ՀՄԴ 512.1
Մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկա

Ռոբերտ ՄՈՒՍԱՅԵԼՅԱՆ
Գորիսի պետական համալսարան, ֆ.մ.գ.թ., մաթեմատիկայի
և ինֆորմատիկայի ամբիոնի դոցենտ
E-mail: rubmus49@gmail.com

ԵՐԿՆԻՍՏ ԵՎ ԲԱԶՄԱՆԻՍՏ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐ

Աշխատանքը վերաբերում է երկնիստ և բազմանիստ անկյուններին: Բազմանիստ անկյունները, մասնավորաբար եռանիստ անկյունները, որպես դպրոցական դասընթացի ծրագրային նյութեր, դպրոցում քիչ են արժանանում ուշադրության, չեն նշվում նրանց հատկությունները, նրանց վերաբերյալ քիչ խնդիրներ են լուծվում: Աշխատանքում դիտարկվում են սինուսների և կոսինուսների թեորեմները եռանիստ անկյունների համար, նշվում են բազմանիստ անկյունների որոշ հատկություններ: Դիտարկվում են մի շարք խնդիրներ, որոնք լուծվում են աշխատանքում նշված փաստերի կիրառությամբ:

Բանալի բառեր: *Երկնիստ անկյուն, եռանիստ անկյուն, բազմանիստ անկյուն, խնդիր, լուծում:*

Р. Мусаелян

ДВУГРАННЫЕ И МНОГОГРАННЫЕ УГЛЫ

В работе рассматриваются двугранные и многогранные углы. Многогранным углам, в частности, трехгранным, в школьной программе не уделяется должное внимание, не приводятся их свойства, решают мало задач из этой области.

Также приводятся теоремы синусов и косинусов для трегранных углов. Решается несколько задач с применением приведенных фактов.

Ключевые слова: *двугранный угол, трехгранный угол, многогранный угол, задача, решение.*

R. Musayelyan

TWO AND MULTI-LAYER ANGLES

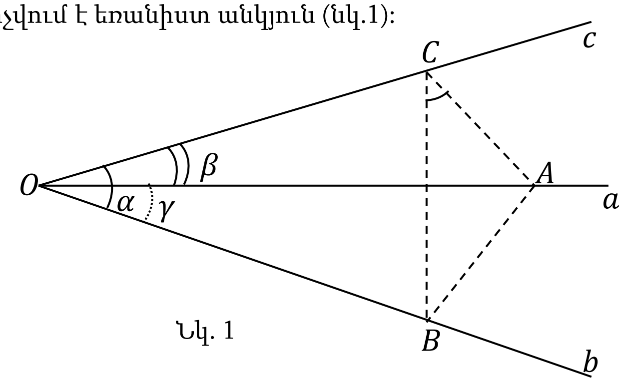
The following research refers to two and multi-layer angles.The multi-layer angles, particularly the three-layer ones, are scarcely included in the school curricula, their properties are merely mentioned in the curricula and fewer problems are solved. The work refers to the theorems of sine and cosines for three-layer angles as well as some peculiarities of multi-layer angles.

Some problems are solved by the application of the facts mentioned in the work.

Keywords: *dihedral, trihedral, polyhedral, problem, solution*

Տարածության մեջ երկու հատվող հարթություններ տարածությունը տրոհում են չորս մասի: Նրանցից յուրաքանչյուրը բաղկացած է կիսահարթություններից, որոնք ունեն ընդհանուր կող: Երկու կիսահարթություններով կազմված պատկերը կոչվում է երկնիստ անկյուն, իսկ նրանց ընդհանուր կողմը՝ երկնիստ անկյան կող: Երկնիստ անկյունը չափվում է աստիճանով, և այն հավասար է նրա գծային անկյան աստիճանային չափին: Գծային անկյունը կառուցվում է այսպես. երկնիստ անկյան կողին ուղղահայաց հարթությունը հատում է երկնիստ անկյան նիստերը ճառագայթներով: Այդ ճառագայթների կազմած անկյունն էլ հենց գծային անկյունն է: Բազմանիստ անկյունների մասին շարադրանքը սկսենք եռանիստ անկյան գաղափարից:

Դիտարկենք O կետից ելնող երեք ճառագայթ՝ a, b, c, որոնք չեն գտնվում մի հարթության մեջ: Պատկերը, որը կազմված է մի կետից ելնող, մի հարթության մեջ չգտնվող երեք ճառագայթով և հարթությունների մասերով, որոնք ընկած են այդ ճառագայթների միջև, կոչվում է եռանիստ անկյուն (նկ.1):



Նկ. 1

O կետը կոչվում է եռանիստ անկյան գագաթ, a, b, c ճառագայթները՝ եռանիստ անկյան կողեր, $(a,b), (b,c), (a,c)$ հարթությունների մասերը՝ եռանիստ անկյան նիստեր: Նիստերը զույգ հարթ անկյուններ են և անվանում են եռանիստ անկյան հարթ անկյուններ: Նկար 1-ում՝ $\angle(a,b) = \gamma$, $\angle(b,c) = \alpha$, $\angle(a,c) = \beta$: Այստեղ և հետագայում x և y ճառագայթներով կազմված անկյունը՝ կնշանակենք $\angle(x,y)$ սիմվոլով:

Կան էական նմանություններ հարթության մեջ եռանկյան երկրաչափության և եռանիստ անկյան երկրաչափության միջև: Եռանկյան համար, ինչպես գիտենք, ճիշտ են սինուսների և կոսինուսների թեորեմները: Եռանիստ անկյան համար այդ թեորեմների և որոշ փաստերի մասին, որոնք կշարադրվեն ստորև, ընթերցողը կարող է գտնել [1] և [2] գրքերում՝ տեղակայված համապատասխանաբար 528-538 և 253-258 էջերում:

ԹԵՈՐԵՄ 1: Եթե α, β, γ -ն եռանիստ անկյան հարթ անկյուններն են, իսկ C-ն՝ γ հարթ անկյան հակադիր երկնիստ անկյունը, ապա

$$\cos\gamma = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos C \quad (1)$$

Այս թեորեմը կոչվում է կոսինուսների թեորեմ եռանիստ անկյան համար: Թեորեմն ավելի լավ հասկանալու համար պետք է անդրադառնալ նկ. 1-ին և $\angle C$-ն ընկալել որպես c կողին առընթեր երկնիստ անկյան գծային անկյուն: $\angle C$-ն անվանում են եռանիստ անկյան γ հարթ անկյան հակադիր երկնիստ անկյուն [2]:

Համաձայն թեորեմի մյուս անկյունների համար կունենանք.

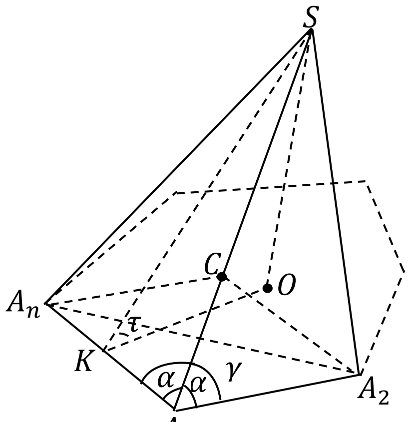
$$\cos\alpha = \cos\gamma \cdot \cos\beta + \sin\gamma \cdot \sin\beta \cdot \cos A$$

$$\cos\beta = \cos\gamma \cdot \cos\alpha + \sin\gamma \cdot \sin\alpha \cdot \cos B$$

Այսպիսով, կոսինուսների թեորեմը եռանիստ անկյան համար արտահայտում է կապ եռանիստի հարթ անկյունների և նրա որևէ երկնիստ անկյան միջև: Ավելի կոնկրետ տված հարթ անկյունների միջոցով կարելի է գտնել եռանիստ անկյան որևէ երկնիստ անկյունը:

ԽՆԴԻՐ 1: Գտնել կանոնավոր n անկյուն բուրգի կողմնային կողին առընթեր երկնիստ անկյունը, եթե հիմքին առընթեր երկնիստ անկյունը հավասար է τ-ի:

ԼՈՒԾՈՒՄ:



Նկ. 2

Նկար 2-ում պատկերված է կանոնավոր n անկյուն բուրգ և կատարված են խնդրին համապատասխանող նշանակումները: Նկարում $\angle SKO$-ն հիմքին առընթեր երկնիստ անկյունն է, իսկ $\angle A_nCA_2 = \angle C$-ն կողմնային կողին առընթեր երկնիստ անկյունը: Դիտարկենք A_1 գագաթով եռանիստ անկյուն, որի հարթ անկյուններն են՝ $\angle KA_1S = \alpha, \angle SA_1A_2 = \alpha, \angle A_nA_1A_2 = \gamma$: Այստեղ կատարված են նույն նշանակումները ինչ որ (1) բանաձևում: Բուրգը կանոնավոր է: Հետևաբար նշված եռանիստ անկյան երկու հարթ անկյունները հավասար են: Որպես կանոնավոր բազմանկյան անկյուն $\angle A_nA_1A_2 = \gamma = \frac{n-2}{n}\pi = \left(\pi - \frac{2\pi}{n}\right)$ ([3], էջ271): (1) հավասարությունից որոնելի C անկյան համար կստանանք՝

$\cos C = \frac{\cos\gamma - \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = -\frac{\cos\frac{2\pi}{n} + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$: Հայտնի է, որ ([3], էջ273)

$$A_1A_n = a_n = 2R \cdot \sin\frac{\pi}{n} \quad \text{և} \quad OK = r = R \cdot \cos\frac{\pi}{n},$$

որտեղ $R = OA_1$՝հիմքին արտագծյալ շրջանագծի շառավիղն է, իսկ r-ը՝ ներգծյալ շրջանագծի շառավիղը: ΔOKS -ից կստանանք՝

$$SK = \frac{R \cdot \cos\frac{\pi}{n}}{\cos\tau}:$$

Այժմ անդրադառնանք ΔA_1KS-ին և օգտագործենք SK-ի վերը ստացված արժեքը.

$$tg\,\alpha = \frac{1}{\cos\tau\, tg\frac{\pi}{n}}:$$

Օգտագործենք $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+tg^2\alpha}$ եռանկյունաչափական նույնությունը և $tg\alpha$-ի վերը ստացված արժեքը: Կստանանք՝

$$\cos^2\alpha = \frac{\cos^2\tau\, tg^2\frac{\pi}{n}}{1+\cos^2\tau\, tg^2\frac{\pi}{n}}: \tag{3}$$

Դժվար չէ այնուհետև հասկանալ, որ

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{1+\cos^2\tau\, tg^2\frac{\pi}{n}}: \tag{4}$$

Տեղադրելով $\sin^2\alpha -$ ի և $\cos^2\alpha -$ ի ստացված (3) և (4) արտահայտությունները (2). բանաձևում՝ այն կձևափոխենք հետևյալի՝

$$\cos C = -\left(\cos\frac{2\pi}{n} + 2\cos^2\tau\cdot\sin^2\frac{\pi}{n}\right): \tag{5}$$

Այժմ կատարելով եռանկյունաչափական ձևափոխություններ՝ ([4], էջ38)(5) բանաձևը կգրանցվի այսպես

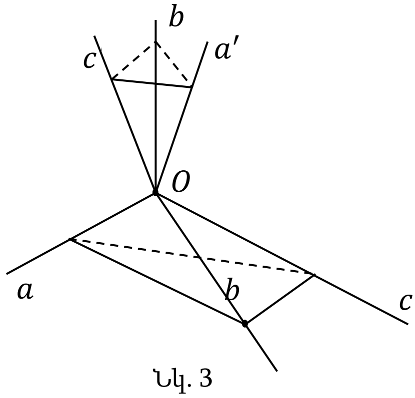
$$\cos C = -\left(\cos^2\tau + \sin^2\tau\cdot\cos\frac{2\pi}{n}\right):$$

Որոնելի C անկյան համար կստանանք

պատասխան՝ $C = \pi - arc\cos\left(\cos^2\tau + \sin^2\tau\cdot\cos\frac{2\pi}{n}\right)$:

Այժմ կատարենք հետևյալ կառուցումը. տված $(a\, b\, c)$ եռանիստ անկյան O գագաթում տանենք c' ճառագայթը, այնպես, որ $c' \perp (a,b)$ և c' ճառագայթը գտնվի այն կիսատարածությունում, որում չի գտնվում c ճառագայթը: Նման ձևով կառուցենք նաև a' և b' ճառագայթները: Ստացված նոր ճառագայթներով կազմված $(a'\, b'\, c')$ եռանիստ անկյունը կոչվում է տված (abc) եռանիստ անկյան բևեռային:

Նշենք, որ բևեռային լինելու գաղափարը փոխադարձ է: Այսինքն, եթե $(a'b'c')$ եռանիստ անկյունը բևեռային է (abc) եռանիստ անկյանը, ապա (abc) եռանիստ անկյունը բևեռային է $(a'b'c')$ եռանիստ անկյանը: Իրոք, ըստ սահմանման, օրինակ՝



Նկ. 3

$$a' \perp (b,c) \Rightarrow a' \perp b \quad և \quad a' \perp c, \tag{ա}$$
$$b' \perp (a,c) \Rightarrow b' \perp a \quad և \quad b' \perp c \tag{բ}$$

(ա) և (բ) պայմաններից հետևում է, որ $c \perp (a',\, b')$: Նման ձևով ցույց կտրվի համապատասխան առնչությունները a և b-ի համար:

Հեշտ է համոզվել, որ $\angle(b',c') = 180^0 - \angle A$, որտեղ $\angle A$-ն a կողին առընթեր երկնիստ անկյունն է: Ուրեմն՝ ճշմարտացի են հետևյալ բանաձևերը.

$$\alpha' = \angle(b',c') = 180^0 - \angle A$$
$$\beta' = \angle(a',c') = 180^0 - \angle B \tag{6}$$

$$\gamma' = \angle(a', b') = 180^0 - \angle C,$$

որտեղ $\angle B$-ն $\angle C$ −նb ևc կողերին առընթեր երկնիստ անկյուններն են:

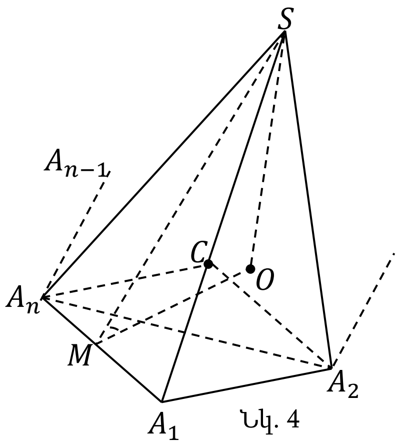
ԹԵՈՐԵՄ 2: Եթե A, B, C անկյունները եռանիստ անկյան երկնիստ անկյուններն են, իսկ γ անկյունը C երկնիստ անկյան հակադիր հարթ անկյունն է, ապա՝

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \cdot \sin B \cdot \cos \gamma$$

Ապացուցումը կարելի է ստանալ՝ օգտվելով (1) և (6) բանաձևերից:

ԽՆԴԻՐ 2: Գտնել կանոնավորn-անկյուն բուրգի հիմքին առընթեր երկնիստ անկյունները, եթե կողմնային կողին առընթեր երկնիստ անկյունները հավասար են σ:

ԼՈՒԾՈՒՄ:



Նկ. 4

1-ին եղանակ: Խնդիր 1-ում անհայտ էր $\angle C$-ն, իսկ հայտնին՝ $\angle SKO = \tau$: Այս խնդրում հակառակը՝ $\angle C = \sigma$, իսկ $\angle SMO = x$՝ անհայտ, որոնելի: Խնդիր 1-ի (5) բանաձևը այս խնդրի համար կընդունի

$$\cos \sigma = -\cos \frac{2\pi}{n} - \cos^2 x \cdot 2 \sin^2 \frac{\pi}{n} \qquad (7)$$

տեսքը: Այս բանաձևից պարզագույն ձևափոխություններից հետո կստանանք՝

$$\sin^2 x = \frac{1 + \cos \sigma}{1 - \cos \frac{2\pi}{n}}:$$

Հետևաբար, կանոնավոր n անկյուն բուրգի հիմքին առընթեր երկնիստ x անկյունը հավասար կլինի

$$x = arc \sin \sqrt{\frac{1+\cos \sigma}{1-\cos \frac{2\pi}{n}}}: \qquad (8)$$

2-րդ եղանակ: Դիտարկենք A_1 գագաթով եռանիստ անկյունը՝ պատկերված նկար 4-ում: Այդ եռանիստ անկյան երկնիստ անկյունների մեծություններն են՝ σ, x և x, որովհետև n-անկյուն բուրգի հիմքին առընթեր բոլոր անկյունները հավասար են: Անդրադառնալով (8) բանաձևին՝ կստանանք՝

$$\cos \sigma = -\cos^2 x + \sin^2 x \cdot \cos \gamma \qquad (9)$$

Այստեղ γ հարթ անյունը հակադիր է C երկնիստ անկյան նկատմամբ: Որպես կանոնավոր n անկյուն բազմանկյան ներքին անկյուն՝ $\gamma = \pi - \frac{2\pi}{n}$: Հետևաբար (9) բանաձևից կստանանք՝

$$\sin^2 x = \frac{1 + \cos \sigma}{1 - \cos \frac{2\pi}{n}}:$$

Այսպիսով, այս խնդրի լուծման երկու մոտեցումներն էլ բերում են միևնույն (8) բանաձևով գրված պատասխանին, որն էլ օրինաչափ է:

Ստացվում է, որ (1) և (7) բանաձևերը հնարավորություն են տալիս տված եռանիստ անկյան հարթ անկյունների միջոցով գտնել նրա երկնիստ անկյունները և հակառակը, տված A, B, C երկնիստ անկյունների օգնությամբ գտնել եռանիստ անկյան α, β, γ հարթ ակյունները:

Այժմ ձևակերպենք եռանիստ անկյան վերաբերող մի թեորեմ, որն արտահայտում է մեկ այլ կապ նրա հարթ անկյունների և նրանց երկնիստ անկյունների միջև, քան (1) և (7) բանաձևերով տրված կապերն են: Այն անվանում են սինուսների թեորեմ եռանիստ անկյան համար:

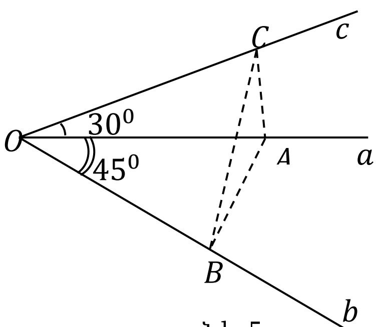
ԹԵՈՐԵՄ 3: Եթե $\alpha = \angle(b, c)$, $\beta = \angle(a, c)$, $\gamma = \angle(a, b)$ անկյունները (abc)եռանիստ անկյան հարթ անկյուններն են, իսկ A-ն, B-ն, C-ն նրանցից յուրաքանչյուրին համապատասխանաբար հակադիր ընկած երկնիստ անկյունները, ապա՝

$$\frac{\sin\alpha}{\sin A} = \frac{\sin\beta}{\sin B} = \frac{\sin\gamma}{\sin C}\ : \qquad (10)$$

Այս թեորեմի ապացույցը ընթերցողը կարող է գտնել [2] գրքում: Պարզության համար նշենք նաև, որ A -ն a կողին, B -ն b կողին և որ C -ն c կողին առընթեր երկնիստ անկյուններն են:

ԽՆԴԻՐ 3: A երկնիստ անկյունը հավասար է 150^0, իսկ β և γ հարթ անկյունները հավասար են՝ $\beta = 30^0, \gamma = 45^0$: Գտնել եռանիստի մյուս տարրերը:

ԼՈՒԾՈՒՄ: Խնդրի պահանջից հետևում է, որ պետք է գտնելα հարթ անկյունը, B և C երկնիստ անկյունները:



Նկ. 5

Եռանիստի $A \in a$ կետով տանենք a կողին ուղղահայաց հարթություն և ընդունենք OAհատվածի երկարությունը որպես միավոր: Կիրառելով 30^0 անկյան հատկությունը և պյութագորասի թեորեմը՝ կստանանք $AC = \frac{1}{\sqrt{3}}, OC = \frac{2}{\sqrt{3}}$: Նման ձևով AOB եռանկյունուց կունենանք $AB = 1, OB = \sqrt{2}$: ABC եռանկյունուց, համաձայն կոսինուսների թեորեմի, կստանանք՝

$$BC^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1 + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7}{3}\ :$$

Կիրառելով կոսինուսների թեորեմը BOC եռանկյան նկատմամբ՝ կստանանք՝

$$BC^2 = \frac{7}{3} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 - 2\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\alpha\ :$$

Ուրեմն՝ $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$, իսկ $\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{3}{32}} = \frac{\sqrt{29}}{4\sqrt{2}}$:

Համաձայն (10) բանաձևի կունենանք՝

$$\frac{\sin\alpha}{\sin A}=\frac{\sqrt{29}}{4\sqrt{2}}:\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{29}}{2\sqrt{2}}:$$

Այնուհետև օգտվելով այն փաստից, որ $\sin\beta=\sin 30^0={}^1/_2, \sin\gamma=\sin 45^0={}^{\sqrt{2}}/_2$, նույն (10) բանաձևից կստանանք՝

$$\frac{{}^1/_2}{\sin\beta}=\frac{\sqrt{29}}{2\sqrt{2}} \text{ և } \frac{{}^{\sqrt{2}}/_2}{\sin \mathrm{C}}=\frac{\sqrt{29}}{2\sqrt{2}}:$$

Ուրեմն՝ $\sin\beta=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{29}}, \sin \mathrm{C}=\frac{2}{\sqrt{29}}$:

Ամփոփելով խնդիրը՝ կարող ենք գրել որոնելի արժեքները.

Պատասխան.՝ $\alpha=arc\sin\frac{\sqrt{29}}{2\sqrt{2}}$, $A=arc\sin\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{29}}$, $C=arc\sin\frac{2}{\sqrt{29}}$:

Այժմ կանգ առնենք բազմանիստ անկյունների վրա՝ նշելով նրանց որոշ հատկությունները: Դիտարկենք տարածության որևէ O կետով անցնող մի շարք հարթություններ: Ստացվող պատկերը կանվանենք բազմանիստ անկյուն, եթե այն բաղկացած է ընդհանուր գագաթով մի շարք հարթ անկյուններից, որոնցից յուրաքանչյուրը հանդիսանում է բազմանիստ անկյան նիստ և փոքր է փռված անկյունից: Եթե բազմանիստ անկյունը գտնվում է իր յուրաքանչյուր նիստի հարթության մի կողմում, ապա այդ բազմանիստ անկյունը կանվանենք ուռուցիկ: Եթե բազմանիստ անկյունը բաղկացած է n նիստից, ապա այն կոչվում է n -անիստ անկյուն:

ԹԵՈՐԵՄ 4: Եռանիստ անկյան ցանկացած հարթ անկյուն փոքր է մյուս երկու հարթ անկյունների գումարից:

ԱՊԱՑՈՒՅՑ: Դիցուք եռանիստի հարթ անկյուններն են՝ α,β,γ (տե՛ս Նկ.1): Ցույց տանք, որ $\gamma\angle\alpha+\beta$: Եթե $\alpha+\beta$ գումարը փոքր չէ փռված անկյունից, այսինքն՝ $\alpha+\beta\geq 180^0$, ապա $\gamma\angle\alpha+\beta$, որովհետև ըստ վերը նշվածի բազմանիստ անկյան հարթ անկյունը պետք է լինի փոքր փռված անկյունից: Այժմ ենթադրենք $\alpha+\beta<180^0$: Անդրադառնանք եռանիստի համար կոսինուսների թեորեմին՝ գրված (1) բանաձևով: Այդ բանաձևում $\cos C>-1$ *և* $\sin\alpha,\sin\beta$ թվերը դրական են $\left(\alpha;\ \beta\in(0;180^0)\right)$: Ուրեմն՝ (1) բանաձևից կարելի է գրել

$$\cos\gamma>\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta \tag{11}$$

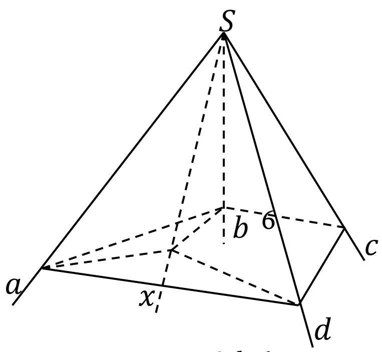
անհավասարությունը: Հետևաբար (11) անհավասարությունից կարելի է գրել

$$\cos\gamma>\cos(\alpha+\beta)$$

անհավասարությունը: Քանի որ անկյունները դրական են և փոքր են փռված անկյունից, իսկ այդ միջակայքում կոսինուս ֆունկցիան մոնոտոն նվազող է, ուստի վերջին անհավասարությունից կստանանք՝ $\gamma\angle\alpha+\beta$: Թեորեմն ապացուցված է:

ԽՆԴԻՐ 4: Ապացուցել, որ քառանիստ անկյան ցանկացած հարթ անկյուն փոքր է մյուս երեք հարթ անկյունների գումարից:

ԼՈՒԾՈՒՄ: Դիտարկենք երկու դեպք: Նախ ենթադրենք ($abcd$) քառանիստ անկյունը ուռուցիկ է (նկ.6):



Նկ.6

Դիտարկենք (abd) և (bcd) երկու եռանիստ անկյուն, որոնց տրոհվում է $(abcd)$ քառանիստ անկյունը (sbd) հատույթով: Կիրառենք թեորեմ 4-ը տրոհված եռանիստ անկյունների նկատմամբ: Կստանանք`

$$\angle(a,d) < \angle(a,b) + \angle(b,d) \tag{12}$$

$$\angle(b,d) < \angle(b,c) + \angle(c,d): \tag{13}$$

Գումարելով (12) և (13) անհավասարությունների համապատասխան մասերը` կստանանք`

$$\angle(a,d) < \angle(a,b) + \angle(b,c) + \angle(c,d) \tag{14}$$

2-րդ դեպք: Այժմ ենթադրենք $(abxd)$ քառանիստ անկյունը ոչ ուռուցիկ է: Դիտարկենք (abd) և (bxd) եռանիստ անկյունները: (abd) եռանիստ անկյան համար տեղի կունենա (12) անհավասարությունը, իսկ (bxd) եռանիստ անկյան համար կունենանք`

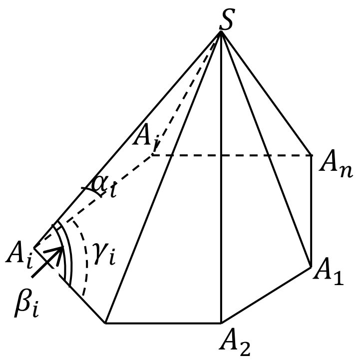
$$\angle(b,d) < \angle(b,x) + \angle(x,d): \tag{15}$$

Գումարելով (12) և (15) անհավասարությունների համապատասխան մասերը` կստանանք (14) անհավասարությունը:

Այժմ ապացուցենք բազմանիստ անկյան ևս մեկ հատկություն:

ԹԵՈՐԵՄ 5: Ուռուցիկ n -անիստ անկյան բոլոր հարթ անկյունների գումարը փոքր է քան 360^0-ը:

ԱՊԱՑՈՒՅՑ: Դիցուք ունենք S գագաթով n -անիստ ուռուցիկ անկյուն, որի կողմերն են` $a_1, a_2, \cdots, a_n$ ճառագայթները: Վերցնենք $A_1 \in a_1$ և $A_2 \in a_2$ կետերը, իսկ $a_j$-ի վրա $A_j$ կետը բավականաչափ մոտ $S$ կետին: Նկարագրվածից հետևում է, որ $(A_1 A_2 A_j)$ հարթությունը կհատի բոլոր $a_i, i = 1, 2, \cdots, n$ կողմերը: Ստացված պատկերը կլինի $n$- անկյուն բուրգ` $A_1, A_2 \cdots A_n$ հիմքով: Հիմքի յուրաքանչյուր



Նկ. 7

A_i գագաթում առաջանում են եռանիստ անկյուններ, որոնց հարթ անկյուններն են՝ հիմքի անկյունները γ_i,բուրգի կողնային նիստերի անկյունները α_i և β_i(տե՛ս. Նկ. 7), $i = 1, 2, \cdots, n$: Համաձայն թեորեմ 4-ի

$$\gamma_i < \alpha_i + \beta_i , \qquad (16)$$

յուրաքանչյուր $A_i, i = 1, 2, \cdots, n$ գագաթի համար: Գումարենք այդ բոլոր անհավասարությունները: γ_i-երի գումարը կլինի հիմքի n- անկյուն բազմանկյան ներքին անկյունների գումարը, որը հավասար է (տե՛ս. [3])$(n-2)180^0$: (12) անհավասարությունների աջ մասերի գումարը կլինի բուրգի կողմնային նիստերի ներքին անկյունների գումարը առանց S գագաթի հարթ անկյունների գումարի: Այսինքն՝ $n \cdot 180^0 - \varphi$, որտեղ φ-ով նշանակված է S գագաթի հարթ անկյունների գումարը: Հետևաբար, (12) անհավասարությունից կստանանք՝

$$(n-2)180^0 < 180^0 \cdot n - \varphi:$$

Այս անհավասարությունից հետևում է, որ $\varphi < 360^0$: Թեորեմն ապացուցված է:

Գրականություն

1. Աթանասյան Լ.Ս. Բուտուզով Վ.Ֆ., Կադոմցեև Ս.Բ., Պոզնյակ Է.,Գ., Յուդինա Ի. Ի. Երկրաչափություն: Հանր. դպ. 6-8-րդ դաս. Դասագիրք. Եր. “Լույս”, 1998, 352 էջ:

2.Գևորգյան Գ., Սահակյան Ա. Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրերը: 9-րդ դասարան: Եր. Էդիթ Պրինտ, 2001, 214 էջ:

3.Зайцев В.В., Рыжков В.В., Сканави М.И. Элементарная математика. М. “Наука”, 1974, 592 с.

4. Погорелов А.В. Геометрия (для вузов). М. “Наука”, 1983, 288 с.

Հոդվածը տպագրության է երաշխավորել խմբագրական կոլեգիայի անդամ, ֆ.մ.գ.թ. Գ.Հ. Սահակյանը: