi(t)dt, \tag{8.10}$$

где

$$K_{ij}(\tau)=\int_0^\infty e^{-\frac{|\gamma|}{s}}G_{ij}(s)ds,\ \ i,j=1,2,3, \tag{8.11}$$

$$G_{11}(s)=\frac{1}{\sqrt{\pi}s}e^{-s^2},\ \ G_{12}(s)=\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}e^{-s^2}\left(s^2-\frac{3}{2}\right),$$

$$G_{13}(s)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-s^2}\left[\left(s^2-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{s}+\alpha q_0\left(s^4-5s^2+\frac{15}{4}\right)\right],$$

$$G_{21}(s)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-s^2}(s^2+1),\ \ G_{22}(s)=\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}e^{-s^2}\left(s^5-\frac{s^3}{2}-\frac{s}{2}\right),$$

$$G_{23}(s)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-s^2}\left[\left(s^4+\frac{s^2}{2}+\frac{1}{2}\right)+\alpha q_0\left(s^7-4s^5+s^4+\frac{3}{4}s^3+\frac{s^2}{2}+\frac{3}{4}s+\frac{1}{2}\right)\right],$$

$$G_{31}(s)=\frac{2}{3\sqrt{\pi}}e^{-s^2}(s^2-\frac{1}{2}),\ \ G_{32}(s)=\frac{2\alpha}{3\sqrt{\pi}}e^{-s^2}\left(s^4-2s^2+\frac{7}{4}\right),$$

$$G_{33}(s)=\frac{2}{3\sqrt{\pi}s}e^{-s^2}\left[\left(s^2-\frac{1}{2}\right)+1\right]+\frac{2\alpha q_0}{3\sqrt{\pi}}e^{-s^2}\left(s^6-\frac{11}{2}s^4+\frac{33s^2}{4}-\frac{39}{8}\right),$$

$$g_1(\tau)=h_1(\tau)-\frac{\alpha q_0}{2\sqrt{\pi}}-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\left[e^{-\frac{\gamma}{s}}+e^{-\frac{(r-\gamma)}{s}}\right]e^{-s^2}\left[1+\alpha q_0\left(s^3-\frac{s}{2}\right)\right]ds,$$

$$g_2(\tau)=h_2(\tau)+\frac{2}{\sqrt{\pi}}-q_0+\frac{5\alpha q_0}{4}-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\left[e^{-\frac{\gamma}{s}}+e^{-\frac{(r-\gamma)}{s}}\right]e^{-s^2}\left[s^3+s+\alpha q_0\left(s^6-\frac{s^4}{2}-\frac{s^2}{2}\right)\right]ds,$$

$$g_3(\tau)=h_3(\tau)-g_1(\tau)+\frac{2\alpha q_0}{3\sqrt{\pi}}-\frac{2}{3\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\left[e^{-\frac{\gamma}{s}}+e^{-\frac{(r-\gamma)}{s}}\right]e^{-s^2}\left[s^2+1+\alpha q_0\left(s^5-\frac{s^3}{2}-\frac{s}{2}\right)\right]ds,$$

где функции $h_i(\tau)$ $(i=1,2,3)$ задаются согласно (5.31).

В частном случае, когда $\alpha=0,$ $(P_r=1),$ $\psi\equiv 0$ (БГК модель), система (8.8)-(8.10) упрощается и преобразовывается в следующую систему:

$$\begin{aligned}\Delta\varphi(\tau)&=\bar{g}_1(\tau)+\int_0^r K_{11}(\tau-t)\Delta\varphi(t)dt+\int_0^r \bar{K}_{13}(\tau-t)\Delta\psi(t)dt,\\ \Delta\chi(\tau)&=\bar{g}_3(\tau)+\int_0^r K_{31}(\tau-t)\Delta\varphi(t)dt+\int_0^r \bar{K}_{33}(\tau-t)\Delta\chi(t)dt,\end{aligned} \tag{8.12}$$

где

$$\bar{g}_1(\tau)=h_1(\tau)-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\left[e^{-\frac{\gamma}{s}}+e^{-\frac{(r-\gamma)}{s}}\right]e^{-s^2}ds,$$

$$\bar{g}_3(\tau) = h_3(\tau) - \bar{g}_1(\tau) - \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \left[e^{-\frac{\gamma}{s}} + e^{-\frac{(r-\gamma)}{s}} \right] (s^2+1) e^{-s^2} ds,$$

$$K_{31} = \frac{2}{3}\bar{K}_{13}, \qquad \bar{K}_{13}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{|\gamma|}{s}} e^{-s^2} \left(s^2 - \frac{1}{2} \right) \frac{ds}{s},$$

$$\bar{K}_{33} = \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{|\gamma|}{s}} e^{-s^2} \left[\left(s^2 - \frac{1}{2} \right) + 1 \right] \frac{ds}{s}.$$

Система уравнений (8.12) была изучена в работе [35]

Ниже приводятся результаты некоторых численных расчетов. Найден температурный скачок как в линейном, так и в нелинейном случаях. Осуществляется сравнительный анализ между моделями БГК и Шахова.

Итак, сперва находим максимальное значение r, при котором система (8.8)-(8.10) однозначно разрешима.

Обозначим

$$\lambda_i(r) = \sum_{j=1}^{3} \int_{-r}^{r} \left| K_{ij}(\tau) \right| d\tau,\ i = 1,2,3. \tag{8.13}$$

Из (8.11) имеем

$$\lambda_1(r) < C_r = \int_0^r h(\tau) d\tau =$$

$$\frac{2\alpha q_0}{3\sqrt{\pi}} + \int_0^\infty s(G_+(s) + G_-(s)) \left(1 - e^{-\frac{r}{s}} \right) ds = \int_0^r h(\tau) d\tau = \frac{2\alpha q_0}{3\sqrt{\pi}} + \int_0^\infty s(G_+(s) + G_-(s)) \left(1 - e^{-\frac{r}{s}} \right) ds) = \tag{8.14}$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-s^2} \left(1 - e^{-\frac{r}{s}} \right) \left(1 + \alpha s \left| s^2 - \frac{3}{2} \right| + \left| s^2 - \frac{1}{2} + \alpha q_0 \left(s^5 - 5s^3 + \frac{15}{4} s \right) \right| \right) ds,$$

$$\lambda_2(r) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-s^2} \left(1 - e^{-\frac{r}{s}} \right) \left(s^3 + s + \alpha \left| s^6 - \frac{s^4}{2} - \frac{s^2}{2} \right| + \right.$$

$$\left. + \left(s^5 + \frac{s^3}{2} + \frac{s}{2} \right) + \alpha q_0 \left| s^8 - 4s^6 + s^5 + \frac{3}{4}s^4 + \frac{3}{4}s^2 + \frac{s}{2} \right| \right) ds, \tag{8.15}$$

$$\lambda_3(r) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-s^2} \left(1 - e^{-\frac{r}{s}} \right) \left(\left| s^2 - \frac{1}{2} \right| + \alpha \left| s^5 - 2s^3 + \frac{7}{4}s \right| + \left(s^2 - \frac{1}{2} \right) + 1 + \right.$$

$$\left. + \alpha q_0 \left| s^7 - \frac{11}{2}s^5 + \frac{33}{4}s^3 - \frac{39}{8}s \right| \right) ds. \tag{8.16}$$

При выводе линейных уравнений (8.8)-(8.10) мы приняли $T_0 = \sqrt{T_+ T_-} = 1,\ \rho_0 = \dfrac{\rho_+ + \rho_-}{2} = 1$. Из условия непротекания $\rho_+ \sqrt{T_+} = \rho_- \sqrt{T_-}$ следует, что $\rho_+ = \dfrac{2}{1+T_+},\ \rho_- = \dfrac{2T_+}{1+T_+}$. Для проекции вектора потока энергии имеем

$$q_0 = \frac{\rho_+ \sqrt{T_+}}{\sqrt{\pi}}(T_+ - T_-) = \frac{2(T_+ - 1)}{\sqrt{\pi T_+}}.$$

Так как для одноатомных газов число Прандтля равно $\dfrac{2}{3}$, то примем $\alpha = \dfrac{4}{5}(1 - P_r) = \dfrac{8}{15}$. Численные расчеты выполнены для значений

$$T_+ = 2,\ T_- = \frac{1}{2},\ q_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}},\ \rho_0 = 1.$$

Численные расчеты показывают, что коэффициент сжатия $\sigma = \max(\lambda_1(r_m), \lambda_2(r_m), \lambda_3(r_m)) = 0.998$ становится меньше единицы при $r \le 0.32$. Это означает, что система (8.8)-(8.10) решается при $r \le 0.32$ и имеет единственное решение.

Система уравнений (8.8)-(8.10) решается с помощью итераций. Полученную тройку $(1+\Delta\varphi),\ (q_0 + \Delta\psi),\ (1+\Delta\chi)$ назовем решением исходной системы (5.27)-(5.29) в линейном приближении.

