ՀՏԴ 517.9 (07)
Մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկա

Ալեքսանդր ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ
ԱրՊՀ, ֆ.մ.գ.դ., պրոֆեսոր
E-mail: alexkhach49@yandex.ru

Գայանե ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ
ԱրՊՀ, ֆ.մ.գ.թ., դոցենտ
E-mail: gay.petrosian@gmail.com

ԼԱՐԻ ՏԱՏԱՆՄԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ՀԱՄԱՐ ԽԱՌԸ ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐԻ ԱՆՋԱՏՄԱՆ ՄԵԹՈԴՈՎ

Ֆուրյեի մեթոդը կամ փոփոխականների անջատման մեթոդը ամենալայն կիրառություն ունեցող մեթոդներից է: Այս մեթոդով լուծվում են որոշ դասի խառը և եզրային խնդիրներ հիպերբոլական, պարաբոլական և էլիպտական տեսակի հավասարումների համար: Աշխատանքում Ֆուրյեի մեթոդը օգտագործվում է լուծելու տարբեր եզրային պայմաններով խառը եզրային խնդիրներ լարի տատանման հավասարման համար: Դիտարկված են կոնկրետ օրինակներ:

Բանալի բառեր. *լարի տատանման հավասարում, փոփոխականների անջատման մեթոդ, եզրային պայմաններ, եզրային խնդիրներ, սեփական արժեքներ, սեփական ֆունկցիաներ:*

А.Хачатрян , Г.Петросян

РЕШЕНИЕ СМЕШАННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ МЕТОДОМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

Метод Фурье или метод разделения переменных один из самых широко использующихся методов. Этим методом решается класс смешанных и краевых задач для уравнений гиперболического, параболического и эллиптического типа. В работе метод Фурье используется для решения смешанных краевых задач для уравнения колебания струны, когда на концах струны заданы различные краевые условия.

Ключевые слова: *уравнение колебания струны, метод разделения переменных, граничные условия, краевые задачи, собственные значения, собственные функции.*

Рассмотрены конкретные примеры.

A.Khachatryan, G.Petrosyan

SOLUTION OF MIXED BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE STRING OSCILLATION EQUATION USING THE METHOD OF SEPARATION OF VARIABLES

Method of Fourier or method of separation of variables one of the most widely used methods. With Fourier method solves the class of mixed and boundary value problems for hyperbolic, parabolic and elliptic equations. In this article, the Fourier method is used to solve mixed boundary value problems for the string oscillation equation, when at the ends of the string are given different boundary conditions. Considered concrete examples.

Keywords: *the string oscillation equation, method of separation of variables, boundary conditions, boundary value problems, eigenvalues, eigenfunctions.*

1. Եզրային խնդիրների դրվածքը և լուծումները:

Մաթեմատիկական ֆիզիկայի դասագրքերում [1-6] բերվում են լարի տատանման հավասարման համար խառը եզրային խնդրի մանրամասն լուծումները, երբ լարի եզրերն ամրացված են՝ $u(0,t)=0$, $u(l,t)=0$ (խնդիր 1): Խնդրագրքերում [7,8], սակայն, հանդիպում են խնդիրներ նշված եզրային պայմաններից տարբեր պայմաններով, որոնց լուծումները էապես տարբերվում են խնդիր 1-ի լուծումից: Աշխատանքում, համեմատության համար, նախ բերված է խնդիր 1-ի լուծումը, այնուհետև այլ եզրային պայմաններով խնդիրների լուծումներ:

Խնդիր 1: Գտնել $Q=(0,l)\times(0,\infty)$ կիսաշերտում

$$u_{tt}=a^2u_{xx} \tag{1.1}$$

հավասարման այնպիսի $u(x,t)$ լուծում, որն անընդհատ է $\overline{Q}$ փակ կիսաշերտում և բավարարում է

$$u(0,t)=0\,,\ u(l,t)=0 \tag{1.2}$$

համասեռ եզրային և

$$u(x,0)=\varphi(x)\,,\ u_t(x,0)=\psi(x) \tag{1.3}$$

սկզբնական պայմաններին:

(1.1)-(1.3) խնդիրը լուծվում է փոփոխականների անջատման մեթոդով և լուծումը ներկայացվում է

$$u(x,t)=X(x)T(t) \tag{1.4}$$

տեսքով, որտեղ $X(x)$-ը միայն x-ի, իսկ $T(t)$-ն միայն t փոփոխականների ֆունկցիաներ են:

$X(x)$ և $T(t)$ ֆունկցիաների որոշման համար ստացվում են

$$X''+\lambda X=0,\ \ X(x)\neq 0, \tag{1.5}$$

$$T''(t)+\lambda a^2T(t)=0,\ T(t)\neq 0 \tag{1.6}$$

սովորական դիֆերենցիալ հավասարումները, որտեղ $\lambda>0$: (1.5) և (1.6) հավասարումների ընդհանուր լուծումներն են

$$X(x)=D_1\cos\sqrt{\lambda}x+D_2\sin\sqrt{\lambda}x, \tag{1.7}$$

$$T(t) = A\cos\sqrt{\lambda}at + B\sin\sqrt{\lambda}t: \tag{1.8}$$

(1.1)-(1.2) եզրային խնդրի լուծումը բերվում է

$$X'' + \lambda X = 0 \tag{1.9}$$

$$X(0) = X(l) = 0 \tag{1.10}$$

սեփական արժեքների և սեփական ֆունկցիաների խնդրին [1-7]: (1.9)-(1.10) խնդրի համար ստացվում են

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \; n = 1,2,\ldots, \tag{1.11}$$

սեփական արժեքները և

$$X_n(x) = C_n \sin\frac{\pi n}{l}x, \;\; n = 1,2,\ldots: \tag{1.12}$$

համապատասխան սեփական ֆունկցիաները: Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարելի է ընդունել $C_n = 1, \; (n = 1,2,\ldots)$: λ_n-ի նույն արժեքներին համապատասխանում է (1.6) հավասարման հետևյալ լուծումը.

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{\pi n}{l}at + B_n \sin\frac{\pi n}{l}at, \;\; n = 1,2,\ldots, \tag{1.13}$$

որտեղ A_n-ը և B_n-ը կամայական հաստատուններ են:

(1.1) հավասարման (1.2) պայմաններին բավարարող ընդհանուր լուծումն ունի

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{\pi n}{l}at + B_n \sin\frac{\pi n}{l}at\right)\sin\frac{\pi n}{l}x \tag{1.14}$$

տեսքը: A_n և B_n հաստատունները որոշվում են (1.3) սկզբնական պայմաններից: Ֆուրյեի շարքերի տեսությունից հայտնի են [10]՝

Դինիի հայտանիշը: $f(x)$ ֆունկցիայի Ֆուրյեի շարքը x_0 կետում զուգամիտում է S_0 գումարին, եթե ինչ որ $h > 0$-ի համար

$$\int_0^h \frac{|\varphi(t)|}{t}dt$$

ինտեգրալը գոյություն ունի:

Լիպշիցի հայտանիշը: $f(x)$ ֆունկցիայի Ֆուրյեի շարքը x_0 կետում, որտեղ այն անընդհատ է, զուգամիտում է $f(x_0)$-ին, եթե բավականաչափ փոքր t–երի համար տեղի ունի

$$|f(x_0 \pm t) - f(x_0)| \leq Lt^{\alpha}$$

անհավասարությունը, որտեղ L-ը և α-ն դրական հաստատուններ են $(\alpha \leq 1)$:

Մասնավորապես, եթե x_0 կետում $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է կամ ծայրահեղ դեպքում ունի երկու միակողմանի ածանցյալներ, ապա Ֆուրյեի շարքը զուգամետ է, ընդ որում նրա գումարը հավասար է $f(x_0)$-ին:

Դիցուք $\varphi(x)$ և $\psi(x)$ ֆունկցիաները $[0,l]$ միջակայքում բավարարում են Ֆուրյեի շարքի վերլուծելու պայմաններին՝

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin\frac{\pi n}{l}x\,,\quad \varphi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi\,, \tag{1.15}$$

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\sin\frac{\pi n}{l}x\,,\ \psi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\psi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi\,: \tag{1.16}$$

Այդ դեպքում, օգտվելով (1.3) սկզբնական պայմաններից և (1.15), (1.16) ներկայացումներից, ստանում ենք

$$A_n=\varphi_n\,,B_n=\frac{l}{\pi n a}\psi_n\,: \tag{1.17}$$

Այժմ (1.1) հավասարման համար դիտարկենք *այլ եզրային խնդիրներ*:

Խնդիր 2: Գտնել Q կիսաշերտում (1.1) հավասարման այնպիսի լուծում, որն անընդհատ է $\overline{Q}$ փակ կիսաշերտում, բավարարում է

$$u_x(0,t)=0\,,\ u_x(l,t)=0 \tag{1.18}$$

համասեռ եզրային ու (1.3) սկզբնական պայմաններին:

Խնդրի լուծումը բերվում է

$$\begin{gathered}X''+\lambda X=0\\ X'(0)=X'(l)=0\end{gathered} \tag{1.19}$$

սեփական արժեքների և սեփական ֆունկցիաների խնդրին: Օգտվելով (1.7) ընդհանուր լուծումից, նախ հաշվենք $X'(x)$ ածանցյալը՝

$$X'(x)=-D_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x+D_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x\,, \tag{1.20}$$

այնուհետև բավարարելով եզրային պայմաններին ստանում ենք (1.19) խնդրի սեփական արժեքները, որոնք ևս որոշվում են (1.11) բանաձևով, սակայն փոխվում են սեփական ֆունկցիաները՝

$$X_n(x)=\cos\frac{\pi n}{l}x\,: \tag{1.21}$$

Այսպիսով, խնդիր 2-ի ընդհանուր լուծումը կունենա

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{\pi n}{l}at+B_n\sin\frac{\pi n}{l}at\right)\cos\frac{\pi n}{l}x \tag{1.22}$$

տեսքը:

Դիցուք որ $\varphi(x)$ և $\psi(x)$ ֆունկցիաները $[0,l]$ միջակայքում բավարարում են ըստ *կոսինուսների* Ֆուրյեի շարքի վերլուծելու պայմաններին [10]: Գրելով այդ շարքերը՝

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\cos\frac{\pi n}{l}x\,,\quad \varphi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\cos\frac{\pi n}{l}\xi d\xi\,, \tag{1.23}$$

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\cos\frac{\pi n}{l}x\,,\ \psi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\psi(\xi)\cos\frac{\pi n}{l}\xi d\xi\,, \tag{1.24}$$

և բավարարելով (1.3) սկզբնական պայմաններին A_n և B_n հաստատունների համար նորից կստանանք (1.17) բանաձևերը:

Խնդիր 3: Գտնել Q կիսաշերտում (1.1) հավասարման այնպիսի լուծում, որն անընդհատ է $\overline{Q}$ փակ կիսաշերտում, բավարարում է

$$u_x(0,t)=0,\ u(l,t)=0 \tag{1.25}$$

համասեռ եզրային ու (1.3) սկզբնական պայմաններին:

Խնդիրը բերվում է (1.9) հավասարման լուծմանը

$$X'(0)=X(l)=0 \tag{1.26}$$

եզրային պայմաններով: Այսպիսով, խնդիր 3-ի համար ստացվում է (1.9), (1.26) սեփական արժեքների և սեփական ֆունկցիաների խնդիրը:

Օգտվելով (1.7) լուծումից և (1.20) բանաձևից, բավարարելով (1.26) եզրային պայմաններին ստանում ենք

$$\lambda_n=\frac{\pi^2(2n+1)^2}{4l^2},\ n=0,1,2,\ldots \tag{1.27}$$

սեփական արժեքները, որոնց համապատասխանում են

$$X_n(x)=\cos\frac{\pi(2n+1)}{2l}x,\ \ n=0,1,2,\ldots \tag{1.28}$$

սեփական ֆունկցիաները: Այսպիսով, (1.1), (1.25), (1.3) խառը խնդրի լուծումն ունի

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{\pi(2n+1)}{2l}at+B_n\sin\frac{\pi(2n+1)}{2l}at\right)\cos\frac{\pi(2n+1)}{2l}x \tag{1.29}$$

տեսքը:

$\varphi(x)$ և $\psi(x)$ ֆունկցիաները $[0,l]$ միջակայքում վերլուծելով շարքի ըստ $\left\{\cos\frac{\pi(2n+1)}{2l}\right\}$ օրթոգոնալ ֆունկցիաների՝

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\cos\frac{\pi(2n+1)}{2l}x,\ \ \varphi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\cos\frac{\pi(2n+1)}{2l}\xi d\xi, \tag{1.30}$$

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\cos\frac{\pi(2n+1)}{2l}x,\ \psi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\psi(\xi)\cos\frac{\pi(2n+1)}{2l}\xi d\xi, \tag{1.31}$$

և բավարարելով (1.3) սկզբնական պայմաններին A_n և B_n հաստատունների համար կստանանք

$$A_n=\varphi_n,\ B_n=\frac{l}{\pi(2n+1)a}\psi_n \tag{1.32}$$

բանաձևերը:

Համեմատելով խնդիր 3-ի լուծումը խնդիր 1-ի և խնդիր 2-ի լուծումների հետ նկատում ենք, որ տարբերվում են ինչպես սեփական արժեքները, այնպես էլ սեփական ֆունկցիաները:

Դիտարկենք մեկ այլ եզրային խնդիր:

Խնդիր 4: Գտնել Q կիսաշերտում (1.1) հավասարման այնպիսի լուծում, որն անընդհատ է $\overline{Q}$ փակ կիսաշերտում, բավարարում է

$$u(0,t)=0,\ u_x(l,t)=0 \tag{1.33}$$

համասեռ եզրային ու (1.3) սկզբնական պայմաններին:

Խնդրի լուծումը բերվում է

$$X'' + \lambda X = 0$$
$$X(0) = X'(l) = 0 \qquad (1.34)$$

սեփական արժեքների և սեփական ֆունկցիաների խնդրին:

Խնդիր 4-ի դեպքում նորից ստանում ենք (1.27) սեփական արժեքները, որոնց համապատասխանում են

$$X_n(x) = \sin\frac{\pi(2n+1)}{2l}x: \qquad (1.35)$$

սեփական ֆունկցիաները:

Այսպիսով, (1.1), (1.33), (1.3) խնդրի լուծումն ունի

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{\pi(2n+1)}{2l}at + B_n\sin\frac{\pi(2n+1)}{2l}at\right)\sin\frac{\pi(2n+1)}{2l}x \qquad (1.36)$$

տեսքը:

$\varphi(x)$ և $\psi(x)$ ֆունկցիաները $[0,l]$ միջակայքում վերլուծենք շարքի ըստ $\left\{\sin\frac{\pi(2n+1)}{2l}\right\}$ օրթոգոնալ ֆունկցիաների՝

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin\frac{\pi(2n+1)}{2l}x, \quad \varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{\pi(2n+1)}{2l}\xi d\xi, \qquad (1.37)$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\sin\frac{\pi(2n+1)}{2l}x, \quad \psi_n = \frac{2}{l}\int_0^l\psi(\xi)\sin\frac{\pi(2n+1)}{2l}\xi d\xi, \qquad (1.38)$$

բավարարելով (1.3) սկզբնական պայմաններին, A_n և B_n գործակիցների որոշման համան ստանում ենք (1.32) բանաձևերը:

2. Օրինակներ:

Լուծված խնդիրները լուսաբանելու համար դիտարկենք կոնկրետ օրինակներ:

Օրինակ 1: Գտնել $Q = (0,l)\times(0,\infty)$ կիսաշերտում

$$u_{tt} = a^2u_{xx}$$

հավասարման լուծումը

$$u(0,t) = u(l,t) = 0,$$
$$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = \sin\frac{2\pi}{l}x \qquad (2.1)$$

եզրային և սկզբնական պայմաններով:

Լուծում: Օգտվելով (1.1)-(1.3) խնդրի լուծումից, բավարարելով (2.1) սկզբնական պայմաններին, կունենանք

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{\pi n}{l}x = 0,\quad u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{\pi n}{l}a\sin\frac{\pi n}{l}x = \sin\frac{2\pi}{l}x:$$

(1.17) բանաձևերից ստանում ենք

$$A_n=\varphi_n=0,\ n=1,2,\ldots,\quad B_n=\frac{l}{\pi na}\psi_n=\begin{cases}\dfrac{l}{2\pi a},\ n=2\\ 0,\ n\neq 2\end{cases}$$

Լուծման վերջնական տեսքն է

$$u(x,t)=\frac{l}{2\pi a}\sin\frac{2\pi}{l}at\sin\frac{2\pi}{l}x: \tag{2.2}$$

Օրինակ 2: $u_{tt}=a^2u_{xx}$ հավասարման համար $Q=(0,l)\times(0,\infty)$ կիսաշերտում լուծել

$$\begin{aligned}&u_x(0,t)=u_x(l,t)=0,\\ &u(x,0)=\cos\frac{\pi}{l}x,\ u_t(x,0)=\cos\frac{5\pi}{l}x\end{aligned} \tag{2.3}$$

խառը եզրային խնդիրը:

Լուծում: Օգտվելով խնդիր 2-ի (1.22) ընդհանուր լուծումից և բավարարելով (2.3) պայմաններին, կստանանք

$$A_n=\varphi_n=\begin{cases}1,\ n=1\\ 0,\ n\neq 1\end{cases},\quad B_n=\frac{l}{\pi na}\psi_n=\begin{cases}\dfrac{l}{5\pi a},\ n=5\\ 0,\ n\neq 5\end{cases}$$

Լուծման վերջնական տեսքն է.

$$u(x,t)=\cos\frac{\pi}{l}at\cos\frac{\pi}{l}x+\frac{l}{5\pi a}\sin\frac{5\pi}{l}at\cos\frac{5\pi}{l}x: \tag{2.4}$$

Օրինակ 3: $u_{tt}=a^2u_{xx}$ հավասարման համար լուծել

$$\begin{aligned}&u_x(0,t)=u(l,t)=0,\\ &u(x,0)=\cos\frac{\pi}{2l}x,\ u_t(x,0)=\cos\frac{3\pi}{2l}x+\cos\frac{5\pi}{2l}x\end{aligned} \tag{2.5}$$

խառը եզրային խնդիրը $0<x<l,\ t>0$ կիսաշերտում:

Լուծում: Օգտվելով խնդիր 3-ի (1.29) ընդհանուր լուծումից, բավարարելով (2.5) պայմաններին, կստանանք

$$u(x,0)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cos\frac{\pi(2n+1)}{2l}x=\cos\frac{\pi}{2l}x\,,$$

$$u_t(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{\pi(2n+1)}{2l}a\cos\frac{\pi(2n+1)}{2l}x=\cos\frac{3\pi}{2l}x+\cos\frac{5\pi}{2l}x:$$

(1.32) բանաձևերից կստանանք

$$A_n=\varphi_n=\begin{cases}1,\ n=0\\ 0,\ n\neq 0\end{cases},\quad B_n=\frac{2l}{\pi(2n+1)a}\psi_n=\begin{cases}\dfrac{2l}{3\pi a},\ n=1\\ \dfrac{2l}{5\pi a},\ n=2\\ 0,\ n\neq 1,2\end{cases}$$

Լուծման վերջնական տեսքն է

$$u(x,t)=\cos\frac{\pi}{2l}at\cos\frac{\pi}{2l}x+\frac{2l}{3\pi a}\sin\frac{3\pi}{2l}at\cos\frac{3\pi}{2l}x+\frac{2l}{5\pi a}\sin\frac{5\pi}{2l}at\cos\frac{5\pi}{2l}x$$

Օրինակ 4: $u_{tt}=a^2u_{xx}$ հավասարման համար լուծել

$$u(0,t)=u_x(l,t)=0,$$
$$u(x,0)=\sin\frac{5\pi}{2l}x,\ u_t(x,0)=\sin\frac{\pi}{2l}x \qquad (2.7)$$

խառը եզրային խնդիրը $0<x<l,\ t>0$ կիսաշերտում:

Լուծում: Օգտվելով խնդիր 4-ի (1.36) ընդհանուր լուծումից, բավարարելով (2.7) պայմաններին A_n և B_n անորոշ գործակիցների համար կստանանք

$$A_n=\varphi_n=\begin{cases}1,\ n=2\\0,\ n\neq 2\end{cases},\ B_n=\frac{2l}{\pi(2n+1)a}\psi_n=\begin{cases}\frac{2l}{\pi a},\ n=0\\0,\ n\neq 0\end{cases}$$

արժեքները: Այսպիսով, դիտարկված օրինակի լուծումը կունենա

$$u(x,t)=\frac{2l}{\pi a}\sin\frac{\pi}{2l}at\sin\frac{\pi}{2l}x+\frac{2l}{3\pi a}\sin\frac{3\pi}{2l}at\cos\frac{3\pi}{2l}x: \qquad (2.8)$$

տեսքը:

Օրինակ 5: $u_{tt}=a^2u_{xx}$ հավասարման համար $Q=(0,l)\times(0,\infty)$ կիսաշերտում ուծել

$$u(0,t)=u_x(l,t)=0,$$
$$u(x,0)=x,\ u_t(x,0)=\sin\frac{\pi}{2l}x+\sin\frac{3\pi}{2l}x \qquad (2.9)$$

խառը եզրային խնդիրը:

Լուծում: $\varphi(x)=x$ ֆունկցիան վերլուծենք Ֆուրյեի շարքի ըստ $\sin\frac{\pi(2n+1)x}{2l}$ ֆունկցիաների, կունենանք

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin\frac{\pi(2n+1)}{2l}x,$$

որտեղ՝

$$\varphi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\xi\sin\frac{\pi(2n+1)}{2l}\xi d\xi=\begin{cases}\frac{8l}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2},\ n=2k+1\\0,\ n=2k\end{cases}:$$

Օգտվելով խնդիր 4-ի ընդհանուր լուծումից, բավարարելով (2.9) պայմաններին A_n և B_n անորոշ գործակիցների համար կստանանք

$$A_n=\varphi_n=\begin{cases}\dfrac{8l}{\pi^2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)^2},\ n=2k+1\\ 0,\ n=2k\end{cases},\quad B_n=\frac{2l}{\pi(2n+1)a}\psi_n=\begin{cases}\dfrac{2l}{\pi a},\ n=0\\ \dfrac{2l}{3\pi a},\ n=1\\ 0,\ n\neq 0\end{cases}$$

Այսպիսով, դիտարկված օրինակի լուծման վերջնական տեսքն է

$$u(x,t)=\frac{2l}{\pi a}\sin\frac{\pi}{2l}at\sin\frac{\pi}{2l}x+\frac{2l}{3\pi a}\sin\frac{3\pi}{2l}at\sin\frac{3\pi}{2l}x+ \\ +\frac{8l}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\cos\frac{\pi(2k+1)}{2l}at\sin\frac{\pi(2k+1)}{2l}x: \tag{2.10}$$

Եզրակացություն: Համեմատելով 1-4 խնդիրների լուծումները՝ նկատում ենք, որ կախված եզրային պայմաններից՝ ստացվում են (1.11) կամ (1.27) տիպի սեփական արժեքները: Սակայն եզրային խնդիրների լուծումները էապես տարբերվում են իրարից և ներկայացվում են (1.14), (1.22), (1.29) և (1.35) բանաձևերից որևէ մեկով:

Գրականություն

1. Արարքցյան Բ.Գ., Հովհաննիսյան Ա.Հ., Շահբաղյան Ռ.Լ. Մաթեմատիկական ֆիզիկայի հավասարումներ: Ուսումնական ձեռնարկ: Եր.: ԵՊՀ, 1988. 167 էջ:
2. Աֆյան Մ. Ղ. Մաթեմատիկական ֆիզիկայի հավասարումներ: Եր.: ԵՊՀ հրատարակչություն, 2000. 188 էջ:
3. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. М.: ФМЛ, 2003. 683 с.
4. Владимиров В.С. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: ФМЛ, 2003. 288 с.
5. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, Годунов С.К. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1971. 416 с 1981. 512 с.
6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: ФМЛ, 2004.
7. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2. М.: Физматлит. 1962. 656 с.

Հոդվածը տպագրության է երաշխավորել խմբագրական կոլեգիայի անդամ, ֆ.մ.գ.թ. Գ.Հ. Սահակյանը: