

ՀՄԴ 512.1

Մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկա

Ռոբերտ ՄՈՒՍԱՅԵԼՅԱՆ

Գորիսի պետական համալսարան, ֆ.մ.գ.թ., մաթեմատիկայի

և ինֆորմատիկայի ամբիոնի դոցենտ

E-mail: [rubmus49@gmail.com](mailto:rubmus49@gmail.com)

**ՄԻ ՔԱՆԻ ԱՆԿՅԱՆ**

**ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ**

**ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՃՇՁՐԻՑ**

**ԱՐԺԵՔՆԵՐԻ ՀԱՇՎՄԱՆ ՄԱՍԻՆ**

Աշխատանքը նվիրված է եռանկյունաչափական ֆունկցիաների ճշգրիտ արժեքների հաշվմանը  $0.75$  ( $\pi/240$  [1]) աստիճանում: Հենվելով հրատարակված [1] աշխատանքի վրա, որում ստացված են եռանկյունաչափական ֆունկցիաների ճշգրիտ արժեքները հաշված  $6$  աստիճանում, օգտագործելով եռանկյունաչափության հայտնի բանաձևերը՝ դուրս են բերվում եռանկյունաչափական ֆունկցիաների ճշգրիտ արժեքները՝ հաշված նշված աստիճանում: Դրանից հետո ապացուցվում է, որ ստացված արժեքները զուտ իրացիոնալ թվեր են:

**Բանալի բառեր**՝ աստիճան, եռանկյուն, անկյուն, եռանկյունաչափական ֆունկցիաներ, իրացիոնալ թիվ, արժեք, բանաձև:

**Р. Мусаелян**

**О ВЫЧИСЛЕНИЯХ ТОЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ  
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИИ  
ОДНОГО МАЛОГО УГЛА**

Работа посвящена определению точных значений тригонометрических функции  $0.75$  ( $\pi/240$  радиан) градуса. Для этого, опираясь на работу [1], в которой получены точные значения тригонометрических функций  $6$ -и градусов, используя известные формулы тригонометрии, выводятся точные значения тригонометрических функций указанного градуса. После этого доказывается, что найденные значения суть иррациональные числа.

**Ключевые слова:** градус, угол, тригонометрические функции, иррациональное число, значение, формула.

R. Musayelyan

**ON CALCULATIONS OF EXACT VALUES OF TRIGONOMETRIC  
FUNCTIONS OF ONE SMALL ANGLE**

*We are observing three outstanding theorems the proofs of which are mostly known by the application of trigonometry and making complicated algebraic changes. The work represents the proofs of these theorems without the application of either trigonometry or complicated algebraic changes. The proofs are completely based upon geometry and are called geometric proofs.*

**Keywords:** *degrees, angle, trigonometrical functions, irrational number, value, formula*

1. Անդրադառնանք հրատարակված [1] աշխատանքին, համաձայն որի՝

$$\cos 6^\circ = \frac{1}{8}(\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} + \sqrt{18 + 6\sqrt{5}}): \quad (1)$$

Ապացուցենք հետևյալ թեորեմը.

**Թեորեմ:**  $\pi/240$  անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արժեքները իրացիոնալ թվեր են:

**Ապացույց:** Օգտվելով կես անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաների բանաձևերից [2] և վերը նշված (1) բանաձևից՝ կստանանք՝

$$\begin{aligned} \cos 3^\circ &= \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{8}(\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} + \sqrt{18 + 6\sqrt{5}})}{2}} = \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{8 + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} + \sqrt{18 + 6\sqrt{5}}}: \end{aligned} \quad (2)$$

Այժմ դուրս բերենք հետևյալ բանաձևը.

$$\cos 4\alpha = 2(2\cos^2\alpha - 1)^2 - 1 = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1: \quad (3)$$

Համաձայն (2) և (3) բանաձևերի՝ կունենանք.

$$8\cos^4 0,75^\circ - 8\cos^2 0,75^\circ + 1 - \frac{1}{4}\sqrt{8 + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} + \sqrt{18 + 6\sqrt{5}}} = 0:$$

Հաշվի առնելով, որ  $\cos 0,75^\circ > \frac{1}{2}$ , վերը ստացված հավասարումից կստանանք՝

$$\cos^2 0,75^\circ = \frac{4 + \sqrt{8 + 2\sqrt{8 + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} + \sqrt{18 + 6\sqrt{5}}}}}{8}:$$

Այս հավասարությունից դժվար չէ ստանալ.

$$\cos 0,75^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{8 + 2\sqrt{8 + 2\sqrt{8 + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} + \sqrt{18 + 6\sqrt{5}}}}} \quad (4)$$

Այժմ օգտվելով եռանկյունաչափական նույնությունից [2]՝ հաշվենք  $\sin 0,75^\circ$ -ը:

$$\sin 0,75^\circ = \sqrt{1 - \frac{1}{16}\left(8 + 2\sqrt{8 + 2\sqrt{8 + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} + \sqrt{18 + 6\sqrt{5}}}}\right)} =$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{8 - 2 \sqrt{8 + 2 \sqrt{8 + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} + \sqrt{18 + 6\sqrt{5}}}}} \quad (5)$$

Մյուս եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արժեքները  $0,75^\circ$  -ում կլինեն՝

$$\operatorname{tg} 0,75^\circ = \frac{\sqrt{8 - 2 \sqrt{8 + 2 \sqrt{8 + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} + \sqrt{18 + 6\sqrt{5}}}}}}{\sqrt{8 + 2 \sqrt{8 + 2 \sqrt{8 + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} + \sqrt{18 + 6\sqrt{5}}}}}} \quad (6)$$

$$\operatorname{ctg} 0,75^\circ = \frac{\sqrt{8 + 2 \sqrt{8 + 2 \sqrt{8 + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} + \sqrt{18 + 6\sqrt{5}}}}}}{\sqrt{8 - 2 \sqrt{8 + 2 \sqrt{8 + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} + \sqrt{18 + 6\sqrt{5}}}}}} \quad (7)$$