Далее итерациями решается система (5.41) и нелинейное уравнение (7.4). Таким путем построенное решение $(\varphi(\tau), \psi(\tau), \chi(\tau))$ назовем приближенным решением нелинейной системы (5.27)-(5.29) .

В нелинейном случае в результате решения системы (5.41) и уравнения (7.4) в рамках модели Шахова для температурного скачка на нижней и верхней стенках при $r = 0.2,\ T_+ = 2,\ T_- = \dfrac{1}{2};\ q_0 = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$ получены следующие значения:

$$æ_T^+ = |\chi_{нел}(0) - T_+| = 0.69, \quad æ_T^- = |\chi_{нел}(r) - T_-| = 0.34. \tag{8.17}$$

В линейном приближении в результате решения системы (8.8)-(8.10) получены следующие значения:

$$æ_T^+ = |\chi_{лин}(0) - T_+| = 0.711, \quad æ_T^- = |\chi_{лин}(r) - T_-| = 0.299. \tag{8.18}$$

Для сравнения приведем также результаты численных расчетов, полученных в рамках БГК модели $(\alpha = 0)$ в линейном и нелинейном случаях при $T_+ = 2,\ r = 0.2,\ \chi = 0$:

$$æ_T^+ = |\chi_{нел}(0) - T_+| = 0.79, \quad æ_T^- = |\chi_{нел}(r) - T_-| = 0.403. \tag{8.19}$$

$$æ_T^+ = |\chi_{лин}(0) - T_+| = 0.821, \quad æ_T^- = |\chi_{лин}(r) - T_-| = 0.394. \tag{8.20}$$

В простом свободно-молекулярном режиме, когда число Кнудсена $Kn = \frac{\lambda}{r} \to \infty$, где λ - средняя длина свободного пробега частиц, а функция распределения по скоростям является максвелловским, получаются следующие результаты:

$$æ_T^+ = \left| \sqrt{T_+ T_-} - T_+ \right| = 1, \qquad æ_T^- = \left| \sqrt{T_+ T_-} - T_- \right| = 0.5,$$

Относительная ошибка в линейном и нелинейном случаях в рамках модели Шахова составляет незначительный процент (порядка 2%-3%), что дает основание на эвристическом уровне утверждать, что предложенный нами подход для нахождения приближенного (поэтапного) решения нелинейной системы (5.27)-(5.29) близок к точному решению.

§9. О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ОТНОСИТЕЛЬНО СКОРОСТИ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА

В настоящем параграфе рассматриваются следующие интегро-дифференциальные уравнения:

$$\pm s_1 \frac{\partial f^{\pm}(x,\vec{s})}{\partial x} + f^{\pm}\left(x,\vec{s}\right) = f_0\left(x,\vec{s}\right)\left(1+\phi\left(x,\vec{s}\right)\right), \quad x\in[0,r] \tag{9.1}$$

где

$$f_0\left(x,\vec{s}\right) = \frac{\rho_0 e^{-\left(\vec{s}-\vec{u}(x)\right)^2}}{\pi^{\frac{3}{2}}}, \tag{9.2}$$

$$\phi\left(x,\vec{s}\right) = \frac{\alpha q_0 s_1}{\rho_0}\left[\left(\vec{s}-\vec{u}(x)\right)^2 - \frac{5}{2}\right], \tag{9.3}$$

$$\vec{s} = (s_1,s_2,s_3),\ s_1\in(0,+\infty),\ s_2,s_3\in(-\infty,+\infty),\ \vec{u}(x) = (0,u(x),0),$$

$$u(x) = \frac{1}{\rho_0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} s_2\left[f^{+}\left(x,\vec{s}\right) + f^{-}\left(x,\vec{s}\right)\right]ds_3 ds_2 ds_1 \quad . \tag{9.4}$$

К уравнениям (9.1) присоединим граничные условия:

$$f^{+}\left(0,\vec{s}\right) = \frac{\rho_+ e^{-\left(\frac{\vec{s}+\vec{\omega}}{T_+}\right)^2}}{\left(\pi T_+\right)^{\frac{3}{2}}},\quad f^{-}\left(r,\vec{s}\right) = \frac{\rho_- e^{-\left(\frac{\vec{s}-\vec{\omega}}{T_-}\right)^2}}{\left(\pi T_-\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{9.5}$$

$$\vec{\omega} = (0,\omega,0),\ \omega = const,\ \ \rho_{\pm} = const,\ T_{\pm} = const.$$

Уравнения (9.1) выводятся из нелинейного стационарного уравнения Больцмана в рамках модели Шахова в предположении о постоянстве температуры $T_0 = 1$, плотности ρ_0 и проекции вектора потока энергии q_0 (см §5). Граничная задача (9.1)-(9.5) описывает классическую задачу течения газа в плоском канале толщиной r, ограниченном двумя параллельными бесконечными пластинками. В отличие от §5 здесь предполагается что пластинки движутся относительно друг друга со скоростью ω.

Уравнения (9.1) при $\alpha = 0$ для полупространства $(r = +\infty)$ был рассмотрен в работе [12].

В конце параграфа в качестве замечания будет показано, что граничная задача (9.1)-(9.5) при $\omega = 0$ обладает только тривиальным решением, т. е. $u(x) = 0$, а

$$f^{\pm}(\vec{s}) = \frac{\rho_0 e^{-|\vec{s}|^2}}{(\pi)^{\frac{3}{2}}}.$$

Из (9.1) с учетом граничных условий (9.5) имеем:

$$f^{+}\left(x, \vec{s}\right) = e^{-\frac{x}{s_1}} f^{+}\left(0, \vec{s}\right) + \int_0^x e^{-\frac{(x-t)}{s_1}} e^{-\left(\vec{s} - u(t)\right)^2} \frac{\rho_0}{\pi^{\frac{3}{2}}}\left[1 + \Phi\left(t, \vec{s}\right)\right]\frac{dt}{s_1}, \qquad (9.6)$$

$$f^{-}\left(x, \vec{s}\right) = e^{-\frac{(r-x)}{s_1}} f^{-}\left(r, \vec{s}\right) + \int_x^r e^{-\frac{(t-x)}{s_1}} e^{-\left(\vec{s} - \vec{u}(t)\right)^2} \frac{\rho_0}{\pi^{\frac{3}{2}}}\left[1 + \Phi\left(t, \vec{s}\right)\right]\frac{dt}{s_1}. \qquad (9.7)$$

Подставляем (9.6), (9.7) в (9.4) и производим интегрирование:

$$\begin{aligned} u(x) = & \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} s_2 e^{-\frac{x}{s_1}} e^{-\frac{s_1^2}{T_+}} e^{-\frac{(s_2+\omega)^2}{T_+}} \frac{e^{-\frac{s_3^2}{T_+}}\rho_+}{(\pi T_+)^{\frac{3}{2}}} ds_3 ds_2 ds_1 + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} s_2 e^{-\frac{(r-x)}{s_1}} e^{-\frac{s_1^2}{T_-}} e^{-\frac{(s_2-\omega)^2}{T_-}} \frac{e^{-\frac{s_3^2}{T_-}}\rho_-}{(\pi T_-)^{\frac{3}{2}}} ds_3 ds_2 ds_1 + \\ & + \int_0^r e^{-\frac{|x-t|}{s_1}} dt \left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \frac{s_2 e^{-s_1^2} e^{-(s_2-u(t))^2} e^{-s_3^2}}{\pi^{\frac{3}{2}}} ds_3 ds_2 \frac{ds_1}{s_1} + \right. \\ & \left. + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} s_2 e^{-s_1^2} e^{-(s_2-u(t))^2} e^{-s_3^2} \frac{\alpha q_0 s_1}{\rho_0 \pi^{\frac{3}{2}}}\left(s_1^2 + (s_2 - u(t))^2 + s_3^2 - \frac{5}{2}\right) ds_3 ds_2 \frac{ds_1}{s_1}\right]. \end{aligned} \qquad (9.8)$$

Учитывая (1.11), после некоторых выкладок приходим к следующему линейному неоднородному интегральному уравнению

$$u(x) = g(x) + \int_0^r K(x-t) u(t) dt, \qquad (9.9)$$

где

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{|x|}{s}} e^{-s^2}\left[\frac{1}{s} + \frac{\alpha q_0}{\rho_0}\left(s^2 - \frac{3}{2}\right)\right] ds, \qquad (9.10)$$

$$g(x) = g_-(x) - g_+(x),$$
$$g_-(x) = \omega \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{(r-x)}{s}} e^{-\frac{s^2}{T_-}} \rho_-}{\sqrt{\pi T_-}} ds, \tag{9.11}$$

$$g_+(x) = \omega \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{x}{s}} e^{-\frac{s^2}{T_+}} \rho_+}{\sqrt{\pi T_+}} ds. \tag{9.12}$$

Потребуем чтобы ядро $K(x)$ интегрального уравнения (9.9) было неотрицательным. Для этого достаточно чтобы функция

$$\gamma(s) = \frac{1}{s} + \varepsilon\left(s^2 - \frac{3}{2}\right), \ s > 0, \ \left(\varepsilon := \frac{\alpha q_0}{\rho_0}\right)$$

была неотрицательной. Исследуем функцию $\gamma(s)$:

$\gamma(0) = +\infty, \ \gamma(+\infty) = \infty, \ \ \gamma(s) \uparrow$ по s на $[\sqrt[3]{2\varepsilon}, +\infty)$ и $\gamma(s) \downarrow$ по s на $(0, \sqrt[3]{2\varepsilon}]$ и при этом в точке $s = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2\varepsilon}}$ она принимает минимальное значение

$$\gamma_{\min} = \gamma\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2\varepsilon}}\right) = \sqrt[3]{2\varepsilon} + \varepsilon\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2\varepsilon}} - \frac{3}{2}\right).$$

Легко убедиться, что $\gamma_{\min} > 0$, если $\varepsilon < \sqrt{2}$, т.е.

$$\frac{\alpha q_0}{\rho_0} < \sqrt{2}. \tag{9.13}$$

Пусть E_r - одно из следующих банаховых пространств :

$$L_p[0,r], \quad 1 \le p \le +\infty, \ C[0,r] \ .$$

Заметим, что

$$\left\|\hat{K}\right\|_{L_1} = \int_{-r}^{r} |K(x)| dx = \int_{-r}^{r} K(x) dx \le \int_{-\infty}^{\infty} K(x) dx = 1 - \frac{\alpha q_0}{2\sqrt{\pi}\rho_0} < 1. \tag{9.14}$$

Из последнего неравенства следует, что соответствующий оператор $\hat{K}$ является сжимающим с коэффициентом сжатия

$$\lambda = 1 - \frac{\alpha q_0}{2\sqrt{\pi}\rho_0}. \tag{9.15}$$

Поскольку во всех пространствах E_r норма

$$\left\|\hat{K}\right\|_{E_r} \le \left\|\hat{K}\right\|_{L_1},$$

то оператор будет сжимающим во всех пространствах E_r.

Так как $g \in C[0,r]$, то и решение $u \in C[0,r]$. В силу линейности уравнения (9.9) его решение можно представить в виде:

$$u(x) = u_-(x) - u_+(x), \tag{9.16}$$

где $u_+(x)$ *и* $u_-(x)$ являются неотрицательными решениями уравнений

$$u_\pm(x) = g_\pm(x) + \int_0^r K(x-t)u_\pm(t)dt. \tag{9.17}$$

Итак справедлива

<u>Теорема 9.1.</u> *Нелинейная граничная задача (9.1)-(9.5) эквивалентна линейному интегральному уравнению (9.9) относительно функции* $u(x)$*, а искомые функции* $f^\pm\left(x,\vec{s}\right)$ *определяются из простых нелинейных соотношений (9.6), (9.7). Более того, если выполняется условие (9.13), то уравнение (9.9) с ядром (9.10) имеет единственное непрерывное на отрезке* $[0,r]$*, решение вида*

$$u(x) = u_-(x) - u_+(x),$$

где $u_\pm(x)$ *являются неотрицательными решениями уравнений (9. 17).*

<u>Замечание 5.</u> *Заметим, что если пластинки неподвижны* $(\omega = 0)$*, то как и следовало ожидать, уравнение (9.9) имеет лишь тривиальное решение.*

З А К Л Ю Ч Е Н И Е

Диссертационная работа посвящена вопросам разрешимости некоторых нелинейных граничных задач, возникающих в кинетической теории газов, в основе которой лежит известное уравнение Больцмана. Этими уравнениями описываются классические задачи течения газа в полупространстве и в конечном канале. Сочетание различных методов теории нелинейного анализа, теории переноса излучения, специальных факторизационных методов с новыми математическими построениями дают возможность точно линеаризовать или существенно упростить нелинейные задачи сведя их к изучению линейных интегральных уравнений или более простых нелинейных уравнений, доказать теоремы существования (в некоторых случаях и единственности) решений вышеуказанных уравнений, описать конструктивные методы построения полученных решений.

В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Точно линеаризованы две различные граничные задачи из кинетической теории газов. Одна из этих задач сведена к линейному интегральному уравнению с необратимым оператором, ядро которого знакопеременно, а другая задача – к интегральному уравнению со сжимающим оператором. Доказаны конструктивные теоремы существования решений полученных уравнений.

2. Доказана теорема существования однопараметрического семейства положительных решений в пространстве функций, имеющих линейный рост в бесконечности для одного нелинейного уравнения Урысона. Получены точная асимптотическая формула в бесконечности, а также двусторонние оценки решения. Приведены примеры функций, описывающих нелинейность и удовлетворяющих условиям теоремы.

3. Нелинейное стационарное одномерное уравнение Больцмана в рамках модели Шахова сведено к системе нелинейных интегральных уравнений. Удается отчасти упростить нелинейность задачи путем перехода к новому аргументу. Предложен метод решения новой нелинейной системы сведением ее к системе линейных интегральных уравнений и к скалярному нелинейному интегральному уравнению типа Урысона. Доказаны теоремы существования единственного решения для полученной линейной системы и теорема существования положительного решения для нелинейного уравнения Урысона.

4. В рамках модели Шахова уравнение Больцмана линеаризовано и для полученного неоднородного интегрального уравнения относительно скорости газа доказана теорема существования и единственности положитльного решения в пространстве непрерывных функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В.А. Амбарцумян. К задаче о диффузном отражении света. // ЖЭТФ. т. 13, с. 224-242, 1943,
2. В.А. Амбарцумян. Научные труды. Ереван: Изд.-во Академии наук Арм. ССР. т.1, -430с., 1960.
3. В.А. Амбарцумян. Об одной задаче нелинейной теории рассеяния света в мутной среде. // Докл. АН Арм ССР, т. 38, с. 225-230, 1964.
4. Л.Г.Арабаджян. Решение одного интегрального уравнения типа Гаммерштейна / Известия НАН Армении, Математика , т.32, №1, стр. 21-28, 1997.
5. Л.Г. Арабаджян, Н.Б. Енгибарян. Уравнение в свертках и нелинейные функциональные уравнения //. Итоги науки и техники. «Матем. анализ». М.: ВИНИТИ АН СССР. т. 22, с. 175-224, 1984.
6. Р. Беллман, К.Кук. Дифференциально-разностные уравнеия. М. : «Мир». -548с, 1967.
7. Р.С. Варданян, Н.Б. Енгибарян . К нелинейной нестационарной задаче переноса излучения в спектральной линии//. - Астрофизика, т.5, вып. 2, с. 203-211, 1969.
8. И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн. Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов. // Успехи мат. наук. т. 13, № 2, с. 3-72, 1968.
9. Н.Б. Енгибарян, А.Х. Хачатрян. Вопросы нелинейной теории динамики разреженного газа.// Математическое моделирование. т. 16, №1, с. 67-74, 2004.
10. Н.Б. Енгибарян, А.Х. Хачатрян. Нелинейная задача переноса при общих законах перераспределения по частотам. // Астрофизика. т. 23, вып. 1, с. 145-161, 1985.
11. Н.Б. Енгибарян, А.Х. Хачатрян. О некоторых интегральных уравнениях типа свертки в кинетической теории. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. т. 38, № 3, с. 466-482, 1998.
12. Н.Б. Енгибарян, А.Х. Хачатрян. О точной линеаризации задач скольжения разреженного газа в БГК модели. // Ж. теор. и матем. физики. т. 119, № 2, с. 339-342, 2000.
13. Н.Б. Енгибарян, Б.Н. Енгибарян. О методе сдвига альбедо. // Астрофизика. т. 38, вып. 3, с. 417-431, 1995.

14. Н.Б. Енгибарян, Б.Н. Енгибарян. Интегральное уравнеие свертки на полупрямой с вполне монотонным ядром. // Мат. сборник. т. 187, № 10, с. 53-72, 1996.
15. Н.Б. Енгибарян, М.А. Мнацаканян. Об одном интегральном уравнении с разностным ядром.// Матем. заметки. т. 19, вып. 6, с. 927-932, 1976.
16. Н.Б. Енгибарян, М.А. Мнацаканян. О линейных задачах переноса. // Докл. АН СССР. 1974, №3, с. 533-536, т. 217.
17. Н.Б. Енгибарян. Об одной задаче нелинейной теории переноса излучения. // Астрофизика. т. 26, вып. 1, с. 31-36, 1966.
18. Н.Б. Енгибарян. Об одной нелинейной задаче переноса излучения. // Астрофизика. 1965, т. 1, вып. 3, с. 297-302, 1965.
19. К. Кейз., П. Цвайфель. Линейная теория переноса. М.: «Мир». -384с., 1972.
20. М.Н. Коган. Динамика разреженного газа. М.: «Наука». -440с., 1962.
21. О.А. Коленчиц. Тепловая аккомодация систем газ- твердое тело. Минск, 1977.
22. А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. М: «Наука». -623с., 1989.
23. М.Г. Крейн. Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов. // Успехи мат. наук. т. 13, №5, с. 3-120, 1958.
24. М.Г. Крейн, Ю.Л. Шмульян. Уравнения Винера-Хопфа, ядра которых допускают интегральное представление через экспоненты. // Известия НАН Армении. «Математика». т. 17, №4, с. 307-327, т. 17, №5, с. 335-375, 1982.
25. А.В. Латышев, А.А. Юшканов. Тепловое и изотермические скольжение в новом модельном кинетическом уравнении Лиу//. Письма в журнал тех. физики., т. 23, №14, с. 13-16, 1997.
26. А.В. Латышев., А.А. Юшканов. Аналитическое решение граничных задач для кинетической теории. М.: МГОУ, 2004.
27. А.В. Латышев. Аналитическое решение задач скольжения бинарного газа. // Ж. Теоретической математичиской физики. // т. 86, № 3, с. 402-419. 1991.
28. А.В. Латышев. Применение метода Кейза к решению линеаризованного кинетического уравнения БГК в задаче о температурном скачке.// Приклад. матем. и механика. т. 54, №4, с. 581-586, 1990.
29. Е.М.Лифщиц, Л.П.Питаевский. Физическая Кинетика: М.;Наука, т.X, -527с. 1979.

30. Д. Михалас . Звездные атмосферы. М.: “Мир”, т. I, -352 с, 1982.
31. Д. Михалас . Звездные атмосферы. М.: “Мир”, т. 2, -424 с, 1982
32. М.А.Мнацаканян. Аналитические решения высокой точности задачи о монохроматическом рассеянии света в плоском слое.// Астрофизика, т. 16, вып. 3, с. 513-533, 1980.
33. В.В. Соболев. Курс теоретической астрофизики. М.: «Наука». -502с., 1985.
34. В.Ю. Теребиж. О некоторых нелинейных задачах теории переноса излучения в спектральных линиях. // Астрофизкиа, т.3, вып. 3, с. 281-291, 1967.
35. Ц.Э. Терджян., А.Х. Хачатрян. Об одной системе интегральных уравнений в кинетической теории// Журн. выч. матем. и матем. физ. т. 49, №4, с. 715-721, 2009.
36. А.Х. Хачатрян, А.Н. Афян. Об аналитическом и численном решении задачи переноса излучения при наличии отражающей поверхности. // Ж. выч. мат. и мат. физики, т. 41, № 8, с. 1158-1168, 2001.
37. А.Х. Хачатрян, К.В. Папоян. Об одном интегральном уравнении кинетичес-кой теории газов. // Известия НАН Армении. «Математика». т. 32, №1, с. 84-92, 1997.
38. А.Х. Хачатрян. С.М. Андриян. О решении задачи скачка скорости разреженного газа в рамках БГК модели уравнения Больцмана. // Математическое моделирование. РАН. т. 16, № 2, с. 31-42, 2004.
39. А.Х. Хачатрян, С.М. Андриян. Об одной задаче физической кинетики.// Ж. вычисл. матем. и мат. физики. РАН. т. 45, №11, с. 2061-2069, 2005.
40. А.Х.Хачатрян. К решению нелинейной граничной задачи некогерентного анизотропного рассеяния.// Астрофизика, т.23, вып.2, с.349-362, 1985.
41. А.Х. Хачатрян, Х.А. Хачатрян. Качественные различия решений для одной модели уравнения Больцмана в линейном и нелинейном случаях. // ТМФ, т. 172, № 3, с.1315-1320, 2012.
42. А.Х. Хачатрян, Х.А. Хачатрян. Качественное различие решений для стационарных модельных уравнений Больцмана в линейном и нелинейном случаях// ТМФ, т. 180, № 2, с. 272-288, 2014.

43. Х. А. Хачатрян. О положительной разрешимости некоторых классов нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна на полуоси и на всей прямой. Изв.РАН, сер.матем, т.79, №2, с.205-224, 2015.
44. Х.А. Хачатрян. Достаточные условия разрешимости интегрального уравнения Урысона на полуоси. // Доклады Российской Академии Наук, Математика, , том 425, №2, стр. 462-465, 2009.
45. Х.А. Хачатрян. Применение метода сдвига альбедо к решению консерватив-ного интегрального уравнения с суммарно- разностным ядром. // Ж. выч. и мат. физики. т. 42, №6, с. 905-912, 2002.
46. А.Х. Хачатрян, Х.А.Хачатрян. О разрешимости нелинейного модельного уравнения Больцмана в задаче плоской ударной волны.//Теоретическая и Математическая Физика, т.189 , No.2, с.239-255, 2016.
47. А.Х. Хачатрян, Х.А. Хачатрян. "О некоторых вопросах разрешимости нелинейного стационарного уравнения Больцмана в рамках БГК модели".// Труды московского математического общества, № 1, т. 77. с. 103-130, 2016.
48. К. Черчиньяни. Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: «Мир». -495с., 1978.
49. L.B. Barichello and C.E. Siewert. The temperature-jump problem in rarefied-gas dynamics. // European Journal of Applied Mathematics. vol. 11, № 4, pp. 353-364, 2000.
50. P.L. Bhatnagar, E.P. Gross., M. Krook. A model for collision processes in gases. // Phys. Rev., vol. 94, pp. 511-525, 1954.
51. C. Cercignani. Elementary solutions of the linearized gas-dynamics Boltzmann equation and their applications to the slip- flow. // Ann. Phys. vol. 20, pp. 219-233, 1962.
52. C. Cercignani. Plane Poiseuille flow according to the method of elementary solutions.//Journal of Mathematical Analysis and Applications. vol. 12, pp. 254-262, 1965.
53. H. Frisch. Analytical solution of slip-flow problem by Cauchy integral method.// J.Q.S.R.T. vol. 38, №1, pp. 114-129, 1988.
54. L.H. Holway., New statistical model for kinetic theory: methods of construction.// Phys. Fluids. 9(9): pp. 1658-1673, 1966.

55. V.V. Ivanov, G.B. Rybicki and A.M. Kasaurov. Albedo shifting.// Harvard – Smithsonian Center for Astrophysics. Preprint Series № 3478. 1992.
56. Kh. A. Khachatryan. On a class of integral equations of Urysohn type with strong nonlinearity.// Izv. RAN , Ser. Mat. V.76, №1, pp. 173-200, 2012.
57. G. Liu. A method for constructing a model form for the Boltzmann equation. // Phys. Fluids, A2, 277, 1990.
58. E.M. Shakhov. On the generalization of the Krook kinetic equation. // Izvestiya of Russian Academy of Sci. Fluid Dynamics, № 5, pp. 142-145, 1968.
59. V.A. Titarev. Conservative numerical methods for advanced model kinetic equations. // European Conference on Computational Fluid Dynamics, ECCOMAS CFD, pp. 1-13, 2006,
60. P. Welander. On the temperature jump in a rarefied gas // Ark. Fys. Bd. 7. S. 507-553, 1954.
61. N.B. Yengibaryan., A.Kh. Khachatryan. On temperature and density jumps in kinetic theory of gases. // Nova science Publisher, (Series Horizons in world physics; Vol. 243), p. 103-117, 2003.
62. Y. Zheng and H. Struchtrup. Ellipsoidal statistical Bhatnagar-Gross-Krook model with velocity- dependent collision frequency.// Phys. Fluids 17, 127103, 2005.
63. А.Х. Хачатрян, А.А. Хачатрян. К решению одной нелинейной граничной задачи для модельного уравнения Больцмана. // Вестник РАУ, №1, с. 46-56, 2016.
64. А.Х.Хачатрян, А.А. Хачатрян. О разрешимости одной нелинейной граничной задачи. // Математика в высшей школе, т.12, №2-3, стр.24-33, 2016.
65. А.А. Хачатрян. О разрешимости одной нелинейной граничной задачи, возникающей в кинетической теории газов. // Математика в высшей школе, т.12, №2-3, стр.11-15, 2016..
66. А.Х. Хачатрян, А.А. Хачатрян. Некоторые вопросы разрешимости уравнения Больцмана в рамках модели Шахова. // Теоретическая и математическая физика, т. 191, № 3, стр. 441-455, 2017.

    A.Kh. Khachatryan, A.A. Khachatryan. Some solvability problems for the Boltzmann equation in the framework of the Shakhov model. // Theoretical and Mathematical Physics, vol. 191, № 3, pp. 856-869, 2017.

67. А.Х. Хачатрян, Х.А. Хачатрян, А.А. Хачатрян. Однопараметрическое семейство положительных решений для одного нелинейного интегрального уравнения, возникающего в физической кинетике. // Известия НАН Армения, т. 53, №1, стр.74-83, 2018.

A.Kh. Khachatryan, Kh.A. Khachatryan, A.A. Khachatryan. One parametric family of positive solutions for a nonlinear integral equations arising in physical kinetics. // Journal of contemporary mathematical analysis, vol. 53, № 1, pp. 35-41, 2018.