ՀՏԴ 371.31:51, 378.147:51 *Մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկա*

ԿՈՐԱԳԻԾ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

Միքայել ԱՊՐԵՍՅԱՆ

Բանալի բառեր: Կորագիծ ինտեգրալ, ինտեգրման ճանապարհ, հարթ կոր, տարածական կոր, պարամետրական հավասարում, մասնակի ածանցյալներ, լրիվ դիֆերենցիալ

Ключевые слова: *Криволинейный интеграл, путь интегрирования, плоская кривая, пространственная кривая, параметрическое уравнение, частные производные, полный дифференциал.*

Keywords: *curved integral, the integration path, plane curve, space curve, the parametric equation, partial derivatives, total differential.*

М. Апресян

Криволинейные интегралы

В работе исследованы криволинейные интегралы. Рассмотрены простейшие примеры, которые способствуют углублению знаний учащихся. В математике, при решении задач, возникают разные вопросы, разные трудности. Преодоление возникшей проблемы приводит к решению задач. Важно знать также ход решения типовых задач. Работа содержит решения типовых примеров.

M. Apresyan

Curvilinear integrals

The work investigates curvilinear integrals. The elementary examples which promote increasing knowledge of pupils are reviewed. In mathematics, at the solution of tasks, different questions and difficulties arise. Overcoming of the arisen problem leads to the solution of tasks. It is important to know the course of the solution of standard tasks. The work contains solutions of standard examples.

Աշխատանքում հետազոտված են կորագիծ ինտեգրալներ: Դիտարկված են պարզագույն օրինակներ, որոնք նպաստում են սովորողների գիտելիքների խորացմանը: Մաթեմատիկայում խնդիրների լուծման ժամանակ առաջանում են տարբեր հարցեր, տարբեր դժվարություններ: Առաջացած դժվարությունների հաղթահարումը տանիս է խնդրի լուծման բանալին: Կարևոր է իմանալ տիպային օրինակների լուծումներ: Աշխատանքը պարունակում է տիպային օրինակների լուծումներ:

Կորագիծ ինտեգրալների բաժինը կարևոր տեղ է գրավում «Մաթեմատիկական անալիզի»դասընթացում [1]: Աշխատանքում դիտարկվում են մի քանի կորագիծ ինտեգրալներ: Հոդվածի հիմնական նպատակը ոչ միայն այդ ինտեգրալների հաշվումն է, այլև ուղղված է սովորողների ստեղծագործական մտածողության զարգացմանը: Ինչպե՞ս ընտրել խնդրի լուծման ռացիոնալ եղանակը, ինչպե՞ս զուգորդել տեսական և գործնական բնույթի գիտելիքները, ինչպե՞ս ստեղծել նմանատիպ մոդել:

Կորագիծ ինտեգրալի հաշվման համար կան տարբեր հնարավորություններ: Աշխատանքում առաջարկվում է կորագիծ ինտեգրալների մի դասի հաշվման համեմատաբար պարզ եղանակ:

Դիտարկենք կոնկրետ օրինակներ [2-3]:

Օրինակ 1. Ցույց տալ, որ

$$\int_{(0;1)}^{(2;3)} (x+y)\,dx + (x-y)\,dy \qquad (1)$$

կորագիծ ինտեգրալը կախված չէ ինտեգրման ճանապարհից և հաշվել այն:

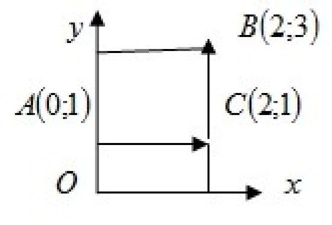
Լուծում: $P(x;y) = x + y$ և $Q(x;y) = x - y$ ֆունկցիաները իրենց

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \quad \text{և} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} =$$

մասնակի ածանցյալների հետ միասին անընդհատ են ողջ հարթության վրա, ընդ որում տեղի ունի $\frac{\partial}{\partial} = \frac{\partial}{\partial}$ հավասարությունը: Հետևաբար տված ինտեգրալը կախված չէ ինտեգրման ճանապարհից և այդ ինտեգրալի հաշվման համար կարող ենք ընտրել $A(0;1)$ և $B(2;3)$ կետերը միացնող կամայական ճանապարհ: Քանի որ ավելի հարմար է կորագիծ ինտեգրալը հաշվել ըստ այն հատվածների, որոնք զուգահեռ են կոորդինատային առանցքներին, ապա ընտրենք նկ.1-ում սլաքով նշված ճանապարհը: Վերցնենք $C(2;1)$ կետը: Այդ դեպքում՝

$$\int_{(0;1)}^{(2;3)} (x+y)dx + (x-y)dy = \int_{(0;1)}^{(2;1)} + \int_{(2;1)}^{(2;3)} \qquad (2)$$

$A(0;1)$ և $C(2;1)$ կետերը միացնում է $y = 1$ ուղիղը:



նկ.1

Հետևաբար՝ $dy = 0$ և $\int_{(0;1)}^{(2;1)} = \int_0^2 (x+1)dx = 4$:

$C(2;1)$ և $B(2;3)$ կետերը միացնում է $x = 2$ ուղիղը; հետևաբար $dx = 0$ և

$$\int_{(2;1)}^{(2;3)} = \int_1^3 (2-y)dy = 0$$

Այսպիսով՝

$$\int_{(0;1)}^{(2;3)} (x+y)dx + (x-y)dy = 4 + 0 = 4 \qquad (3)$$

Կարևորվում է խնդրի լուծման հետևյալ քայլերի $(A \to C \to B)$ հերթականությունը:

Դիտարկված օրինակը ցույց է տալիս, որ եթե մինչև կորագիծ ինտեգրալի հաշվումը հայտնի է, որ այն անկախ է ինտեգրման ճանապարհից, ապա նրա հաշվումը նշանակալի չափով կարելի է պարզեցնել, ընտրելով հարմար ինտեգրման ճանապարհ: Փակ կոնտուրի դեպքում, առանց հաշվումներ կատարելու կարող ենք ասել, որ այդպիսի ինտեգրալի արժեքը հավասար է զրոյի:

Օրինակ 2. Հաշվել կորագիծ ինտեգրալը.

$$\int_{(1;2;3)}^{(6;1;1)} yzdx + xzdy + xydz \qquad (4)$$

Լուծում. *1-ին եղանակ:*

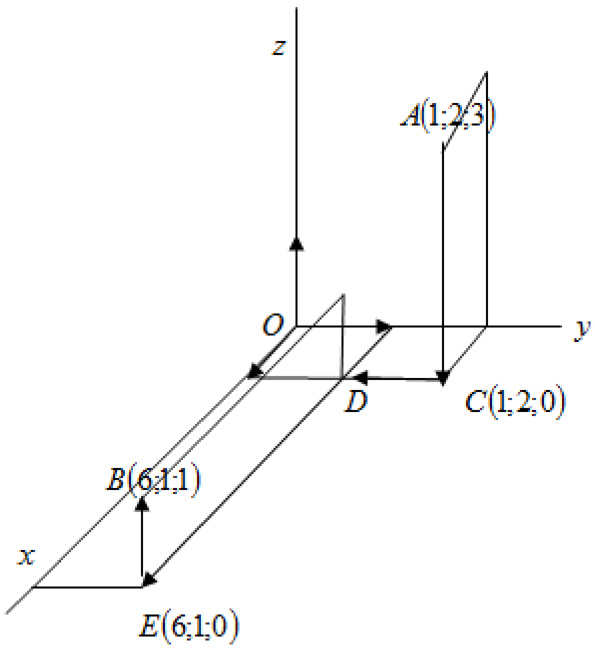
Դժվար չէ համոզվել, որ ընդինտեգրալ արտահայտությունը իրենից ներկայացնում է լրիվ դիֆերենցիալ, ընդ որում

$$d(xyz) = yzdx + xzdy + xydz$$

Հետևաբար $\int_{(1;2;3)}^{(6;1;1)} yzdx + xzdy + xydz = 6 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 3 = 0$

2-րդ եղանակ:

Ստեղծենք օրինակ 1-ի նմանատիպ մոդել: Քանի որ դիտարկվող ինտեգրալը անկախ է ինտեգրման ճանապարհից, ապա այն հաշվելու համար ընտրենք $A(1;2;3)$ և $B(6;1;1)$ կետերը միացնող նկ.2-ում սլաքով պատկերված ճանապարհը:



նկ.2

վերցնենք $C(;2;0)$; $D(;1;0)$; $E(;1;0)$ կետերը: Այդ դեպքում՝

$$\int_{(2'3)}^{(;1;1)} yzdx+xzdy+xydz=\int_{(AC)}+\int_{(CD)}+\int_{(DE)}+\int_{(EB)}; \qquad (5)$$

Նկատենք, որ $(AC): x= \;,\; y= \;,\; 0\le z\le \;$: Հետևաբար $dx= \;,\; dy= \;$ և $\int_{(AC)} = \int_3^0 2dz = -$

Նման ձևով $(CD): x= \;; z= \;; 1\le y\le \;; dx= \;; dz= \;; \int_{(CD)} = \;$

$$(DE): y= \;;\; z= \;;\; 1\le x\le \;;\; dy= \;;\; dz= \;;\; \int_{(DE)} = \;$$

$$(EB): x= \;; y= \;;\; 0\le z\le \;;\; dx= \;; dy= \;;\; \int_{(EB)} = \int_0^1 \;dz = \;$$

Այսպիսով՝

$$\int_{(;2;3)}^{(;1;1)} yzdx+xzdy+xydz= -\;+\;= \; \qquad (6)$$

Կարևորվում է խնդրի լուծման հետևյալ քայլերի $(\;)\to(\;)\to(\;)$ հերթականությունը:

Օրինակ 3. Հաշվել հետևյալ կորագիծ ինտեգրալը.

$$\int_l y^2dx+(\;^2+z)dy+(\;+y+z^2)dz\,;$$

որտեղ l-ը $A(;0;2)$; $B(;1;4)$ կետերը միացնող ուղղի հատվածն է:

Լուծում: Նախ կազմենք $A(;0;2)$ և $B(;1;4)$ կետերով անցնող ուղղի հավասարումը.

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-0}{1-0}=\frac{z-2}{4-2}= \;;$$

որտեղից կստանանք.

$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = t, \\ z = 2 + 2t \end{cases} \quad \text{ունենք՝} \quad \begin{cases} dx = 2dt, \\ dy = dt, \\ dz = 2dt \end{cases}$$

A կետից B կետը տեղափոխման ժամանակ $0 \le y \le 1$ ուրեմն՝ $0 \le t \le 1$:

Այսպիսով, կստանանք՝

$$\int_l y^2 dx + (x^2 + z)dy + (x + y + z^2)dz = \int_0^1 (14t^2 + 28t + 13)dt = \left(\frac{14t^3}{3} + 14t^2 + 13t\right)\Bigg|_0^1 = \frac{95}{3}$$

Գրականություն

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. т.3. М., 1966.- 656 с.
2. Виленкин Н.Я., Бохан К..А., Марон И.А., Матвеев И.В, Смолянский М.Л., Цветков А. Т. Задачник по курсу математического анализа. ч.2. М., 1971.-336 с.
3. Демидович Б. П.Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.,1972 . 544 с.

Տեղեկություններ հեղինակի մասին.

Միքայել Ասլբեկյան – ԱրՊՀ Մաթեմատիկայի ամբիոնի ավագ դասախոս

E-mail: (58AME@mail.ru)

Հոդվածը տպագրության է երաշխավորել խմբագրական կոլեգիայի անդամ, ֆ.մ. գ.դ., Ա.Մ.Խաչատրյանը: