

УДК.621.315

Փիզիկա

## ДВУХФОТОННЫЕ ЭЛЕКТРОДИПОЛЬНЫЕ ПЕРЕХОДЫ МЕЖДУ ДВУМЯ УРОВНЯМИ ТУННЕЛЬНО-СВЯЗАННЫХ КВАНТОВЫХ ТОЧЕК

**Ալբերտ ԱԼԵԿՏԱՆՅԱՆ, Արմեն ԱԼԵԿՏԱՆՅԱՆ,  
Գրաչիա ՆԻԿՈԳՕՏՅԱՆ, Վազե ԲՈՒՆԻԱՏՅԱՆ**

**Ключевые слова:** квантовая точка, туннельно-связанные, электрически дипольное взаимодействие, матричные элементы.  
**Բանալի բառեր**՝ քվանտային կետ, թունելային կապ, էլեկտրադիպոլային փոխազդեցություն, մատրիցական էլեմենտներ:  
**Key words:** quantum dot, tunnel-coupled, electric dipole interaction, matrix element.

**Վ.Բունիատյան, Ա.Ալեքսանյան, Հ.Նիկողոսյան, Ա.Ալեքսանյան  
Թունելային կապ ունեցող երկու քվանտային կետերի երկֆոտոնային էլեկտրադիպոլային անցումները**

Հաշված են թունելային կապով, ուժեղ սեղմված էլիպսոիդների  $\delta$  ն ունեցող երկու քվանտային կետերի (ԲԿ) ալիքային ֆունկցիաները և էներգիական մակարդակները: Որոշված են երկու ֆոտոնների էլեկտրադիպոլային փոխազդեցության մատրիցական էլեմենտները:

**A.Aleksanyan, Al. Aleksanyan, H.Nikoghosian, V.Buniatyan  
Two-photon Electric Dipole Transitions between Two Levels  
Tunnel-Coupled Quantum Dots**

*There were the wave functions and energy levels of the tunnel-coupled two quantum dots (QD) with strongly flattened ellipsoid shape calculated. The matrix elements in the electric dipole interaction of two photons were determined.*

*Вычисляются волновые функции и энергетические уровни двух туннельно-связанных квантовых точек (КТ), имеющих форму сильно сплюснутых эллипсоидов. Определены матричные элементы при электрически дипольном взаимодействии двух фотонов.*

1. Одним из актуальных направлений современной полупроводниковой оптоэлектроники является разработка источников лазерного излучения среднего и дальнего ИК диапазона длин волн  $\lambda \sim (5 \div 50)$  мкм. Лазерное излучение в этом диапазоне имеет множество применений в науке и технике. Примером могут послужить обнаружение химических веществ и биологических субстанций, мониторинг загрязнения окружающей среды, молекулярная спектроскопия, неинвазивная медицинская диагностика, разведка полезных ископаемых и др. В данном диапазоне длин волн излучают получившие известность так называемые каскадный [1] и фонтанный [2] лазеры.

Однако, большие потери на излучение фононов [3] делают их применение малоэффективными, т.к. их принцип действия основан на межподзонных переходах в тунельно-связанных квантовых ямах [4].

С другой стороны, исследования особенностей нелинейного взаимодействия электромагнитного излучения с веществом составляют основу современной оптики, позволяя не только получать информацию о фундаментальных особенностях этого взаимодействия, но и находить многочисленные практические применения. Среди широкого спектра нелинейно-оптических эффектов вынужденное комбинационное рассеяние (ВКР) света занимает исключительно важное место. Отметим, что комбинационное рассеяние света (КРС) является результатом взаимодействия в нелинейной среде между световым излучением и флуктуациями поляризации среды, вызванными колебаниями заряженных частиц. Такое взаимодействие приводит к обмену энергией между световой волной и средой, и к возникновению или усилению рассеянных световых волн. На их основе, например, созданы многочисленные преобразователи излучения, позволяющие осуществлять эффективное преобразование частоты исходного лазерного излучения в диапазоне от сотен до нескольких тысяч обратных сантиметров. Одним из способов увеличения эффективности нелинейно-оптического взаимодействия, в том числе ВКР света, является использование наноразмерных систем

[5], в том числе и квантовых точек (КТ) [6]. В работе [6] рассматривается резонансное ВКР, причем накачка производится с основного уровня валентной зоны на возбужденный уровень зоны проводимости с последующим измерением стока фотона. Однако, предложенная в [6] схема представляется не достаточно эффективной вследствие малости оптической силы осциллятора на частоте накачки.

Можно попытаться, ту же схему использовать для переходов между уровнями одной зоны. В этом случае, чтобы ВКР имело место на электрически дипольных переходах, необходимо, чтобы эти состояния имели противоположную четность. Но, для этого необходимо, чтобы в КТ помещалось четыре квантовых уровня. Однако в этой ситуации размеры КТ станут настолько большими, что КТ потеряет все свои преимущества по сравнению с квантовыми ямами.

2. В данной работе предлагается использовать структуру с парой туннельно-связанных КТ. Такая связь, как известно [7], приводит к расщеплению уровней на уровни с противоположной четностью. Это, в свою очередь, позволит в двухуровневой системе с одинаковой четностью осуществить переходы с участием двух фотонов при электрическом дипольном взаимодействии.

Целью данной работы является определение волновых функций и энергетических уровней двух туннельно-связанных КТ, имеющих форму сильно сплюснутых эллипсоидов.

Рассмотрим задачу определения квантовых состояний частицы внутри эллипсоида вращения с потенциальной энергией (рис.1)

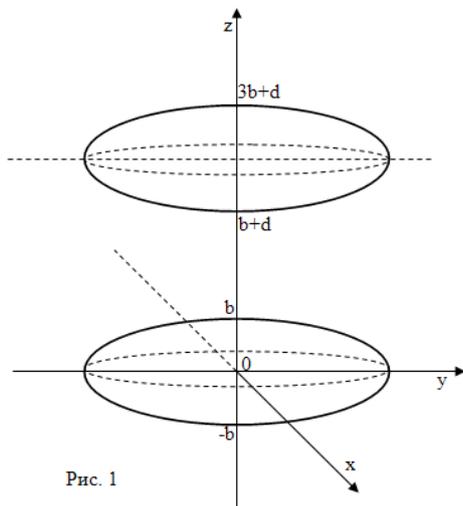


Рис. 1

$$U(x, y, z) = \begin{cases} 0, & \frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1 \\ V_0, & \frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} > 1 \end{cases} \quad \text{где } b \ll a \quad (1)$$

При условии  $b \ll a$  в адиабатическом приближении роль быстрой подсистемы играет движение частицы вдоль оси z, а роль медленной подсистемы — движение в плоскости (x, y).

Для быстрой подсистемы имеем следующее уравнение (при фиксированных значениях x и y)

$$E_{n_1}(x, y) \Psi_{n_1}(z, x, y) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + U(z, x, y) \right] \Psi_{n_1}(z, x, y) = \quad (2)$$

Последнее уравнение описывает движение в потенциальной яме с переменной шириной в направлении z и высотой  $V_0$ . Ширина ямы в направлении оси z для каждой

пары фиксированных x и y

$$\Delta z = 2b \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{a^2}}, \quad \text{где } \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ — радиус-вектор в плоскости } (x, y).$$

Решения уравнения (2) следует искать с учетом взаимодействия соседних квантовых ям.

Учет взаимодействия ям приводит к расщеплению уровней z-движений изолированной ямы:

$$E_{n_1}^{(-)} = E_{n_1}^{(0)} \left[ 1 - \frac{2}{\Delta z \chi_0} - \frac{4}{\Delta z \chi_0} e^{-\chi_0 d} \right], \quad \Psi_{n_1} = \frac{1}{\sqrt{\Delta z}} \sin K^{(-)}(2\Delta z + d - z), \quad \text{для нижних}$$

подуровней, где  $K^{(-)} = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE_{n_1}^{(-)}}$ ,  $\chi_0 = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E_{n_1}^0)}}{\hbar}$ ,  $E_{n_1}^0 = \frac{\hbar^2 \pi^2 (n_1)^2}{2m(\Delta z)^2}$ ,  $n_1 = 1, 2, 3 \dots$

и для верхних подуровней

$$E_{n_1'}^{(+)} = E_{n_1'}^{(0)} \left[ 1 - \frac{2}{\Delta z \chi_0} + \frac{4}{\Delta z \chi_0} e^{-\chi_0 d} \right], \quad \Psi_{n_1'} = -\frac{1}{\sqrt{\Delta z}} \sin K^{+}(2\Delta z + d - z),$$

где  $K^{+} = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE_{n_1'}^{(+)}}$ ,  $n_1' = 1, 2, 3 \dots$

Теперь производим усреднение движения медленной подсистемы. Движение медленной подсистемы характеризуется эффективной потенциальной энергией  $U(\rho)$  и описывается уравнением

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + U(\rho) \right\} \Phi_{n_1, n_2, n_3}(\rho) = E_{n_1 n_2} \Phi_{n_1 n_2}(\rho), \quad \text{где } U(\rho) = \begin{cases} E_{n_1}^{(\mp)}, & \rho < a \\ \infty, & \rho > a \end{cases}$$

т.е. имеем систему уравнений для медленного движения

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] + E_{n_1}^{(-)} \right\} \Phi_{n_1, n_2, n_3}(\rho) = E_{n_1, n_2, n_3} \Phi_{n_1, n_2, n_3}(\rho) \quad (3)$$

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] + E_{n_1}^{(+)} \right\} \Phi_{n_1', n_2', n_3'}(\rho) = E_{n_1', n_2', n_3'} \Phi_{n_1', n_2', n_3'}(\rho) \quad (4)$$

Рассмотрим уравнение (3). Для нижней части спектра (слабо возбужденные состояния)  $\rho \ll a$  имеем:

$$E_{n_1}^{(-)} = A + \frac{q\rho^2}{2}, \quad \text{где} \quad A = \frac{\hbar^2 \pi^2 (n_1)^2}{2m \cdot 4b^2} \left( 1 - \frac{1}{b\chi_{00}} [1 + 2e^{-\chi_{00}d}] \right)$$

$$q = \frac{\hbar^2 \pi^2 (n_1)^2}{2m \cdot 2b^2 a^2} \left( 1 - \frac{3}{2b\chi_{00}} [1 + 2e^{-\chi_{00}d}] \right).$$

Таким образом, уравнение (3) приводится к виду

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] + \frac{q\rho^2}{2} \right\} \Phi_{n_1, n_2, n_3}(\rho) =$$

$$= (E_{n_1, n_2, n_3} - A) \Phi_{n_1, n_2, n_3}(\rho) = \varepsilon \Phi_{n_1, n_2, n_3}(\rho) \quad (5)$$

здесь  $\varepsilon = \hbar\omega_1(N + 1)$ ,  $\omega_1 = \sqrt{\frac{q}{m}}$ ,

следовательно,  $E_{n_1 n_2 n_3} = \hbar\omega_1(N + 1) + A$ ,  $N=0, 1, 2, \dots$   $N = n_2 + n_3$   
соответствующие волновые функции

$$\Psi_{n_1, N}(x, y, z) \Phi_{n_1, n_2, n_3}(\rho) = \Psi_{n_1}(z; x, y) \Psi_{n_2}^{(ocy)}(x) \Psi_{n_3}^{(ocy)}(y), \text{ где}$$

$$\Psi_n^{(ocy)}(\xi) = N_n e^{-\xi^2/2} H_n(\xi), \quad N_n = [\sqrt{\pi} n! 2^n]^{-1/2}$$

$$\xi = x \sqrt{\frac{m\omega_1}{\hbar}}, \quad \left( \xi = y \sqrt{\frac{m\omega_1}{\hbar}} \right), \quad n = \{n_2\}$$

Теперь рассмотрим уравнение (4). Для нижней части спектра ( $\rho \ll a$ ) имеем:

$$E_{n_1}^{(+)} = B + \frac{P\rho^2}{2}, \text{ где} \quad B = \frac{\hbar^2 \pi^2 (n_1')^2}{2m \cdot 4b^2} \left( 1 - \frac{1}{b\chi'_{00}} [1 - 2e^{-\chi'_{00}d}] \right),$$

$$P = \frac{\hbar^2 \pi^2 (n_1')^2}{2m \cdot 2b^2 a^2} \left( 1 - \frac{3}{2b\chi'_{00}} [1 - 2e^{-\chi'_{00}d}] \right). \quad \text{Здесь} \quad \chi'_{00} = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m \left( V_0 - \frac{\hbar^2 \pi^2 (n_1')^2}{2m \cdot 4b^2} \right)}.$$

Как и для (3) уравнение (4) приводится к виду

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] + \frac{P\rho^2}{2} \right\} \Phi_{n_1', n_2', n_3'}(\rho) =$$

$$= (E_{n_1', n_2', n_3'} - B) \Phi_{n_1', n_2', n_3'}(\rho) = \varepsilon' \Phi_{n_1', n_2', n_3'}(\rho) \quad (6)$$

$\varepsilon' = \hbar\omega_2(N' + 1)$ ,  $\omega_2 = \sqrt{\frac{P}{m}}$ . Следовательно

$$E_{n_1', n_2', n_3'} = \hbar\omega_2(N' + 1) + B, \quad N' = n_2' + n_3' \quad N' = 0, 1, 2, \dots$$

соответствующие волновые функции

$$\Psi_{n_1', N'}(x, y, z) = \Psi_{n_1'}(z; x, y) \Phi_{n_1', n_2', n_3'}(\rho), \text{ где} \quad \Phi_{n_1', n_2', n_3'}(\rho) = \Psi_{n_2'}^{(ocy)}(x) \Psi_{n_3'}^{(ocy)}(y).$$

Рассмотрим внутризонный двухфотонный переход  $|1\rangle \rightarrow |k\rangle \rightarrow |2\rangle$ .

Для нижней части спектра ( $\rho \ll a$ ) волновые функции быстрой подсистемы можно представить в виде

$$\Psi_{n_1}(z; x, y) \approx \frac{1}{\sqrt{2b}} \text{sink}_{00}^{(-)}(4b + d - z) \quad (7)$$

$$\Psi_{n_1'}(z; x, y) \approx -\frac{1}{\sqrt{2b}} \text{sink}_{00}^{(+)}(4b + d - z), \quad (8)$$

$$\text{где} \quad k_{00}^{(+)} = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m \frac{\hbar^2 \pi^2 (n_1')^2}{2m \cdot 4b^2} \left( 1 - \frac{1}{b\chi'_{00}} [1 - 2e^{-\chi'_{00}d}] \right)}$$

Используя (7) и (8) находим соответственно выражение для матричных элементов  $\langle 1|\hat{p}|k\rangle$  и  $\langle k|\hat{p}|2\rangle$

$$\begin{aligned}
 \langle 1|\hat{p}|k\rangle &= -i\hbar \int_0^{2b} \Psi_{n_1=1}^*(z) \frac{\partial}{\partial z} \Psi_{n_1=k}(z) dz = \\
 &= -\frac{i\hbar}{2b} \int_0^{2b} \sin k_{00}^{(-)}(4b+d-z) k_{00}^{(+)} \cos k_{00}^{(+)}(4b+d-z) dz = \\
 &= \frac{2\sin\left[\left(k_{00}^{(+)} + k_{00}^{(-)}\right)(3b+d)\right] \sin\left[\left(k_{00}^{(+)} + k_{00}^{(-)}\right)b\right]}{2\left(k_{00}^{(+)} + k_{00}^{(-)}\right)} - \\
 &\quad - \frac{2\sin\left[\left(k_{00}^{(+)} - k_{00}^{(-)}\right)(3b+d)\right] \sin\left[\left(k_{00}^{(+)} - k_{00}^{(-)}\right)b\right]}{2\left(k_{00}^{(+)} - k_{00}^{(-)}\right)} \quad (9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{здесь } k_{00}^{(-)} &= \frac{\pi}{2b} \sqrt{1 - \frac{1}{b\chi_{00}} [1 + 2e^{-\chi_{00}d}]}, & k_{00}^{(+)} &= \frac{\pi k}{2b} \sqrt{1 - \frac{1}{b\chi'_{00}} [1 - 2e^{-\chi'_{00}d}]} \\
 \chi_{00} &= \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m\left(V_0 - \frac{\hbar^2}{8mb^2} \pi^2\right)}, & \chi'_{00} &= \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m\left(V_0 - \frac{\hbar^2}{8mb^2} \pi^2 k^2\right)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle k|\hat{p}|2\rangle &= -i\hbar \int_0^{2b} \Psi_{n_1=k}^*(z) \frac{\partial}{\partial z} \Psi_{n_1=2}(z) dz = \\
 &= -\frac{i\hbar}{2b} \int_0^{2b} \sin k_{001}^{(-)}(4b+d-z) k_{001}^{(+)} \cos k_{001}^{(+)}(4b+d-z) dz = \\
 &= \frac{2\sin\left[\left(k_{001}^{(+)} + k_{001}^{(-)}\right)(3b+d)\right] \sin\left[\left(k_{001}^{(+)} + k_{001}^{(-)}\right)b\right]}{2\left(k_{001}^{(+)} + k_{001}^{(-)}\right)} - \\
 &\quad - \frac{2\sin\left[\left(k_{001}^{(+)} - k_{001}^{(-)}\right)(3b+d)\right] \sin\left[\left(k_{001}^{(+)} - k_{001}^{(-)}\right)b\right]}{2\left(k_{001}^{(+)} - k_{001}^{(-)}\right)} \quad (10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{здесь } k_{001}^{(-)} &= \frac{\pi k}{2b} \sqrt{1 - \frac{1}{b\chi_{00}} [1 + 2e^{-\chi_{00}d}]} & k_{001}^{(+)} &= \frac{\pi}{b} \sqrt{1 - \frac{1}{b\chi'_{00}} [1 - 2e^{-\chi'_{00}d}]} \\
 \chi_{00} &= \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m\left(V_0 - \frac{\hbar^2}{8mb^2} \pi^2 k^2\right)} & \chi'_{00} &= \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m\left(V_0 - \frac{\hbar^2}{2mb^2} \pi^2\right)}
 \end{aligned}$$

Имея ввиду (9) и (10), находим дипольный момент  $\mu_{12}$ , связанный с переходами в двухуровневой системе с участием двух фотонов:

$$|\mu_{12}|^2 = \left| -\frac{1}{\hbar} \sum_k \frac{\langle 1|\hat{p}|k\rangle \langle k|\hat{p}|2\rangle}{\omega_{2k} + \omega} + \frac{\langle 1|\hat{p}|k\rangle \langle k|\hat{p}|2\rangle}{\omega_{1k} - \omega} \right|^2$$

3. Таким образом, показано, что туннельная связь КТ позволяет снять запрет на электрически дипольные переходы в двухуровневой системе с участием двух фотонов. Это, по всей видимости, позволит осуществить ВКР в подобных структурах. Получены выражения для матричных элементов, описывающих эти переходы.

### Литература

1. J.Faist, F.Capasso, et.al, Science 2634, 533 (1994)
2. O.Gauthier-Lafaye, P.Boucaud et.al. Appl.Phys.Lett., 71, 3619 (1997)
3. А.Г.Алексян, Ал.Г.Алексян, Г.С.Никогосян. Известия НАН РА, Физика т.27, с.1007, 1992
4. A.Kastalsky, L.E.Vorobyev, et.al. IEEE J.Qunt. Elektron 37. 1356 (2001)
5. A.G.Alexanian, Al.G.Alexsanian, H.S.Nikogosian. International conference of Superlatives, Microstructures and Microdevices (ICSMM-6) August 4-7, 1992, China PR Xian.

6. Ал.Г.Алексян. Вынужденное комбинационное рассеяние квантовыми точками в условиях резонансного увеличения локального поля. Уч. записки АрГУ, 2003 (6-7), с.5-11.  
7. В.М. Галицкий, Б.М.Карнаков, В.И.Когон. Задачи по квантовой механике. М.1981,с.72.

**Сведения об авторах:**

**Альберт Алексян**, д.ф.м.н., професоор АрГУ

**E-mail:** [alalbert@inbox.ru](mailto:alalbert@inbox.ru)

**Армен Алексян**, аспирант АрГУ

**E-mail:** [alex.armen88@gmail.com](mailto:alex.armen88@gmail.com)

**Грациа Никогосян** - к.ф.м.н., доцент, Гюмрийский государственный педагогический институт

**E-mail:** [hrach1960@mail.ru](mailto:hrach1960@mail.ru)

**Ваге Буниятян** - д.т.н. профессор, НПУА (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ АРМЕНИИ)

**E-mail:** [vbuniat@seua.am](mailto:vbuniat@seua.am)

Статья рекомендована к печати членом редакционной коллегии, д.ф.м.н., А.М. Хачатрянном.