УДК 512
Математика

Марианна ГАЛДУНЦ
Соискатель кафедры теории функций ЕГУ.
E-mail: galdunts74@mail.ru

МНОГОКРАТНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ЗАДАЧА В ОДНОМ КЛАССЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

В данной работе рассматривается кратная интерполяционная задача в пространстве целых функций Винера. Решение задачи осуществляется с помощью рядов специального вида и отмечается, что оно является единственным, принадлежашим соответствующему пространству. Затем получаются некоторые теоремы о единственности в этих классах.

Ключевые слова: *Целые функции, единственность, базис, кратная нтерполяция, сходимость .*

Մ.Գալդունց

ԲԱԶՄԱԿԻ ԻՆՏԵՐՊՈԼՅԱՑԻԱՅԻ ԽՆԴԻՐԸ ԱՄԲՈՂՋ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ

Այս աշխատանքում դիտարկվում է բազմակի ինտերպոլյացիայի խնդիրը ամբողջ ֆունկցիաների Վիների տարածությունում: Խնդրի լուծումը կառուցվում է հատուկ տեսքի շարքերի օգնությամբ և ցույց է տրվում,որ այն միակն է, պատկանում է համապատասխան տարածությանը:Այնուհետև ստացվում են այդ դասերում որոշ միակության թեորեմներ:

Բանալի բառեր: Ամբողջ ֆունկցիա, միակություն, բազիս, բազմակի ինտերպոլյացիա, զուգամիտություն:

M.Galdunts

THE MULTIDIMENSIONAL INTERPOLATION PROBLEM IN A CLASS OF ENTIRE FUNCTIONS

The paper considers the multidimensional interpolation problem in the Viener space of entire functions. The solution of the problem is constructed by use of special series. It is shown that the solution is unique and belongs to the corresponding space. Then we prove some uniqueness theorems in those classes.

Keywords: *Entire function, uniqueness, basis, ultidimeasional interpolation, Convergence.*

Пусть $p > 1, \sigma > 0$. Обозначим через W^p_σ,порядка $\rho = 1$ и типа $\leq \sigma$ класс целых функций $f(z)$, для которых

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p dx = \|f\|_p^p < +\infty. \qquad (1)$$

Многими авторами в данных классах были рассмотрены и решены интерполяционные задачи различного характера ([1]-[3]).

В данной работе рассматривается в классе W^p_σ следующая задача: построить целую функцию $f(z)$, которая является решением следующей кратной интерполяционной задачи

$$f(nk) = f'(nk) = \cdots = f^{(n-2)}(nk) = 0 \text{ и } f^{(n-1)}(nk) = C_k,$$

где $n \geq 1$ произвольное натуральное число и $k \in Z = \{0, \pm 1, \dots\}$.

Теорема 1. Если $\{c_k\} \in l^p$ $(p > 1)$ т.е.

$$\left(\sum_k |c_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|\{c_k\}\|_p < +\infty, \qquad (2)$$

то следующий ряд

$$f(z) = \sum_k c_k \frac{\sin^n \frac{\pi}{n}(z - nk)}{d\frac{\pi}{n}(z - nk)}, \qquad (3)$$

где $d = \left(\frac{\pi}{n}\right)^{n-1}(n-1)!, n \geq 1$.

а) равномерно сходится на любом компакте и следовательно $f(z)$ будет целой функцией.

б)функция $f(z)$ удовлетворяет следующим интерполяционным условиям.

$$f(nk) = f'(nk) = \cdots = f^{(n-2)}(nk) = 0, \ f^{(n-1)}(nk) = c_k. \qquad (4)$$

Доказательство: Допустим $K \subset \mathbb{C}$ произвольный компакт и $nk \notin K$. Покажем, что ряд (3) равномерно сходится на компакте K. Обозначим через $\varphi_{l,m}(z)$ −частичную сумму ряда (3)

$$\varphi_{l,m}(z) = \sum_{l+1}^{m} c_k \frac{\sin^n\left(\frac{\pi}{n}(z - nk)\right)}{\frac{d\pi}{n}(z - nk)}$$

Оценим эту функцию:

$$|\varphi_{l,m}(z)| \leq \sum_{l+1}^{m} |c_k| \left|\frac{\sin^n\left(\frac{\pi}{n}(z - nk)\right)}{\frac{d\pi}{n}(z - nk)}\right| \leq \frac{n}{d\pi}\sum_{l+1}^{m}\frac{|c_k|}{|z - nk|}$$

Используя неравенство Гёлдера, получим

$$|\varphi_{l,m}(z)| \leq \frac{n}{\pi d}\left(\sum_{l+1}^{m}|c_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{l+1}^{m}\frac{1}{|z - nk|^q}\right)^{\frac{1}{q}}, \qquad (5)$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Если z ∈ К, то

$$|z-nk| = |nk|\cdot\left|1-\frac{z}{nk}\right| \geq M_1|k|\,, M_1>0\,,$$

и, следовательно,

$$\sum_{l+1}^{m}\frac{1}{|z-nk|^q} \leq M_2\sum_{l+1}^{m}\frac{1}{|k|^q} \leq M_3.$$

Подставляя эту оценку в (5), получим

$$\left|\varphi_{l,m}(z)\right| \leq M_3\left(\sum_{l+1}^{m}|c_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = M_3\left\|\{c_k\}_{l+1}^{m}\right\|.$$

Используя условие теоремы $\{c_k\} \in l^p$ получим $\varphi_{l,m}(z) \rightrightarrows 0\ \ z \in K,\ \ l,m \to \infty$.

Таким образом ряд (3) равномерно сходится на компакте *К*, когда *К* не содержит точки $nk(k \in Z)$.

Если К будет содержать некоторые из точек nk, то и в этом случае согласно принципу модуля максимума будет иметь место оценка (5) и следовательно ряд (3) снова равномерно сходящийся на К. Используя теорему Вайерштрасса в результате получим, что $f(z)$ - целая функция. С другой стороны для функции $\frac{\sin^n\frac{\bar\pi}{n}(z-nk)}{\frac{d\bar\pi}{n}(z-nk)}$ точка nk является нулём $(n-1)$ порядка, следовательно $f(nk) = f'(nk) = \cdots = f^{(n-2)}(nk) = 0$. Кроме того

$$g_k(z) = \frac{\sin^n\frac{\bar\pi}{n}(z-nk)}{\frac{d\bar\pi}{n}(z-nk)} = \frac{n}{d\bar\pi(z-nk)}\left((z-nk)\frac{\pi}{n} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\bar\pi}{n}(z-nk)\right)^3 + \cdots\right)^n =$$

$$= \frac{1}{d}\left(\frac{\bar\pi}{n}\right)^{n-1}(z-nk)^{n-1} - \cdots.$$

отсюда получим , $g_k^{(n-1)}(nk) = \frac{1}{d}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{n-1}(n-1)! = 1$ и, следовательно,

$f^{(n-1)}(nk) = c_k$. Теорема доказана.

Теорема 2. Если $\{c_k\} \in l^p$,то ряд (3) сходится по норме пространства W_σ^P и , следовательно, $f \in W_\sigma^P$

Доказательство . Обозначим

$$\varphi_{l,m}(z) = \sum_{l+1}^{m} c_k\frac{\sin^n\frac{\bar\pi}{n}(z-nk)}{\frac{\pi d}{n}(z-nk)}, \tag{6}$$

$$V_{l,m}(z) = \sum_{l+1}^{m}\frac{c_k}{\frac{d\bar\pi}{n}(z-nk)}. \tag{7}$$

Легко заметить,что функция $g_k(z) = \frac{\sin^n\frac{\bar\pi}{n}(z-nk)}{\frac{d\bar\pi}{n}(z-nk)}$ целая функция экспоненциального типа и $\sigma = \bar n$. С другой сторины,когда p>1, то $g_k(x) \in L^p(R)$ и следовательно $g_k(z) \in W_\sigma^P$. Функция $\varphi_{l,m}(z)$ является линейной комбинацией $g_k(z)$ функций, следовательно $\varphi_{l,m}(z) \in W_\sigma^P$. Как известно, ([4]), в пространствах W_σ^P имеет место следующая оценка норм.

$$\int_R \left| \varphi_{l,m}(x) \right|^p dx \le e^{\bar{\pi} p|h|} \int_R \left| \varphi_{l,m}(x+ih) \right|^p dx. \quad (8)$$

Отсюда и из обозначений (6), (7) получим

$$\int_R \left| \varphi_{l,m}(x+ih) \right|^p dx \le e^{\bar{\pi} p|h|} \int_R \left| V_{l,m}(x+ih) \right|^p dx, \quad (9)$$

следовательно для доказательства теоремы необходимо оценить правую часть (9).

Прежде заметим,что $V_{l,m}(z+ih)$ $(h>0)$ –рациональная функция полюсу которой находятся во нижней в полуплоскости,следовательно $V_{l,m}(z+ih) \in H_p^+$, где H_p^+ - пространство Харди для верхней полуплоскости.Как известно ([5]) H_p^+ - банахово пространство и в нём линейные функционалы имеют следуюший вид.

$$\psi[V_{l,m}(x+ih)] = \int_R V_{l,m}(x+ih)\bar{\psi}(x)dx \quad (10)$$

где $\psi(z) \in H_q^-$ $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$ $и$ H_q^- - пространство Харди в $Imz<0$ полуплоскости.

Теперь, используя формулу для вычисления нормы в банаховом пространстве ([5]), получим

$$\left\| V_{l,m}(x+ih) \right\|_p = sup\left\{ \left| \int_R V_{l,m}(x+ih)\bar{\psi}(x)dx \right|, \|\psi\|_q \le 1 \right\}. \quad (11)$$

Определим функцию $\bar{\psi}(z)$ в нижней полуплоскости таким образом $\bar{\psi}(x) = \overline{\psi(z)}$ и вычислим интеграл (10) с помощью вычетов, получим

$$\int_R V_{l,m}(z+ih)\bar{\psi}(x)dx = 2\pi i \sum_{l+1}^{m} \psi(nk-h)\, c_k(-1)^k. \quad (12)$$

Используя неравенство Гёлдера из (12) получим

$$\left| \int_R V_{l,m}(x+ih)\psi(x)dx \right| \le 2\bar{n}\left(\sum_{l+1}^{m} |c_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{l+1}^{m} |\bar{\psi}(nk-ih)|^q\right)^{\frac{1}{q}}. \quad (13)$$

Но когда $\psi \in H_q^+$ имеем,что

$$\sum_{l+1}^{m} |\psi(nk-ih)|^q \le C_h \|\psi\|^q.$$

Подставляя эту оценку в (13),получим

$$\left| \psi(V_{l,m}(x+ih)) \right| \le 2\bar{\pi} C_h \left(\sum_{l+1}^{m} |c_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Но согласно условию теоремы $\{c_k\} \in l^p$ значит для произвольного ε>0, когда $l>n$ имеем

$$\left| \psi(\, V_{l,m}(x+ih)) \right| < \varepsilon,$$

отсюда и из (13) последует, что

$$\left\| \mathrm{V}_{\mathrm{l,m}}(\mathrm{x}+\mathrm{ih}) \right\| < \varepsilon.$$

Теперь подставляя эту оценку в (9), можем написать

$$\left\| \Phi_{l,m}(x) \right\|_p < \varepsilon$$

А это означает,что ряд (3) сходится в пространстве W_{σ}^{P} и так как это пространство полное, то $f(z) \in W_{\sigma}^{P}$ и теорема 2 доказана.

Литература

1. Гофман К. Банаховы пространства аналитических функций. М. 1975.
2. Джрбашян М.М., Рафаелян С.Г. О целых функциях экспоненциального типа на весовых классов L^2 . ДАН Арм. ССР. т.73. №1,1981.
3. Левин Б.Я. Интерполяция целыми функциями экспоненциального типа. Сб. «Математическая физика и функциональный анализ». ФНИНТ АН УССР, вып.1. 1969. С.136-146.
4. Левин Б.Я., Любарский Ю.И. Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент. Изв. АН СССР. сер. матем., 39, №3 1975, 657–702.
5. Рафаелян С.Г. Интерполяция и базисность в весовых классах целых функций экспоненциального типа. Изв. АН Арм. ССР. XVIII, №3. 1983. С. 167-186.

Статья рекомендована к печати членом редакционной коллегии,
к.ф.м.н. Г.Г.Саакяном.