ՀՏԴ 371.31:51, 378.147:51
Մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկա

Միքայել ԱՊՐԵՍՅԱՆ
ԱրՊՀ, մաթեմատիկայի ամբիոնի ավագ դասախոս
E-mail: 58AME@mail.ru

ՈՐՈՇՅԱԼ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐԸ ԱՐԴՅՈՒՆԱՎԵՏ ՀԱՇՎԵԼՈՒ ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ

Աշխատանքում առաջարկվում են սովորողների ստեղծագործական ունակությունների և հմտությունների զարգացման մի շարք օրինակներ: Որոշյալ ինտեգրալի սահմանումը, հատկությունները, ինտեգրման հիմնական եղանակներն իմանալը որոշյալ ինտեգրալները արդյունավետ հաշվելու համար, իհարկե, անհրաժեշտ են, բայց ոչ բավարար: Առաջանում են դժվարություններ, որոնք հաղթահարվում են ստեղծագործական ունակությունների և հմտությունների շնորհիվ: Աշխատանքը պարունակում է մի քանի տիպային օրինակների լուծումներ:

Բանալի բառեր: *Որոշյալ ինտեգրալ, կորագիծ սեղան, շրջանի մակերես, երկրաչափական իմաստ, քառակուսի, հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյունի , եզրակացություն:*

М.Апресян

ПРИМЕРЫ ЭФФЕКТИВНОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

В работе предлагается ряд примеров, способствующих развитию творческих способностей и навыков учащихся. Знание определения определенного интеграла, его свойств и основных методов интегрирования для эффективного вычисления определенного интеграла конечно, необходимо, но недостаточно. Возникают трудности, которые преодолеваются благодаря творческим способностям и навыкам. Работа содержит несколько типичных решений примеров.

Ключевые слова: *Определенный интеграл, криволинейная трапеция, площадь круга, геометрический смысл, квадрат, равнобедренный прямоугольный треугольник, вывод.*

M.Apresyan

EXAMPLES OF EFFECTIVE COMPUTATION OF DEFINITE INTEGRALS

The article considers a number of examples of development of creative abilities and skills of students. The definition of the definite integral, its properties, the knowledge of the basic methods of integration are important, but insufficient for the successful computation of certain integrals. There are difficulties which are overcome due to habits and skills. The article includes the solution of several typical examples.

Key words: *definite integral, curvilinear trapezoid, area of a circle, geometric meaning, square, equilateral right triangle, conclusion.*

Որոշյալ ինտեգրալի վերաբերյալ բազմաթիվ խնդիրներ սկսվում են այսպես՝ ելնելով որոշյալ ինտեգրալի սահմանումից, օգտվելով Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևից, կատարելով մասերով ինտեգրում, կատարելով փոփոխականի փոխարինում, օգտագործելով ադիտիվության և մոնոտոնության հատկությունները, օգտվելով միջին արժեքի թեորեմներից, ստիճանի իջեցման եղանակով և այլն, ավարտվում են մեծ մասամբ այսպես՝ հաշվել ինտեգրալը:

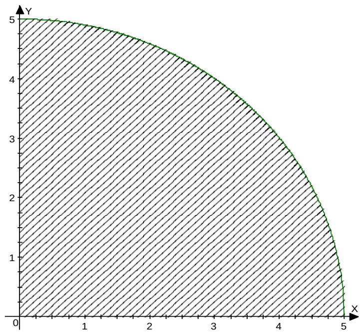
Որոշյալ ինտեգրալի սահմանումը, հատկությունները, ինտեգրման հիմնական եղանակներն իմանալը որոշյալ ինտեգրալները արդյունավետ հաշվելու համար, իհարկե, անհրաժեշտ է, բայց ոչ բավարար: Առաջանում են դժվարություններ, որոնք հաղթահարվում են ստեղծագործական ունակությունների և հմտությունների շնորհիվ:

Աշխատանքում առաջարկվում են սովորողների ստեղծագործական ունակությունների և հմտությունների զարգացման մի շարք օրինակներ:

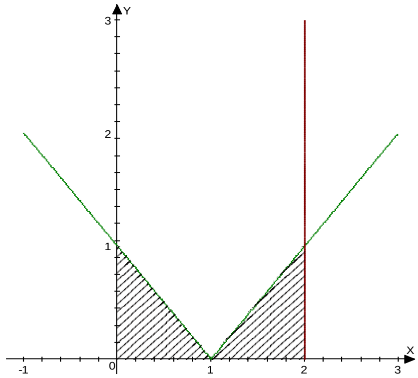
Օրինակ 1. Ելնելով որոշյալ ինտեգրալի երկրաչափական իմաստից, հաշվել հետևյալ ինտեգրալը.

$$I=\int_0^5\sqrt{25-x^2}\,dx$$

Լուծում: $y=\sqrt{25-x^2}$ կորը հանդիսանում է $x^2+y^2=25$ հավասարումով տրվող շրջանագծի վերին կեսը: Կորի այն մասը, երբ x-ը փոփոխվում է 0-ից մինչև 5, ընկած է առաջին կոորդինատային քառորդում: Այստեղից եզրակացնում ենք, որ $x=0, x=5, y=0, y=\sqrt{25-x^2}$ գծերով սահմանափակված կորագիծ սեղանը հանդիսանում է $x^2+y^2\le 25$ անհավասարումով տրվող շրջանի մեկ քառորդը (նկ.1): Այդ կորագիծ սեղանի մակերեսը հավասար է՝ $\dfrac{25\pi}{4}$:



Նկ. 1



Նկ. 2

Հետևաբար

$$I=\int_0^5 \sqrt{25-x^2}\,dx=\frac{25\pi}{4}:$$

Պատասխան՝ $\frac{25\pi}{4}$:

Օրինակ 2. Հաշվել $I=\int_0^2 |1-x|dx$ ինտեգրալը:

Լուծում: Այս ինտեգրալը կարելի է հաշվել՝ օգտվելով որոշյալ ինտեգրալի սահմանումից, հատկություններից, սակայն ավելի շուտ օգնության է հասնում նկ.2-ում պատկերված

$$x=0, x=2, y=|1-x|, y=0$$

գծերով սահմանափակված կորագիծ սեղանը: Ըստ որոշյալ ինտեգրալի երկրաչափական իմաստի այդ կորագիծ սեղանի մակերեսը հավասար է տրված ինտեգրալի արժեքին, այսինքն

$$I=\int_0^2 |1-x|dx=1$$

Դժվար չէ նկատել, որ այդ կորագիծ սեղանի մակերեսը կարելի է հաշվել ամենահարմար եղանակով, այսպես, այն ընդունելով որպես միավոր կողմով քառակուսու մակերես:

Պատասխան՝ 1:

Օրինակ 3. Հաշվել ինտեգրալը $I=\int_0^4 (|x-3|+|1-x|)dx$

Լուծում: Նախ ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատային հարթության վրա կարելի է պատկերել

$$x=0, x=4, y=|x-3|+|1-x|, y=0$$

գծերով սահմանափակված կորագիծ սեղանը (նկ.3): Ըստ որոշյալ ինտեգրալի երկրաչափական իմաստի այդ կորագիծ սեղանի մակերեսը հավասար է տրված ինտեգրալի արժեքին: Այնուհետև, ընտրելով այդ կորագիծ սեղանի մակերեսի հաշվման ամենահարմար եղանակը, դժվար չէ ստանալ, որ

$$I=\int_0^4 (|x-3|+|1-x|)dx=10$$

Պատասխան՝ 10:

Օրինակ 4. Հաշվել

$$f(x)=x^3-3x+2,\; y=x+2$$

կորերով սահմանափակված կորագիծ սեղանի մակերեսը:

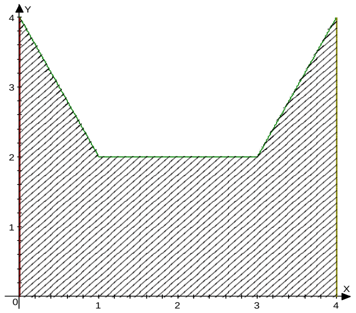
Լուծում: Լուծելով

$$\begin{cases} y=x^3-3x+2 \\ y=x+2 \end{cases}$$

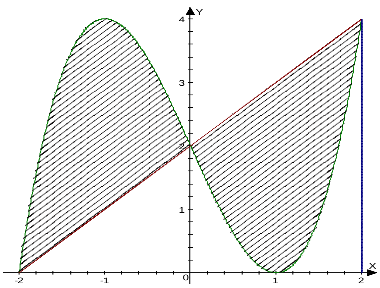
հավասարումների համակարգը՝ դժվար չէ ստանալ այդ կորերի հատման կետերի կոորդինատները՝ $(-2;0),(0;2),(2;4)$:

Պատկերելով ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատային հարթության վրա տրված կորերով սահմանափակված կորագիծ սեղանը (նկ.4), ակնհայտ է դառնում, որ այն բաղկացած է իրար հավասար միևնույն $S=4$ մակերեսով երկու մասերից: Հետևաբար որոնելի մակերեսը հավասար է 8:

Պատասխան՝ 8:



Նկ.3



Նկ.4

Օրինակ 4-ի լուծումը հնարավորություն է տալիս կատարելու մի հետաքրքիր եզրակացություն. $(-2;0),(2;0),(2;4)$ գագաթներով հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյան ընդգծված մասի մակերեսը հավասար է այդ եռանկյան մակերեսի կեսին:

Եթե այդ հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյունը լրացվի մինչև 4 միավոր կողմով քառակուսի դառնալը, ապա ակնհայտ է դառնում, որ ստացված քառակուսին բաղկացած կլինի իրար հավասարամեծ և յուրաքանչյուրից երկուական պարունակող մասերից: Հետևաբար

$$f(x)=x^3-3x+2,\; y=x+2$$

կորերով սահմանափակված կորագիծ սեղանի մակերեսը հավասար է այդ քառակուսու մակերեսի կեսին, այսինքն՝ 8-ի: Ըստ նկ.4-ի որոշյալ ինտեգրալի միջոցով կարելի է նշել ևս մի քանի հավասարություններ.

$$\int_{-2}^{0}\left(x^3-3x+2-(x+2)\right)dx=\int_{0}^{2}\left(x+2-\left(x^3-3x+2\right)\right)dx$$

$$\int_{-2}^{0}(x+2)dx=\int_{0}^{2}\left(x^3-3x+2\right)dx$$

$$\int_{0}^{2}\left(x^3-3x+2\right)dx=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=2$$

$$\int_{0}^{2}\left(4x-x^3\right)dx=\frac{1}{2}\cdot(2+4)\cdot 2-2=4\,:$$

$$\int_{-2}^{0}\left(x^3-4x\right)dx=\frac{1}{4}\cdot 16=4$$

Օրինակ 5. Ելնելով որոշյալ ինտեգրալի երկրաչափական իմաստից, ապացուցել, որ

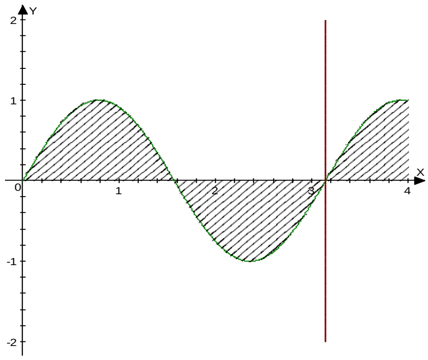
$$\int_0^{\pi}\sin 2x dx=0$$

Լուծում: Նախ անհրաժեշտ է ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատային հարթության վրա պատկերել

$$x=0, x=\pi, f(x)=\sin 2x, y=0$$

գծերով սահմանափակված կորագիծ սեղանը (նկ.5):

Այնուհետև հաշվի առնելով որոշյալ ինտեգրալի երկրաչափական իմաստը, ըստ նկ.5-ի, $[0;\pi]$ միջակայքում ընդգծված երկու մասերի մակերեսների գումարը հավասար է տրված որոշյալ ինտեգրալի արժեքին: Այստեղ պետք է հաշվի առնել նաև ընդգծված մասերի դասավորվածությունը:



Նկ.5

Նշված միջակայքում ընդգծված երկու մասերը հավասարամեծ են, ընդ որում գտնվում են աբսցիսների առանցքի տարբեր կողմերում: Հետևաբար, տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը.

$$\int_0^{\pi}\sin 2x dx=0:$$

Եզրակացություն:Դիտարկված օրինակների լուծումները ցույց են տալիս, որ որոշյալ ինտեգրալի երկրաչափական իմաստը և մակերեսի հատկություններն ավելի դյուրին և արդյունավետ են դարձնում որոշ դասի որոշյալ ինտեգրալների հաշվումը:

Գրականություն

1. Գևորգյան Գ. Գ. և ուրիշներ: Մաթեմատիկական անալիզի խնդրագիրք , առաջին մաս, Ե. 2007,265 էջ Марон И.А.
2. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М., 1972. 544 с.
3. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах. М., 1970, 400 с.

Հոդվածը տպագրության է երաշխավորել խմբագրական կոլեգիայի անդամ, ֆ.մ.գ.թ. Գ.Հ. Սահակյանը: