УДК:517.9   Математика

О НЕОСЦИЛЛЯЦИИ ОДНОГО КЛАССА ОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Георгий САAКЯН

Ключевые слова: *Система дифференциальных уравнений, неосцилляция, вырожденные матрицы.*
Բանալի բառեր՝ *Դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգեր, ոչօսցիլյացիա, վերասերված մատրից:*
Keywords: *Ordinary differential equations, non-oscillation, uninversible matrix.*

Գ. Սահակյան
Մի սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների համասեռ համակարգերի դասի ոչօսցիլյացիայի մասին

Գծային սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգերի համար ընդհանուր դեպքում գոյություն չունի այնպիսի հայտանիշ, որով որոշվում է այդ համակարգի այնպիսի բնութագրիչ, ինչպիսինն է օսցիլյացիան (ոչօսցիլյացիան): Այդ իմաստով կարևոր է ինչպես օսցիլյացիայի, այնպես նաև ոչօսցիլյացիայի հայտանիշների որոշումը որոշ դասերի համար(տես, օրինակ,[1]-[3]): Աշխատանքում ապացուցվում է գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգերի մի դասի ոչօսցիլյացիան ամբողջ թվային առանցքի վրա: Լեմմա 2-ի և թեորեմ 1-ի պնդումները ընդհանրացնում են [4] աշխատանքում ստացված որոշ արդյունքները:

G.Sahakyan
About Non-Oscillation for One Class Homogeneous System of Ordinary Differential Equations

In general, for systems of ordinary differential equations there is no criterion that would determine such characteristic as the oscillation (non-oscillation) of the system: In this sense, the definition of the criteria of the oscillation and non-oscillation has a value for certain classes of systems (see, for example, [1]-[3]). For one class of system of linear differential equations the non-oscillation on all number line is proving in the work. The approvals of Lemma 2 and Theorem 1 generalize some results that are set out in the work [4].

Для систем дифференциальных уравнений в общем случае нет критерия, который определял бы такую характеристику, как осцилляция (неосцилляция) системы. В этом смысле имеет значение определение критериев, как осцилляции, так и неосцилляции для некоторых отдельных классов систем (см., например, [1]-[3]). В работе для одного класса систем дифференциальных уравнений доказывается их неосцилляция на всей числовой прямой. Утверждения леммы 2 и теоремы 1 обобщают некоторые результаты, полученные в работе [4].

Рассматривается следующая однородная линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений порядка n (см., например, [5])

$$\vec{y}' = 4\vec{y}, \qquad (1)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_n(t) \end{pmatrix},$$

$a_{ij}\ (i, j = \ ,2,\dots,n)$ -постоянные действительные числа. Обозначим через A_i (A'_i) $i = \ ,2,\dots,n$ i -ый столбец (i -ую строку) матрицы. Тогда матрицу A можно записать и в виде

$$A = \ A_1, A_2, \dots, A_n]$$

или

$$A = \ A'_1\ A'_2; \dots, A'_n].$$

Определение 1. Квадратная матрица A называется вырожденной (см., например, [5]), если ее определитель равен нулю ($\det A = \ )$) .

Определение 2. Нетривиальное решение системы (1) называется осциллирующим (см., например, [2]), если каждая из его компонент имеет последовательность нулей, стремящейся к бесконечности, в противном случае называется неосциллирующим.

Определение 3. Система (1) называется осциллирующей, если ее каждое решение является осциллирующим, в противном случае называется неосциллирующей.

Лемма 1. *Квадратная матрица A n-ого порядка $(n \geq 3)$, в которой для какой-то тройки чисел* $i \neq j \neq k$, $(i, j, k = 1, 2, ..., n)$, *выполняется условие*

$$A_i - A_j = A_j - A_k \quad (A'_i - A'_j = A'_j - A'_k),$$

является вырожденной.

Доказательство. Предположим, что имеет место условие $A_i - A_j = A_j - A_k$ (аналогично проводится доказательство и во втором случае). Заменим в матрице A i-ый столбец на $A_i - A_j$, а k-ый столбец на $A_j - A_k$. При этом, как нам известно, определитель матрицы A не изменится. Однако, в полученной матрице, окажутся равными i-ый и k-ый столбцы. И, следовательно, определитель этой матрицы, а значит, и матрицы A, будет равен нулю.

Следствие 1. *Квадратная матрица n-ого порядка $(n \geq 2)$, в которой элементы хотя бы каких-то трех строк (столбцов) являются последовательными членами арифметической прогрессии, является вырожденной.*

Лемма 2. *Если элементы каждой отдельно взятой строки матрицы A являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии, то множество собственных значений матрицы A содержит нуль кратности не меньше $n-2$.*

Доказательство. Предположим, что элементы каждой отдельно взятой строки матрицы A являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии с начальными членами, равными a_k и с разностью d_k $(k = 1, 2, ..., n.)$. Проверим правильность утверждения леммы прежде всего при $n = 3$. Непосредственным вычислением найдем, что характеристическое уравнение матрицы A при этом значении будет иметь вид

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & a_1 + d_1 & a_1 + 2d_1 \\ a_2 & a_2 + d_2 - \lambda & a_2 + 2d_2 \\ a_3 & a_3 + d_3 & a_3 + 2d_3 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + (a_1 + (a_2 + d_2) + (a_3 + 2d_3))\lambda^2 -$$

$$-\left(\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ d_2 & d_3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ d_1 & d_3 \end{vmatrix} \right)\lambda,$$

и, поскольку $\varphi(0) = 0$, то кратность собственного значения $\lambda = 0$ матрицы A больше или равна единице.

В общем случае характеристическое уравнение матрицы A будет иметь вид

$$\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & a_1 + d_1 & a_1 + 2d_1 & ... & a_1 + (n-1)d_1 \\ a_2 & a_2 + d_2 - \lambda & a_2 + 2d_2 & ... & a_2 + (n-1)d_2 \\ a_3 & a_3 + d_3 & a_3 + 2d_3 - \lambda & ... & a_3 + (n-1)d_3 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_n & a_n + d_n & a_n + 2d_n & ... & a_n + (n-1)d_n - \lambda \end{vmatrix}.$$

Заметим прежде всего, что $\lambda = 0$ является корнем характеристического уравнения матрицы A, поскольку, согласно следствию из леммы 1, $\varphi(0) = \det A = 0$. Далее, очевидно, что после вычисления последнего определителя, в полученном характеристическом уравнении матрицы A, коэффициентом при λ окажется число $(-\ )^n$, а при λ^{-} коэффициент будет равен

$$(-\ )^{n-}\left[a_1+\ a_2+d_2)+\ ..+\ a_н+\ n-\ )d_n\right]=(-\ )^{n-}\sum_{k=}^{n}a_k+\ k-\ )d_k\ .$$

Покажем теперь, что $\lambda=\ )$ является нулем характеристического уравнения матрицы A кратности не меньше $n-\ $. Для этого сначала преобразуем определитель $\varphi\ \lambda$, вычитая из каждого столбца матрицы, начиная со второго, предыдущий, и, записывая его на месте вычитаемого. Согласно известным свойствам определителя, при этом его значение не изменится. В результате получим

$$\varphi(\lambda)=\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}a_1-\lambda & d_1+\lambda & d_1 & \dots & d_1\\ a_2 & d_2-\lambda & d_2+\lambda & \dots & d_2\\ a_3 & d_3 & d_3-\lambda & \dots & d_3\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_n & d_n & d_n & \dots & d_n-\lambda\end{vmatrix}.$$

Воспользовавшись формулой для определения производной определителя (см, например, [6]), будем иметь

$$\varphi\ \lambda=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 0 & \dots & 0\\ a_2 & d_2-\lambda & d_2+\lambda & \dots & d_2\\ a_3 & d_3 & d_3-\lambda & \dots & d_3\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_n & d_n & d_n & \dots & d_n-\lambda\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_1-\lambda & d_1+\lambda & d_1 & \dots & d_1\\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0\\ a_3 & d_3 & d_3-\lambda & \dots & d_3\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_n & d_n & d_n & \dots & d_n-\lambda\end{vmatrix}+\dots+$$

$$+\begin{vmatrix}a_1-\lambda & d_1+\lambda & d_1 & \dots & d_1\\ a_2 & d_2-\lambda & d_2+\lambda & \dots & d_2\\ a_3 & d_3 & d_3-\lambda & \dots & d_3\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\end{vmatrix}. \qquad (2)$$