Այժմ ապացուցենք, (4), (5), (6), (7) բանաձևերով տրված թվերի իռացիոնալությունը: Դրա համար նախ ապացուցենք, որ (1) բանաձևով տրված թիվը իռացիոնալ է: Այն ապացուցենք հակասող ենթադրության մեթոդով: Ենթադրենք

$$\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} + \sqrt{18 + 6\sqrt{5}} = r_1,$$

որտեղ  $r_1$  - ը ռացիոնալ թիվ է: Այս արտահայտությունից կստանանք.

$$\sqrt{30 + 6\sqrt{5}} + \sqrt{5} = \frac{1}{4}(r_1^2 - 28) = r_2,$$

որտեղ  $r_2$  - ը ռացիոնալ թիվ է: Նորից հավասարության երկու մասերը բարձրացնելով քառակուսի՝ կստանանք՝

$$6\sqrt{5} + 2\sqrt{5} \left( \sqrt{30 + 6\sqrt{5}} \right) = r_2^2 - 35:$$

Այժմ հաշվի առնելով, որ

$$\sqrt{30 + 6\sqrt{5}} = r_2 - \sqrt{5}$$

վերջին հավասարությունից կստանանք՝

$$\sqrt{5} = \frac{r_2^2 - 25}{2r_2 + 6} \quad (8)$$

(8) հավասարության աջ մասը ռացիոնալ թիվ է:  $\sqrt{5}$  -ի իռացիոնալությունը կարելի է ապացուցել այնպես, ինչպես դպրոցական դասագրքերում ապացուցվում է  $\sqrt{2}$  -ի իռացիոնալությունը: Այսպիսով, (8) հավասարությունը երբեք տեղի չի ունենա: Ուրեմն (1) բանաձևով տված թիվը իռացիոնալ թիվ է:

Այժմ ապացուցենք (4) բանաձևով տրված թվի իռացիոնալությունը, նմանապես հակասող ենթադրության մեթոդով: Ենթադրենք՝

$$\sqrt{8 + 2 \sqrt{8 + 2\sqrt{8 + D}}} = a_1,$$

որտեղ  $a_1$ -ը ռացիոնալ թիվ է: Այստեղ հարմարության համար կատարված է  $\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} + \sqrt{18 + 6\sqrt{5}} = D$  նշանակումը: Կունենանք՝

$$\sqrt{8 + 2\sqrt{8 + D}} = \frac{a_1^2 - 8}{2} = a_2,$$

Որտեղ  $a_2$ -ը ռացիոնալ թիվ է: Նորից ստացված հավասարությունը բարձրացնենք քառակուսի

$$\sqrt{8+D} = \frac{a_2^2 - 8}{2} = a_3 :$$

Այստեղ  $a_3$ -ը նույնպես ռացիոնալ թիվ է: Վերջին հավասարությունից կստանանք.

$$D = a_3^2 - 8: \quad (9)$$

(9) հավասարության աջ մասը ռացիոնալ թիվ է, իսկ ձախ մասը՝ իռացիոնալ: Ստացված հակասությունը ապացուցում է մեր պնդումը:

Հաջորդ (5) բանաձևով տված թվի իռացիոնալությունը կապացուցվի նախորդի նման ձևով: Այդ դեպքում պարզապես որպես  $a_2$  պետք է վերցնել  $\frac{8-a_2^2}{2}$  թիվը:

Այժմ ապացուցենք  $tg 0,75^\circ$  թվի իռացիոնալությունը, նմանապես հակասող ենթադրության մերժումով: Ենթադրենք.

$$\frac{\sqrt{8 - 2\sqrt{8 + 2\sqrt{8 + D}}}}{\sqrt{8 + 2\sqrt{8 + 2\sqrt{8 + D}}}} = \frac{p}{q},$$

որտեղ  $p, q$  թվերը բնական թվեր են:

Կստանանք՝

$$\sqrt{8+D} = \frac{8(q^2 - p^2)^2}{(q^2 + p^2)^2} - 4 = \frac{m}{n},$$

որտեղ  $m$ -ը և  $n$ -ը բնական թվեր են: Այս հավասարությունից հետևում է, որ

$$D = \frac{m^2}{n^2} - 8 :$$

Նախորդ դեպքերի նման դատողություններով համոզվում ենք, որ (9) հավասարությունը տեղի չի ունենա: Ուրեմն մեր ենթադրությունը սխալ է և (6) բանաձևով տրված թիվը իռացիոնալ թիվ է:

Ինչ վերաբերվում է (7) բանաձևով տված թվին, ապա այն նույնպես սիրացիոնալ թիվ է, որովհետև

$$ctg 0,75^\circ = \frac{1}{tg 0,75^\circ},$$

իսկ  $tg 0,75^\circ$  -ը իռացիոնալ թիվ է:

Թերորեն ապացուցված է:

### Գրականություն

1. Վեց աստիճանի անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արժեքների հաշվման մասին: ԱրՊՀ Գիտական տեղեկագիր: 1/2017, էջ 11-15:
2. Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա., Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզի տարրեր: Երևան, «Էդիտ պրինտ», 2001, 215 էջ:

Նողվածը տպագրության է նրաշխարհի խմբագրական կոլեգիայի անդամ, ֆ.մ.գ.թ. Գ.Ն. Սահակյանը: