ՀՀ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ՊՈԼԻՏԵԽՆԻԿԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ ՀԱՄԱՅԱԿ ԱԶԱՏԻ

գազերի կինետիկ տեսության որոշ ոչ գծային եզրային խնդիրների լուծելիության հարցեր

Ա.01.02 – "Դիֆերենցիալ հավասարումներ, մաթեմատիկական ֆիզիկա" մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ 2018

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РА
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ АРМЕНИИ

ХАЧАТРЯН АМАЯК АЗАТОВИЧ

ВОПРОСЫ РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ГАЗОВ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – "Дифференциальные уравнения и математическая физика"

ЕРЕВАН 2018

Ատենախոսության թեման հաստատվել է ՀԱՊՀ-ի գիտական խորհրդի №. 12 նիստում (30 սեպտեմբերի 2017թ.)

Գիտական ղեկավար` ֆիզ-մաթ.գիտ. դոկտոր,պրոֆեսոր **Ա. Խ Խաչատրյան**

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ` ֆիզ-մաթ.գիտ.դոկտոր, պրոֆեսոր,

Վ.Ն. Մարգարյան

ֆիզ-մաթ.գիտ. թեկնածու, դոցենտ

Վ.Մ. Քաղքցյան

Առաջատար կազմակերպություն` Երևանի Պետական Համալսարան

Պաշտպանությունը կայանալու է 2018թ. փետրվարի 28-ին ժամը 15^{00} -ին Հայաստանի ազգային պոլիտեխնիկական համալսարանում գործող մաթեմատիկայի 053 մասնագիտական խորհրդի նիստում:
Հասցե` ք.Երևան, 0009, փ. Տերյան 105, 12 մասնաշենք:
Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ՀԱՊՀ գրադարանում:
Սեղմագիրն առաքված է 2018թ. հունվարի 26-ին:

053 մասնագիտական խորհրդի
գիտական քարտուղար
ֆիզ-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր Ա.Հ. Բաբայան

Тема диссертации утверждена на заседании ученого совета НПУА № 12
(30 сентября 2017г.)

Научный руководитель доктор физ.-мат. наук, профессор
А.Х. Хачатрян

Официальные оппоненты доктор физ.-мат. наук, профессор
В.Н. Маргарян
кандидат физ.-мат. наук, доцент
В.М. Кахкцян

Ведущая организация Ереванский Государственный университет

Защита диссертации состоится 28-го февраля 2018г. в 15^{00} часов на заседании специализированного совета математики 053, действующем в Национальном политехническом университете Армении.
Адрес: г. Ереван 0009, ул. Теряна 105, 12-й корпус.
С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке НПУА.
Автореферат разослан 26 -го января 2018г.

Ученый секретарь
специализированного совета 053
доктор физ.-мат. наук, профессор А.О. Бабаян

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Как известно, в основе кинетической теории газов лежит нелинейное интегро-дифференциальное уравнение Больцмана. В настоящее время вопросы разрешимости нелинейных граничных задач, возникающих в кинетической теории газов и описывающихся модельными уравнениями Больцмана, являются одним из интенсивно развивающихся направлений математической физики.

Существуют многочисленные работы, посвященные вопросам разрешимости линейных классических задач течения газа, как в конечном плоском канале, так и в полупространстве. В развитие линейной теории модельного уравнения Больцмана большой вклад внесли М.Г. Коган, К. Черчиньяни, Л.Б. Баричело, С.Е. Сюверт, Р. Веландер, Г. Лиу, Е.М. Шахов, А.В. Латышев, В.А. Титарев, А.А. Юшканов и др.

В отличие от линейной теории, вопросы разрешимости нелинейных уравнений Больцмана в рамках различных моделей в настоящее время мало изучены. В последние годы Н.Б. Енгибаряном, А.Х. Хачатряном и Х.А. Хачатряном были исследованы задачи разрешимости нелинейного уравнения Больцмана в рамках модели Бхатнагара-Гросса-Крука (БГК).

Настоящая работа посвящена исследованию вопросов разрешимости ряда нелинейных граничных задач, возникающих в кинетической теории газов в рамках модели БГК, модели Шахова и модифицированной БГК модели.

Изучение вопросов разрешимости нелинейного уравнения Больцмана в рамках различных моделей для классических задач течения газа, как в плоском слое конечной толщины, так и в полупространстве, представляет теоретическую и прикладную ценность и является весьма актуальным.

Цель работы. Цель настоящей диссертационной работы состоит в получении решений некоторых нелинейных граничных задач, описывающих течение газа как в полупространстве, ограниченном твердой плоской стенкой, так и в канале, ограниченном двумя бесконечными параллельными пластинками.

Методы исследования. В диссертации используются метод самосогласованных оптических глубин В.А. Амбарцумяна и примыкающий к нему метод определения оптической толщины Н.Б. Енгибаряна, методы специальных последовательных приближений, методы нелинейного анализа, специальный факторизационный метод, методы теории линейных интегральных уравнений, специальные методы построения инвариантных конусных отрезков и т.д.

Научная новизна. Все результаты, полученные в диссертации, являются новыми. Они обоснованы строгими математическими доказательствами.

Практическая значимость. Все уравнения, рассматриваемые в диссертации, имеют непосредственные применения, поскольку ими описываются конкретные физические задачи кинетической теории газов.

Основные положения, выносимые на защиту. Автором выносятся на защиту следующие положения:

- Линеаризованы две различные граничные задачи кинетической теории газов. Одна из этих задач сведена к линейному интегральному уравнению с необратимым оператором, ядро которого знакопеременно, а другая задача – к интегральному уравнению со сжимающим оператором. Доказаны конструктивные теоремы существования решений полученных уравнений.

- Доказана теорема существования однопараметрического семейства положительных решений в пространстве функций, имеющих линейный рост в бесконечности для одного нелинейного уравнения Урысона. Получены точная асимптотическая формула в бесконечности, а также двусторонние оценки решения. Приведены примеры функций, описывающих нелинейность и удовлетворяющих условиям теоремы.

- Нелинейное стационарное одномерное уравнение Больцмана в рамках модели Шахова сведено к системе нелинейных интегральных уравнений. Удалось отчасти упростить нелинейность задачи путем перехода к новому аргументу. Предложен метод решения новой нелинейной системы сведением ее к системе линейных интегральных уравнений и к скалярному нелинейному интегральному уравнению типа Урысона. Доказаны теоремы существования единственного решения для полученной линейной системы и теорема существования положительного решения для нелинейного уравнения Урысона.

- В рамках модели Шахова уравнение Больцмана линеаризовано и для полученного неоднородного интегрального уравнения относительно скорости газа доказана теорема существования и единственности положительного решения в пространстве непрерывных функций.

- **Апробация полученных результатов.** Основные результаты диссертации докладывались:

  \- на семинарах методов математической физики института математики Национальной академии наук республики Армения,

- на научных семинарах кафедры Высшей математики и теоретической механики Армянского Национального Аграрного Университета,
- на семинаре кафедры дифференциальных уравнений Ереванского государственного университета,
- на семинаре Отдела математической физики Математического института имени В.А. Стеклова РАН
- на VI Российско-Армянском международном совещании по Математическому анализу, математической физике и аналитической механике Россия, Ростов-на-Дону, 11-16 сентября, 2016г.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 5 печатных работах, в рецензируемых журналах, входящих в перечень ВАК. Два из них входят в базу данных “Scopus”.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, содержащих 9 параграфов, заключения и списка цитируемой литературы, включающего 67 наименований. Общий объем диссертации составляет 79 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность выбранной темы диссертационной работы, дан краткий обзор предыстории затронутых в диссертации вопросов и полученных другими авторами результатов, а также изложено краткое содержание диссертации.

Первая глава диссертации посвящена вопросам разрешимости некоторых нелинейных граничных задач, возникающих в кинетической теории газов.

В §1 рассматривается следующая граничная задача:

$$\pm s_1 \frac{\partial f^{\pm}(x,\vec{s})}{\partial x} + f^{\pm}(x,\vec{s}) = \pi^{-\frac{3}{2}} e^{-(\vec{s}-\vec{u}(x))^2}\left[1+\varepsilon[(s_2-u(x))^2-\frac{(s_1^2+s_3^2)}{2}]\right],\ x>0, \quad (1)$$

где

$$u(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s_2\left[f^{+}(x,\vec{s})+f^{-}(x,\vec{s})\right]ds_3 ds_2 ds_1, \quad (2)$$

$$\vec{u}(x)=(0,u(x),0),\ s_2,s_3\in(-\infty,+\infty),\ s_1\in(0,+\infty)\ ,\quad \varepsilon>0,$$

с граничными условиями:

$$f^{+}(0,\vec{s})=\frac{\rho_+}{(\pi T_+)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(\vec{s}-\vec{\omega})^2}{T_-}}\ ,\quad f^{-}(x,\vec{s})=o\left(e^{\frac{x}{s_1}}\right)\ \text{при}\ \ x\to+\infty, \quad (3)$$

$$f^{+}(x,\vec{s})=\begin{cases} f(x,s_1,s_2,s_3), & \text{если } s_1\ge 0\ ,\\ 0\ , & \text{если } \ s_1<0\ ,\end{cases}$$

$$f^{-}(x,\vec{s})=\begin{cases} f(x,-s_1,s_2,s_3), & \text{если } s_1\ge 0\ ,\\ 0, & \text{если } \ s_1<0,\end{cases}$$

$\vec{\omega}=(0,\omega,0)$; ρ_- и T_- - постоянные величины, $\varepsilon>0$ - численный параметр.

Доказана

Лемма 1.1. *Нелинейная граничная задача (1)-(3) эквивалентна следующему неоднородному линейному интегральному уравнению Винера-Хопфа:*

$$u(x)=g(x)+\int_0^\infty K(x-t)u(t)dt,\ \ x>0 \tag{4}$$

относительно функции $u(x)$, *где*

$$g(x)=\frac{\omega\rho_-}{(\pi T_-)^{\frac{3}{2}}}\int_0^\infty e^{-\frac{x}{s_1}}e^{-\frac{s_1^2}{T_-}}ds_1,\ \ \ x>0, \tag{5}$$

$$K(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{|x|}{s_1}}e^{-s_1^2}\left(1+\frac{\varepsilon}{4}-\frac{\varepsilon s_1^2}{2}\right)\frac{ds_1}{s_1}\ , \tag{6}$$

и следующим нелинейным соотношениям для $f^{\pm}(x,\vec{s})$:

$$f^{+}(x,\vec{\mathrm{s}})=\mathrm{e}^{-\frac{x}{s_1}}f^{+}(0,\vec{\mathrm{s}})+\int_0^x\frac{e^{-\frac{(\mathrm{x}-\mathrm{t})}{s_1}}}{\pi^{\frac{3}{2}}}e^{-(\vec{\mathrm{s}}-\vec{\mathrm{u}}(\mathrm{t}))^2}[1+\varepsilon[(\mathrm{s}_2-u(\mathrm{t}))^2-\frac{(\mathrm{s}_1^2+\mathrm{s}_3^2)}{2}]]\frac{dt}{s_1}\ ,$$

$$f^{-}(x,\vec{\mathrm{s}})=\int_x^\infty\frac{e^{-\frac{(\mathrm{t}-x)}{s_1}}}{\pi^{\frac{3}{2}}}e^{-(\vec{\mathrm{s}}-\vec{\mathrm{u}}(\mathrm{t}))^2}[1+\varepsilon[(\mathrm{s}_2-u(\mathrm{t}))^2-\frac{(\mathrm{s}_1^2+\mathrm{s}_3^2)}{2}]]\frac{dt}{s_1}\ .$$

§2 посвящен вопросам решения скалярного интегрального уравнения (4). Нетрудно проверить, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}K(x)dx=1. \tag{7}$$

Равенство (7) означает, что уравнение (4) представляет собой уравнение с необратимым интегральным оператором, ядро которого знакопеременно, что, в свою очередь, существенно усложняет вопрос разрешимости указанного уравнения. С применением специальной факторизации удается доказать теорему существования решения уравнения (4).

Наряду с уравнением (4) рассматривается следующее вспомогательное интегральное уравнение Винера-Хопфа:

$$F(x)=H(x)+\beta\int_0^\infty T_\beta(x-t)F(t)dt\ ,\ \ \ H\in L_1(0,+\infty)\cap L_\infty(0,+\infty) \tag{8}$$

с ядром

$$T_{\beta}(x)=\int_{0}^{\infty}e^{-\frac{|x|}{s}}G_1(s)(1-\beta^2s^2)ds,\ \ G_1(\mathrm{s})=\frac{1}{\sqrt{\pi}s}e^{-s^2}\left(\frac{1}{4}+\frac{\varepsilon}{4}-\frac{\varepsilon s^2}{2}\right), \tag{9}$$

где $\beta>0$ - свободный параметр.

Имеют место

<u>Теорема 2.1</u> *Для любого* $\varepsilon\in[0,2)$ *существует* $\beta_{\varepsilon}>0$ *такое, что оператор* $\hat{T}_{\beta_{\varepsilon}}$ *является сжимающим в* $L_1(0,\infty)$. *Более того, если* $\varepsilon\in[2,\infty)$, *то оператор* $\hat{T}_{\beta_{\varepsilon}}$ *не является сжимающим в* $L_1(0,\infty)$.

<u>Теорема 2.2.</u> *Пусть* $\varepsilon\in[0,2)$, *а функции* g *и* K *задаются посредством формул (5) и (6). Тогда неоднородное уравнение (4) имеет ограниченное решение вида* $u(x)\in\beta\int_{0}^{x}F(t)dt+F(x),\ \ F\in L_{\infty}(0,+\infty),$ *где* $F(x)$ *является решением линейного интегрального уравнения (8). Соответствующее однородное уравнение, кроме тривиального решения, обладает неотрицательным решением с асимптотикой* $O(x)$, *когда* $x\to+\infty$.

§3 посвящен изучению и решению следующего нелинейного интегрального уравнения Урысона

$$\varphi(x)=\int_{0}^{\infty}U\left(x,t,\varphi(t)\right)dt,\quad x\in R^{+}\equiv\left[0,+\infty\right) \tag{10}$$

относительно искомой измеримой и вещественной функции $\varphi(x)$. Здесь

$$U\left(x,t,z\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}\left(e^{-\frac{|x-t|}{p}}+\varepsilon e^{-\frac{(x+t)}{p}}\right)\frac{e^{-p^2}}{p}z\left(1+Q(z)\right)e^{-p^2(2Q(z)+Q^2(z))}dp, \tag{11}$$

$$\left(x,t,z\right)\in R^{+}\times R^{+}\times R^{+},\ \varepsilon\in[0,1),$$

где $Q(z)$ - определенная на $\left[0,+\infty\right)$ непрерывная вещественнозначная функция, удовлетворяющая следующим условиям:

а) существует число $A>0$ такое, что $Q(z)\geq0,\ \ z\in\left[A,+\infty\right)$,

$$Q\in L_1(R^{+})\cap L_{\infty}(R^{+}),\quad m_2(Q)\equiv\int_{0}^{\infty}z^2Q(z)dz<+\infty, \tag{12}$$

б) функция $zQ(z)\downarrow$ по z на $\left[A,+\infty\right)$, а функция $z+zQ(z)\uparrow$ по z на $\left[A,+\infty\right)$. (13)

Имеет место следующая

<u>Лемма 3.1.</u> *При условиях а)-б) функция* $U\left(x,t,z\right)$ *монотонно возрастает по* z *на* $\left[A,+\infty\right)$.

Для формулировки основного результата используем также следующий результат:

Теорема 3.1. *Пусть* $u_0(x)$ *допускает представление*

$$u_0(\tau)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{|\tau|}{p}}\frac{e^{-p^2}}{p}dp,\ \ \tau\in R, \tag{14}$$

а число $\varepsilon\in[0,1)$. *Тогда уравнение*

$$\Phi(x)=\int_0^\infty\left(u_0(x-t)+\varepsilon u_0(x+t)\right)\Phi(t)dt,\ \ x\geq 0 \tag{15}$$

имеет положительное решение с асимптотикой $\Phi(x)=\sqrt{2}x+o(x)$ *при* $x\to+\infty$. *Более того, для функции* $\Phi(x)$ *имеет место следующая оценка снизу:*

$$\Phi(x)\geq\frac{\sqrt{2}x}{2}+\frac{1}{2},\quad x\geq 0. \tag{16}$$

Используя теорему 3.1, а также специальные методы построения инвариантных конусных отрезков, для соответствующего нелинейного оператора Урысона доказывается следующая

Теорема 3.2. *При условиях а)-б) уравнение (10) (с ядром (11)) обладает однопараметрическим семейством положительных решений* $\left\{\varphi^\gamma(x)\right\}_{\gamma\in\Pi}$, *имеющих линейный рост в бесконечности. Более того, для* $\forall\gamma\in\Pi$ *справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\varphi^\gamma(x)}{x}=\sqrt{2}\gamma. \tag{17}$$

Множество параметров Π *задается согласно формуле*

$$\Pi\equiv\left[2\mathrm{A}+2\lambda,+\infty\right). \tag{18}$$

Здесь $\lambda\equiv\sup\limits_{x\geq 0}\psi(x)$, $\psi(x)$ *- ограниченное решение следующего неоднородного линейного интегрального уравнения с суммарно-разностным ядром:*

$$\psi(x)=g(x)+\int_0^\infty\left(u_0(x-t)+\varepsilon u_0(x+t)\right)\psi(t)dt,\ \ x\geq 0, \tag{19}$$

$$g(x)=\int_0^\infty\left(u_1(x-t)+\varepsilon u_1(x+t)\right)G\left(\sqrt{2}At+A\right)dt,\ \ x\in R^+, \tag{20}$$

$$G(z)\equiv z\left(2Q(z)+Q^2(z)\right),\ z\geq 0, \tag{21}$$

$$u_1(\tau)\equiv\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{|\tau|}{p}}pe^{-p^2}dp,\ \ \tau\in R. \tag{22}$$

Замечание 1. *Ограниченность решения уравнения (19) не предполагается, а устанавливается в ходе доказательства теоремы 3.2.*

В конце §3 приведены примеры функций, удовлетворяющих условиям а)-б) теоремы 3.2. В качестве функции $Q(z)$ могут служить следующие функции:

$$Q(z)=ze^{-z},\quad z\in[2,+\infty),\qquad\qquad Q(z)=ze^{-z^2},\quad z\in[1,+\infty),$$

$$Q(z)=\left(z^4+1\right)^{-1},\quad z\in[1,+\infty),\qquad\qquad Q(z)=\sin\left(z^4+1\right)^{-1},\quad z\in[1,+\infty).$$

В §4 рассматривается следующая нелинейная граничная задача:

$$s_1\frac{\partial f\left(x,\vec{s}\right)}{\partial x}+\rho\left(x\right)f\left(x,\vec{s}\right)=\frac{\rho^2\left(x\right)}{\pi^{\frac{3}{2}}}e^{-\left(\vec{s}-\vec{u}\left(x\right)\right)^2},\ x\in[0,d].\tag{23}$$

Здесь $f\left(x,\vec{s}\right)$ - искомая функция, $\vec{s}=\left(s_1,s_2,s_3\right),\ s_i\in\left(-\infty,+\infty\right),\ (i=1,2,3),$

$$\rho\left(x\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x,\vec{s}\right)ds_1ds_2ds_3,\tag{24}$$

$$\vec{u}\left(x\right)=\left(0,u\left(x\right),0\right);\quad u\left(x\right)=\frac{1}{\rho\left(x\right)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}s_2f\left(x,\vec{s}\right)ds_1ds_2ds_3\ .\tag{25}$$

К уравнению (23) присоединяются граничные условия

$$f^+\left(0,\vec{s}\right)=\frac{\rho_+e^{\frac{-(\vec{s}+\vec{\omega})^2}{T_+}}}{\left(\pi T_+\right)^{\frac{3}{2}}}\ ,\qquad f^-\left(d,\vec{s}\right)=\frac{\rho_-e^{\frac{-(\vec{s}-\vec{\omega})^2}{T_-}}}{\left(\pi T_-\right)^{\frac{3}{2}}}\ ,\tag{26}$$

где $\vec{\omega}=\left(0,\omega,0\right);\quad \rho_\pm=T_\pm=const;\quad \omega=const.$

Имеет место следующая

<u>Теорема 4.1.</u> *Пусть функции* $R_r\left(\tau\right)$ *и* $\mathrm{F}_r\left(\tau\right)$ *являются непрерывными на* $[0,\mathrm{r}]$ *решениями следующих линейных несвязанных интегральных уравнений вида:*

$$R_r\left(\tau\right)=h_r\left(\tau\right)+\int_0^r K\left(\tau-t\right)R_r\left(t\right)dt,\quad \tau\in[0,r],\tag{27}$$

$$\mathrm{F}_r\left(\tau\right)=g_r\left(\tau\right)+\int_0^r K\left(\tau-t\right)\mathrm{F}_r\left(t\right)dt\ ,\ \tau\in[0,r],\tag{28}$$

$$K\left(\tau\right)=\int_0^\infty e^{-|\tau|p}G_2\left(p\right)dp,\quad G_2\left(p\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-\frac{1}{p^2}}}{p}\ ,\tag{29}$$

$$h_r\left(\tau\right)=\int_0^\infty\left[\mathrm{e}^{-\tau p}G_+\left(p\right)+e^{-\left(r-\tau\right)p}G_-\left(p\right)dp\right],\tag{30}$$

$$g_r\left(\tau\right)=\int_0^\infty\omega\left[e^{-\left(r-\tau\right)p}G_-\left(p\right)-e^{-\tau p}G_+\left(p\right)\right]dp,\quad \tau\in[0,\mathrm{r}],\tag{31}$$

$$G_{\pm}\left(p\right)=\frac{\rho_{\pm}}{\sqrt{\pi T_{\pm}p^{2}}}e^{-\frac{1}{p^{2}T_{\pm}}} . \tag{32}$$

Тогда решение нелинейной граничной задачи (23)-(26) выражается через функции $R_r\left(\tau\right)$ и $\mathrm{F}_r\left(\tau\right)$ по формулам

$$\rho(x)=R_r\left(\tau(x)\right),\quad u(x)=\frac{\mathrm{F}_r\left(\tau(x)\right)}{R_r\left(\tau(x)\right)} ,$$

где $\tau(x)$ является обратной функцией к функции $x\left(\tau\right)=\int\limits_0^{\tau}\frac{d\tau'}{R_r\left(\tau'\right)}$.

Кинетическая толщина r определяется по формуле $r=\tau\left(d\right)$.

***Замечание 2**. Существование и единственность непрерывного решения уравнений (27), (28) устанавливается в ходе доказательства теоремы 4.1.*

***Замечание 3.** Существование обратной функции к функции $x\left(\tau\right)$ дополнительно устанавливается в ходе доказательства теоремы 4.1.*

В конце §4 в качестве приложения на простейшем примере определена кинетическая толщина слоя и приведены результаты численных расчетов.

Вторая глава диссертации посвящена вопросам разрешимости нелинейного уравнения Больцмана в рамках модели Шахова для классической задачи течения газа в плоском слое, ограниченном двумя бесконечными параллельными пластинками.

В § 5 в ходе вывода основных интегральных уравнений удается частично упростить нелинейность рассматриваемой задачи путем перехода к новому аргументу. При этом первоначальная граничная задача упрощается, но остается существенно нелинейной. Используя специфичность полученной нелинейной системы и исходя из некоторых физических соображений, предлагается эффективный метод приближенного решения полученной нелинейной системы сведением ее к следующей системе линейных интегральных уравнений:

$$\begin{aligned}\varphi(\tau)&=h_1(\tau)+\int\limits_0^r K_{11}(\tau-t)\varphi(t)dt+\int\limits_0^r K_{12}(\tau-t)\psi(t)dt,\\ \psi(\tau)&=h_2(\tau)+\int\limits_0^r K_{21}(\tau-t)\varphi(t)dt+\int\limits_0^r K_{22}(\tau-t)\psi(t)dt,\quad \tau\in[0,r],\end{aligned} \tag{33}$$

где

$$K_{ij}(\tau)=\int\limits_0^{\infty}e^{-\frac{|\tau|}{s}}G_{ij}(s)ds,\ i,j=1,2,\quad \tau\in[-r,r], \tag{34}$$

$$G_{11}(s)=\frac{1}{\sqrt{\pi}s}e^{-s^2}, \quad G_{12}(s)=\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}s}e^{-s^2}\left(s^2-\frac{3}{2}\right), \tag{35}$$

$$G_{21}(s)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-s^2}(s^2+1), \quad G_{22}(s)=\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\left(s^5-\frac{s^3}{2}-\frac{s}{2}\right), \tag{36}$$

$$h_i(\tau)=\int_0^\infty\left[e^{-\frac{r}{s}}G_+^{(i)}(s)+e^{-\frac{(r-\tau)}{s}}G_-^{(i)}(s)\right]ds,\ i=1,2, \tag{37}$$

$$\mathrm{G}_\pm^{(1)}(\mathrm{s})=\frac{\rho_\pm}{\sqrt{\pi \mathrm{T}_\pm}}\mathrm{e}^{-\frac{|\vec{s}|^2}{\mathrm{T}_\pm}}, \quad \mathrm{G}_\pm^{(2)}(\mathrm{s})=\frac{\rho_\pm\sqrt{\mathrm{T}_\pm}}{\sqrt{\pi}}\mathrm{se}^{-\frac{|\vec{s}|^2}{\mathrm{T}_\pm}}\left(\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{T}_\pm}+1+\frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{T}_\pm}\right) \tag{38}$$

и к нелинейному скалярному интегральному уравнению типа Урысона

$$\varphi(\tau)\chi(\tau)=h(\tau)+\int_0^r W_5(\tau,t,\chi(t))\varphi(t)dt \tag{39}$$

относительно искомой функции $\chi(\tau)$, где

$$h(\tau)=\frac{2}{3}\frac{\alpha q_0}{\sqrt{\pi}}+\int_0^\infty\left[e^{-\frac{\tau}{s}}G_+(s)+e^{-\frac{|r-\tau|}{s}}G_-(s)\right]ds, \tag{40}$$

$$G_\pm(s)=\frac{2}{3\sqrt{\pi}}\rho_\pm\sqrt{T_\pm}e^{-\frac{s^2}{T_\pm}}\left(\frac{s^2}{T_\pm}+1\right)e^{-s^2}-\frac{2\alpha_0 q_0}{3\sqrt{\pi}}\left(s^5-\frac{s^3}{2}-\frac{s}{2}\right)e^{-s^2}, \tag{41}$$

$$W_5(\tau,t,\chi)=\frac{2}{3}\frac{\sqrt{\chi}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{|\tau-t|}{s}}e^{-\frac{s^2}{\chi}}\left(\frac{s}{\chi}^2+1\right)\frac{ds}{s}. \tag{42}$$

Здесь $\varphi(\tau)$ - заданная непрерывная функция на $[0,r]$, удовлетворяющая системе уравнений (33), $\alpha>0$ - параметр Шахова, q_0 - проекция вектора потока энергии.

§6 посвящен изучению и решению системы (33).

Пусть E - одно из следующих банаховых пространств: $L_p[0,r]$, $p\geq 1$, $M[0,r]$. $E^2=E\times E$ - пространство двумерных вектор - столбцов с элементами из E.

Обозначим

$$\lambda(r)=\sum_{i=1}^2\int_{-r}^r|k_{1i}(\tau)|d\tau,$$

$$\mu(r)=\sum_{i=1}^2\int_{-r}^r|k_{2i}(\tau)|d\tau.$$

Заметим, что так как функции $\lambda(r)$ и $\mu(r)$ непрерывны и

$$\lambda(0)=0,\ \mu(0),\ \ \lambda(r)>0,\ \ \mu(r)>0,\ \ \lambda(r)\uparrow \text{ по } r,\ \mu(r)\uparrow \text{ по } r,$$

то существуют r_1 и r_2, при которых

$$\lambda(r_1) < 1, \quad \mu(r_2) < 1.$$

Для всех $0 \le r \le r_1$ и $0 \le r \le r_2$ имеет место

$$\lambda(\mathrm{r}) < 1, \quad \mu(\mathrm{r}) < 1.$$

Тогда

$$\sigma = \max\left(\lambda(r), \mu(r)\right) < 1.$$

Доказывается следующая

Теорема 6.1. *Пусть ядра* $K_{ij}(\tau), (i, j = 0,1,2)$ *и* $h_i(\tau)$ $(i = 1,2)$ *системы (33) задаются согласно (34)-(38). Тогда при* $\sigma < 1$ *система уравнений (33) имеет единственное решение в каждом из пространств* $E^2[0, r]$.

§7 посвящен вопросам разрешимости нелинейного интегрального уравнения (39) относительно температуры $\chi(\tau)$.

Доказана следующая

Теорема 7.1. *Пусть* $\varphi(\tau)$ *- заданная непрерывная на* $[0, r]$ *вещественная функция, удовлетворяющая системе (33). Тогда нелинейное интегральное уравнение (39) имеет положительное решение в* $\mathrm{C}[0, r]$. *Имеют место оценки*

$$\int_0^r \chi(t)\Gamma(t, \chi(t))d\tau \le \frac{C_r}{m}; \tag{43}$$

$$\chi(t) \ge \frac{h(\tau)}{M}, \tag{44}$$

где

$$0 < C_r = \int_0^r h(\tau)d\tau,$$

$$m = \min_{t \in [0,r]} \varphi(t), \quad M = \max_{t \in [0,r]} \varphi(t), \tag{45}$$

$$\Gamma(t, z) = \int_0^r W_5(\tau, t, z)d\tau = \frac{2}{3\sqrt{\pi z}} \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{z}} \left(\frac{s^2}{z} + 1\right)\left[e^{-\frac{t}{s}} + e^{-\frac{(r-t)}{s}}\right]ds. \tag{46}$$

§8 посвящен вопросу линеаризации первоначальной нелинейной системы. В результате линеаризации исходной системы получена линейная система интегральных уравнений относительно поправок искомых функций. Приведены результаты некоторых численных расчетов. Найден температурный скачок как в линейном, так и в нелинейном случаях. Осуществлен сравнительный анализ между моделями БГК и Шахова.

Относительная ошибка в линейном и нелинейном случаях в рамках модели Шахова составляет незначительный процент (2% - 3 %). Последний факт дает основание на эвристическом уровне утверждать, что предложенный нами подход к решению исходной нелинейной системы близок к точному решению.

В §9 рассматриваются следующие нелинейные интегро-дифференциальные уравнения:

$$\pm s_1 \frac{\partial f^{\pm}(x,\vec{s}_1)}{\partial x} + f^{\pm}\left(x,\vec{s}\right) = f_0\left(x,\vec{s}\right)\left(1+\phi\left(x,\vec{s}\right)\right),\ x \in [0,\mathrm{r}], \tag{47}$$

где

$$f_0\left(x,\vec{s}\right) = \frac{\rho_0 e^{-\left(\vec{s}-\vec{u}(x)\right)^2}}{\pi^{\frac{3}{2}}}, \tag{48}$$

$$\phi\left(x,\vec{s}\right) = \frac{\alpha q_0 s_1}{\rho_0}\left[\left(\vec{s}-\vec{u}(x)\right)^2 - \frac{5}{2}\right], \tag{49}$$

$$\vec{s} = (s_1,s_2,s_3),\ s_1 \in (0,+\infty),\ s_2,s_3 \in (-\infty,+\infty)\ ,\ \vec{u}(x) = (0,u(x),0),$$

$$u(x) = \frac{1}{\rho_0}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} s_2\left[f^{+}\left(x,\vec{s}\right) + f^{-}\left(x,\vec{s}\right)\right]ds_3 ds_2 ds_1 \tag{50}$$

с граничными условиями

$$f^{+}\left(0,\vec{s}\right) = \frac{\rho_+ e^{-\left(\frac{\vec{s}+\vec{\omega}}{T_+}\right)^2}}{(\pi T_+)^{\frac{3}{2}}},\ f^{-}\left(r,\vec{s}\right) = \frac{\rho_- e^{-\left(\frac{\vec{s}-\vec{\omega}}{T_-}\right)^2}}{(\pi T_-)^{\frac{3}{2}}}, \tag{51}$$

$$\vec{\omega} = (0,\omega,0);\quad \omega = const,\ \ \rho_{\pm} = const,\ \ T_{\pm} = const.$$

Уравнения (47) выводятся из нелинейного стационарного уравнения Больцмана в рамках модели Шахова в предположении постоянства температуры $T_0 = 1$, плотности ρ_0 и проекции вектора потока энергии q_0. В отличие от §5, здесь предполагается, что пластинки движутся относительно друг друга со скоростью $\vec{\omega}$.

Справедлива

<u>Теорема 9.1.</u> *Нелинейная граничная задача (47)-(51) эквивалентна линейному интегральному уравнению*

$$u(x) = g(x) + \int_0^r K(x-t)u(t)dt, \tag{52}$$

где

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{|x|}{s}} e^{-s^2}\left[\frac{1}{s} + \frac{\alpha q_0}{\rho_0}\left(s^2 - \frac{3}{2}\right)\right]ds, \tag{53}$$

$$g(x)=g_-(x)-g_+(x),$$

$$g_-(x)=\omega\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{(r-x)}{s}}e^{-\frac{s^2}{T_-}}\rho_-}{\sqrt{\pi T_-}}ds, \qquad (54)$$

$$g_+(x)=\omega\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{x}{s}}e^{-\frac{s^2}{T_+}}\rho_+}{\sqrt{\pi T_+}}ds.$$

Более того, если дополнительно выполняется условие $\frac{\alpha q_0}{\rho_0}<\sqrt{2}$, *то уравнение (52) имеет единственное непрерывное на отрезке* $[0,r]$ *решение вида*

$$u(x)=u_-(x)-u_+(x), \qquad (55)$$

где $u_+(x)$ *и* $u_-(x)$ *являются неотрицательными решениями уравнений*

$$u_\pm(x)=g_\pm(x)+\int_0^r K(x-t)u_\pm(t)dt,\ x\in[0,r]. \qquad (56)$$

Замечание 5. *Заметим, что, когда пластинки неподвижны* $(\vec{\omega}=0)$, *то линейное уравнение (52), как и следовало ожидать, обладает только тривиальным решением.*

Выражаю искреннюю благодарность своему научному руководителю доктору физ.-мат. наук, профессору А.Х. Хачатряну за постановку задач и полезные замечания. Считаю своим приятным долгом выразить глубокую благодарность доктору физ.-мат. наук Х.А. Хачатряну за постоянное внимание и полезные обсуждения при подготовке настоящей диссертации.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. А.Х. Хачатрян, А.А. Хачатрян. К решению одной нелинейной граничной задачи для модельного уравнения Больцмана. //Вестник РАУ, №1, стр. 46-56, 2016.
2. А.Х.Хачатрян, А.А. Хачатрян. О разрешимости одной нелинейной граничной задачи. //Математика в высшей школе, т. 12, №2-3, стр.24-33, 2016.
3. А.А. Хачатрян. О разрешимости одной нелинейной граничной задачи, возникающей в кинетической теории газов. //Математика в высшей школе, т. 12, №2-3, стр.11-15, 2016.

4. А.Х. Хачатрян, А.А. Хачатрян. Некоторые вопросы разрешимости уравнения Больцмана в рамках модели Шахова. //Теоретическая и математическая физика, т. 191, №3, стр.441-455, 2017.

   A.Kh. Khachatryan, A.A. Khachatryan. Some solvability problems for the Boltzmann equation in the framework of the Shakhov model. //J. Theoretical and Mathematical Physics. vol. 191, №3, pp. 856-869, 2017.

5. А.Х. Хачатрян, Х.А. Хачатрян, А.А. Хачатрян. Однопараметрическое семейство положительных решений для одного нелинейного интегрального уравнения, возникающего в физической кинетике. // Известия НАН Армения, т. 53, № 1, стр. 74-83, 2018.

   A.Kh. Khachatryan, Kh.A. Khachatryan, A.A. Khachatryan. One–parameter family of positive solutions for a nonlinear integral equations arising in physical kinetics. //Journal of Contemporary Mathematical Analysis. vol.53, №1, pp. 35-41, 2018.

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Խաչատրյան Համայակ Ազատի

ԳԱԶԵՐԻ ԿԻՆԵՏԻԿ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՈՐՈՇ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾԵԼԻՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐՑԵՐ

Ատենախոսությունը նվիրված է գազերի կինետիկ տեսության մեջ ծագող որոշ ոչ գծային եզրային խնդիրների լուծման հարցերին: Այդ տեսության հիմքում ընկած է հանրահայտ Բոլցմանի ոչ գծային ինտեգրա-դիֆերենցիալ հավասարումը: Բոլցմանի տարբեր մոդելային հավասարումներով նկարագրվում են գազի հոսքի դասական խնդիրները կիսատարածությունում և վերջավոր հաստության շերտում: Զուգակցելով ոչ գծային անալիզի տեսության մեթոդները, ճառագայթման տեղափոխման տեսության մեջ զարգացված մի շարք մեթոդները, հատուկ ֆակտորիզացիոն և հատուկ հաջորդական մոտավորության մեթոդները, նոր մաթեմատիկական կառուցումների հետ հաջողվում է ապացուցել վերը նշված հավասարումների համար լուծման գոյության (երբեմն միակության) թեորեմներ, ինչպես նաև նկարագրել կոնստրուկտիվ մեթոդներ լուծումների կառուցման համար:

Ատենախոսությունում ստացվել են հետևյալ հիմնական արդյունքները.

- Գազերի կինետիկ տեսության մեջ ծագող երկու տարբեր ոչ գծային եզրային խնդիրները ճշգրիտ գծայնացվել են: Նրանցից մեկը բերվել է ոչ շրջելի օպերատորով գծային ինտեգրալ հավասարման, որի կորիզը նշանափոխ է, իսկ մյուսը՝ սեղմող օպերատորով գծային ինտեգրալ հավասարման:

Ապացուցվել են համապատասխան հավասարումների համար լուծման գոյության թեորեմներ:

- Ուրիսոնի տիպի ոչ գծային ինտեգրալ հավասարման համար ապացուցվել է անվերջությունում գծային աճ ունեցող ֆունկցիաների տարածությանը պատկանող դրական լուծումների մեկ պարամետրանոց ընտանիքի գոյության թեորեմ: Ստացվել է ճշգրիտ ասիմպտոտիկ բանաձև, ինչպես նաև երկկողմանի գնահատականներ ստացված լուծումների համար: Բերվել են թեորեմի պայմաններին բավարարող և ոչ գծայնությունը նկարագրող ֆունկցիաների օրինակներ:
- Շախովի մոդելի շրջանակում Բոլցմանի ոչ գծային ստացիոնար հավասարումը բերվել է ոչ գծային ինտեգրալ հավասարումների համակարգի: Առաջարկվել է ոչ գծային համակարգի լուծման մեթոդ բերելով այն գծային ինտեգրալ հավասարումների համակարգի և Ուրիսոնի տիպի սկալյար ոչ գծային ինտեգրալ հավասարման: Ապացուցվել է ստացված գծային ինտեգրալ հավասարումների համակարգի լուծման գոյության և միակության թեորեմ, ինչպես նաև դրական լուծման գոյության թեորեմ ոչ գծային Ուրիսոնի տիպի հավասարման համար:
- Շախովի պարզեցված մոդելի շրջանակներում Բոլցմանի հավասարումը գծայնացվել է և գազի արագության նկատմամբ ստացված անհամասեռ ինտեգրալ հավասարման համար ապացուցվել է անընդհատ ֆունկցիաների տարածությունում լուծման գոյության և միակության թեորեմ:

S U M M A R Y

Khachatryan Hamayak

THE ISSUES OF SOLVABILITY OF SOME NONLINEAR BOUNDARY-VALUE PROBLEMS IN KINETIC THEORY OF GASES

The present dissertation is devoted to the issues for solvability of some nonlinear boundary-value problems arising in kinetic theory of gases, which is based on well- known Boltzmann nonlinear integral-differential equation. Using Boltzmann model equations gas flow classic problems in semi- infinite medium or in finite plane channel are described. Combining different methods of nonlinear analysis theory, some methods of radiative transfer theory, special factorization methods with new mathematical constructions it is possible to prove theorems for existence (sometimes uniqueness) of above mentioned Boltzmann model nonlinear equations.

In the dissertation, the following results are obtained:

1. Two different nonlinear boundary-value problems arising in kinetic theory of gases are exactly linearized. One of them is reduced to the linear integral equation with invertible operator, the kernel of which is alternating, and the next one – to the integral equation with contractive operator. The theorems for existence of obtained solutions are proved.
2. For one Urysohn type nonlinear integral equation the theorem of existence of one parametric family of positive solutions in space of functions having linear growth at infinity is proved. The exact asymptotic

formulas, as well as two sided estimations for solution are obtained. The examples of functions describing nonlinearity and satisfying conditions of theorem are given.

3. Nonlinear stationary Boltzmann equation in framework of Shakhov model is reduced to the system of nonlinear integral equations. The solution method for nonlinear system is suggested reducing it to linear system of integral equations and scalar Urysohn type nonlinear integral equation. The existence and uniqueness theorem for obtained linear system, as well as existence of positive solution for nonlinear Urysohn equation are proved.
4. The Boltzmann equation in framework of Shakhov simplified model is linearized. For the obtained nonhomogeneous integral equation for determination of gas velocity the theorem of solution existence and uniqueness in space of continuous functions is proved.