При $n=\ 4$ эта формула (3) будет иметь вид

$$\varphi\ 0)=\begin{vmatrix}- & 1 & 0 & 0\\ a_2 & d_2 & d_2 & d_2\\ a_3 & d_3 & d_3 & d_3\\ a_4 & d_4 & d_4 & d_4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_1 & d_1 & d_1 & d_1\\ 0 & - & 1 & 0\\ a_3 & d_3 & d_3 & d_4\\ a_4 & d_4 & d_4 & d_4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_1 & d_1 & d_1 & d_1\\ a_2 & d_2 & d_2 & d_2\\ 0 & 0 & - & 1\\ a_4 & d_4 & d_4 & d_4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_1 & d_2 & d_2 & d_2\\ a_2 & d_2 & d_2 & d_2\\ a_3 & d_3 & d_3 & d_3\\ 0 & 0 & 0 & -\end{vmatrix}.$$

Справа, в этом соотношении, во втором определителе просуммируем 2-ой и 3-ий столбцы, записав результат на месте 2-ого столбца, и затем вынесем 2 за определитель. В третьем определителе проделаем указанные действия с 3-им и 4-ыми столбцами, записав результат на месте третьего столбца. Учитывая свойства определителей, получим

$$\varphi\ 0)=\begin{vmatrix}- & 1 & 0 & 0\\ a_2 & d_2 & d_2 & d_2\\ a_3 & d_3 & d_3 & d_3\\ a_4 & d_4 & d_4 & d_4\end{vmatrix}+\ \begin{vmatrix}a_1 & d_1 & d_1 & d_1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ a_3 & d_3 & d_3 & d_4\\ a_4 & d_4 & d_4 & d_4\end{vmatrix}+\ \begin{vmatrix}a_1 & d_1 & d_1 & d_1\\ a_2 & d_2 & d_2 & d_2\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ a_4 & d_4 & d_4 & d_4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_1 & d_2 & d_2 & d_2\\ a_2 & d_2 & d_2 & d_2\\ a_3 & d_3 & d_3 & d_3\\ 0 & 0 & 0 & -\end{vmatrix}.$$

В полученном соотношении справа все определители окажутся равными нулю, так как в каждом из них имеется по два одинаковых столбца.

В общем случае, при $n > 1$, в результате подстановки в соотношения (2) $\lambda = 0$, мы будем иметь

$$\varphi(0) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & d_2 & d_2 & \dots & d_2 \\ a_3 & d_3 & d_3 & \dots & d_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & d_n & d_n & \dots & d_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & d_1 & \dots & d_1 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ a_3 & d_3 & d_3 & \dots & d_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & d_n & d_n & \dots & d_n \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & d_1 & \dots & d_1 \\ a_2 & d_2 & d_2 & \dots & d_2 \\ a_3 & d_3 & d_3 & \dots & d_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}.$$

Из этого соотношения будет следовать, что $\varphi(0) = 0$, так как во всех определителях справа окажется как минимум по два одинаковых столбца, и следовательно, все они будут равны нулю.

Далее, заметим также, что в соотношении (2) каждый из определителей справа содержит по одной строке с постоянными числами. Отсюда, и из правилы дифференцирования определителя, будет следовать, что $\varphi'(\lambda)$ будет содержать определители, в которых одна из строк нулевая (и, следовательно, они равны нулю), или две какие-то строки состоят из постоянных чисел, причем в последнем случае хотя бы в одной строке рядом окажутся числа 1 и -1. При подстановке $\lambda = 0$, справа окажутся определители одного из трех типов, а именно:

1. определители, в которых совпадают как минимум два столбца,
2. определители, в которых суммированием элементов двух соседних столбцов, в каждом из которых по соседству находятся числа 1 и -1, и вынесением 2-и, получим определители с двумя совпадающими столбцами.
3. определители, в которых суммированием элементов трех соседних столбцов, в двух из которых по соседству находятся числа 1 и -1, и, вынесением 3-и, получим в определителях вновь два совпадающих столбца.

В каждом из этих случаев полученные определители будут равны нулю. Отсюда будет следовать, что при $n > 1$ $\varphi'(0) = 0$. Продолжив рассуждения вышеизложенным способом, мы придем к заключению, что $\varphi^{(n-2)}(0)$ будет содержать определители одного из трех вышеуказанных типов, и, следовательно, все они будут равны нулю. Таким образом, мы показали, что кратность собственного значения $\lambda = 0$ матрицы A больше или равна $n-1$, что и требовалось доказать.

Заметим, что несложными вычислениями можно определить в характеристическом уравнении матрицы A и коэффициент при λ^{n-1} или, что то же самое значение $\frac{1}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)$, и, следовательно, согласно лемме 2, и вид характеристического уравнения матрицы A. Вышепроведенные рассуждения показывают, что при вычислении $\varphi^{(n-1)}(0)$, мы столкнемся с определителями вида

$$\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & \dots & d_1 & d_1 & \dots & d_1 \\ 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_к & d_к & \dots & d_k & d_к & \dots & d_к \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix},$$

в которых $n-2$ строчки содержат числа 0 и по соседству - 1 и -1, а две строки имеют вид $A_к = (a_к\ d_k\ d_k \dots d_k\ d_k)$. Нетрудно показать, что значение каждого из этих определителей можно представить в виде $(-1)^n k \cdot \begin{vmatrix} a_i & d_i \\ a_{i+1} & d_{i+1} \end{vmatrix}$, $k = 1,2,\dots,n-1;\ i = 1,2,\dots,n-1$.

И, следовательно, для $\varphi^{(n-1)}(0)$ будем иметь

$$\varphi^{(n-2)}(0) = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-k} k \cdot \begin{vmatrix} a_i & d_i \\ a_{i+k} & d_{i+k} \end{vmatrix}.$$

Обобщив проведенные рассуждения, получим, что характеристическое уравнении для матрицы A в рассматриваемом случае будет иметь вид

$$\det(A - \lambda E) = (-1)^n \lambda^{n-2}(\lambda^2 - b\lambda + c),$$

где

$$b = \sum_{k=1}^{n} \left(a_k + (k-1)d_k\right), \quad c = \frac{1}{(n-2)!}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-k} k \cdot \begin{vmatrix} a_i & d_i \\ a_{i+k} & d_{i+k} \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

Следствие 2. *Если элементы матрицы A, считая от первого элемента первой строки до последнего элемента последней (двигаясь по строкам), являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии, то множество собственных значений матрицы A содержит нуль (кратности $n-2$) и два действительных числа противоположных знаков.*

Действительно, предположим, что элементы матрицы A являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии с начальным членом равным a и с разностью d. Для определения характеристического уравнения, заметим, что в данном случае $a_k = a + (k-1)nd, \ d_k = d$, и, следовательно, согласно формулам (3), будем иметь

$$b = \sum_{k=1}^{n}\left(a_k + (k-1)d_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(a + (k-1)nd + (k-1)d\right) = na + \frac{(n-1)n(n+1)}{2}d,$$

$$c = \frac{1}{(n-2)!}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-k} k \cdot \begin{vmatrix} a_i & d_i \\ a_{i+k} & d_{i+k} \end{vmatrix} = \frac{1}{(n-2)!}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-k} k \cdot \begin{vmatrix} a+(i-1)nd & d \\ a+(i+k-1)nd & d \end{vmatrix} = -\frac{1}{(n-2)!}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-k} k^2 nd^2 =$$

$$= -\frac{n}{(n-2)!}d^2\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)k^2.$$

Следовательно, характеристическое уравнение для матрицы A в рассматриваемом случае можно представить в виде

$$\det(A - \lambda E) = (-1)^n \lambda^{n-2}\left(\lambda^2 - (na + m)\lambda + c\right),$$

где $m = \dfrac{(n-1)n(n+1)}{2}d, \ c = -\dfrac{nd^2}{(n-2)!}\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)k^2$, откуда и будет следовать утверждение следствия.

Теорема 1. *Если элементы каждой строки матрицы A являются последовательными членами некоторых арифметических прогрессий, то система* (1) *является неосциллирующей.*

Доказательство. Известно (см., например, [5]), что общее решение системы (1) можно представить в виде

$$\vec{\varphi}(t) = \sum_{k=1}^{m}\vec{g}_k(t)e^{\lambda_k t}, \qquad (4)$$

где $\lambda_k \ (k = 1,2,...,m)$ -отличные друг от друга собственные значения матрицы A, а координаты вектор-функции $\vec{g}_k(t)$ являются многочленами степени не выше $r_k - 1$, где r_k –кратность собственного значения λ_k. Согласно утверждению леммы 2, собственными значениями матрицы A будут 0 и некоторые числа λ_1 и λ_2. Тогда общее решение системы (1), согласно (4), можно записать в виде

$$\vec{\varphi}(t) = c_1\vec{p}_1e^{\lambda_1 t} + c_2\vec{p}_2e^{\lambda_2 t} + \vec{g}(t),$$

где $\vec{g}(t)$– вектор-функция, компоненты которой являются многочленами степени не выше $n-3$, c_1, c_2–произвольные постоянные, $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ –собственные векторы матрицы A, соответствующие собственным значениям λ_1 и λ_2. Очевидно, что при $t \to \infty$ компоненты $\vec{\varphi}(t)$ по модулю будут стремиться к бесконечности, и, следовательно, система не может быть осциллирующей.

Ниже приводится построенная в среде MathCad графическая интерпретация утверждения теоремы 1 для решения системы $\begin{cases} y_0' = y_0 + 7y_1 + 13y_2, \\ y_1' = 3y_0 + 10y_1 + 17y_2, \\ y_2' = 5y_0 + 6y_1 + 7y_2 \end{cases}$ при условии $y_0(0) = y_1(0) = y_2(0) =$.

$$\frac{d}{dt}y0(t) = y0(t) + \,'\cdot y1(t) + \,3\cdot y2(t) \qquad y0(0) = 1$$

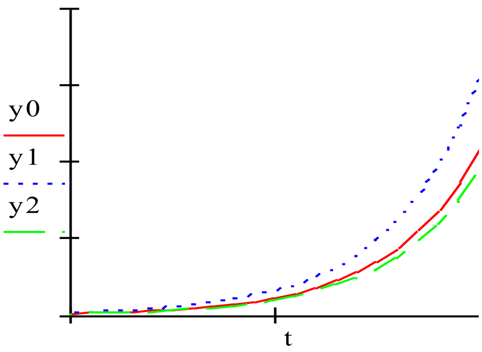
$$\frac{d}{dt}y1(t) = 3\cdot y0(t) + \,' y1(t) + \,5\, y2(t) \qquad y1(0) = 1$$

$$\frac{d}{dt}y2(t) = 5\, y0(t) + \,1\cdot y1(t) + \,7\cdot y2(t) \qquad y2(0) = 1$$

$$D(t, Y) := \begin{pmatrix} Y_0 + \,'\cdot Y_1 + \,3\cdot Y_2 \\ \cdot Y_0 + \,0 Y_1 + \,7\cdot Y_2 \\ 5\, Y_0 + \,;\cdot Y_1 + \,'\cdot Y_2 \end{pmatrix} \qquad t0 := 0 \qquad t1 := 10 \qquad Y0 := \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \qquad N := 100($$

$$S := Rkadapt(Y0, \,0, \,1, N, D)$$

$$t := S^{\langle\ \rangle} \qquad y0 := S^{\langle\ \rangle} \qquad y1 := S^{\langle\ \rangle} \qquad y2 := S^{\langle\ \rangle}$$



Литература

1. Butler G. J. Oscillation theorems for a non-linear analogue of Hill's equation, Quart. J. Math., 1976, 27, N106, 159-171.
2. Kinguradze I.T. On the oscillatory and monotone solutions of ordinary differential equations. Archivum Mathematicum, vol. 14 (1978), № 1, 21-44.
3. Chantladze T., Kandelaki N. and Lomtatidze A. Oscillation and nonoscillation criteria for a second order linear equation. Georgian Math. J. 6 (1999), № 5, 401-404.
4. Саакян Г.Г. О некоторых классах неосциллирующих однородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Ученые записки АрГУ, 1/2014, стр.3-10.
5. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. М.: Едиториал УРСС, 2007.
6. Ղազարյան Հ.Գ., Հովհաննիսյան Ա.Հ., Հարությունյան Տ.Ն., Կարապետյան Գ.Ա. Սովորական դիֆերենցիալ հավասարումներ: Զանգակ-97, Երևան-2002:
7. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Мир, 1970.

Сведения об авторе:

Георгий Саакян - кандидат физ-мат. наук, проректор по учебной части АрГУ.
E-mail: ter_saak_george@mail.ru

Статья рекомендована к печати членом редакционной коллегии, д.ф.м.н., А.М. Хачатряном.