ՀՏԴ 512.371 Մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկա

ՏԱՐԲԵՐ ԵՂԱՆԱԿՆԵՐՈՎ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԵԹՈԴԱԿԱՆ ՆՊԱՏԱԿԱՀԱՐՄԱՐՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ալեքսանդր ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ, Գուրգեն ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

Բանալի բառեր. *խնդիրների լուծում, խնդիրների լուծման եղանակներ, առանցքային խնդիր, լուծման մոտեցում, խնդրի լուծման մեթոդիկա, եռանկյունաչափական հավասարում, հիմնական բանաձևեր:*

Ключевые слова: *решение задач, способ решения задач, ключевая задача, подход к решению, методика решения задач, тригонометрическое урвнение, основные формулы.*

Key words: *problem solving, way of solving problems, the main problem, approach to the solution, methods of solving problems, trigonometric equation, basic formulas.*

О МЕТОДИЧЕСКОЙ ЦЕЛЕСООБРАЗНОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ РАЗНЫМИ СПОСОБАМИ

А. М .Хачатрян, Г. М. Хачатрян

В работе рассматривается вопрос о целесобразности решения задач школьного курса математики разными способами. Больше, чем десятью способами решено одно несложное тригонометрическое уравнение, что позволяет повторить с учащимися не только методы решения тригонометрических уравнений, но и оновные формулы тригонометрии. Показано, каким образом применение различных методов и приомов влияет на усвоение учебного материала и способствует развитию гибкости мышления учащихся.

ON THE METHODOLOGICAL EXPEDIENCY OF SOLVING PROBLEMS IN DIFFERENT WAYS.

A. M. Khachatryan, Г. M. Khachatryan

The paper considers the question of the feasibility of solving the problems of the school course of mathematics in various ways. More than ten ways solve one simple trigonometric equation, which allows you to repeat with the students not only the methods of solving trigonometric equations, but also the basic formulas of trigonometry. It is shown how the application of various methods and primes influences the assimilation of educational material and promotes the development of students' thinking flexibility.

Աշխատանքում դիտարկվում է դպրոցական դասընթացի խնդիրների տարբեր եղանակներով լուծման նպատակահարմարության հարցը: Մեկ տասնյակից ավելի եղանակներով լուծված է ոչ բարդ եռանկյունաչափական մեկ հավասարում, որը հնարավորություն է տալիս ոչ միայն սովորողների հետ կրկնելու եռանկյունաչափական հավասարումների լուծման մեթոդները, այլև եռանկյունաչափության հիմնական բանաձևերը: Ցույց է տրված, թե ինչպես է տարբեր մեթոդների և հնարքների կիրառումը ազդում ուսումնական նյութի յուրացմանը և նպաստում սովորողների ճկուն մտածողության զարգացմանը:

Ավելի լավ է լուծել մեկ խնդիր տարբեր մեթոդներով,
քան մի քանի խնդիր ՝ մեկ մեթոդով:
Դ. Պոյա

Խնդիրների լուծումը տարբեր մեթոդներով ունի կարևոր մեթոդական նշանակություն և մեծ հնարավորություններ է ընձեռում մաթեմատիկայի ուսուցման պրոցեսի կատարելագործման համար [1-2]:

Առաջինը, խնդիրների լուծման եղանակների փնտրումը ուսումնական պրոցեսի յուրացման գիտակցական և ակտիվության դիդակտիկական սկզբունքների իրականացման էֆեկտիվ ճանապարհներից մեկն է: Միևնույն խնդրի տարբեր մեթոդներով լուծման ժամանակ հաճախ սովորողներին ծանոթ վարժությունը ներկայանում է որակապես նոր պայմաններով, կրկնվում նոր կապերով ու համակցությամբ:

Երկրորդը, խնդրի լուծումը տարբեր եղանակներով սովորողներին հարկ է լինում օգտագործել շատ տեսական գիտելիքներ, մեթոդներ ու հնարքներ, վերլուծել դրանք տվյալ խնդրի տրված վիճակում կիրառելիության տեսակետից, ինչը նպաստում է մտածողության ճկունության ձևավորմանը:

Երրորդը, մի խնդրի լուծման տարբեր եղանակների փնտրման պրոցեսում գերիշխում է ստեղծագործական մտածողությունը, ինչը նպաստում է սովորողների ինտելեկտի զարգացմանը:

Բացի դրանից, տարբեր եղանակներով խնդիրների լուծումը ուղղված է նաև սովորողների գեղագիտական դաստիարակությանը: Հատկապես այստեղ դպրոցականները սովորում են ինքնուրույն գտնել խնդրի ավելի պարզ ու գեղեցիկ լուծումներ, սկսում են տեսնել մաթեմատիկայի տարբեր բաժինների փոխադարձ կապերը, մաթեմատիկա գիտության գեղեցկությունը:

Խնդրի լուծումը տարբեր եղանակներով միանգամայն բնականորեն միահյուսվում է դասերի անցկացման պրոցեսին: Նկատվել է, որ ծրագրի որև բաժնի ընդհանուր կրկնության ժամանակ նպատակահարմար է օգտագործել խնդիրներ, որոնք լուծվում են տարբեր եղանակներով և ընդգրկում են տեսական մեծ նյութ: Օրինակ, “Եռանկյունաչափական հավասարումներ” թեմայով ընդհանուր կրկնության ժամանակ շատ էֆեկտիվ է

$$sinx + cosx = 1 \qquad (1)$$

հավասարման լուծման հնարավորինս շատ եղանակներով լուծումներ գտնելը: Միայն այս առաջադրանքի լուծմամբ սովորողների հետ հնարավոր կլինի կրկնել ոչ միայն եռանկյունաչափական հավասարումների լուծման մեթոդները, այլև եռանկյունաչափության հիմնական բանաձևերը, իսկ հետագայում ներգրավել այլ բաժինների խնդիրներ:

Մանկավարժական պրակտիկայում հայտնի է պարապմունքի այնպիսի ձև, ինչպիսինն է “Հիմնարար խնդիրների լուծման դաս”, որը հենվում է հենց ոչ մեծաքանակ խնդիրների տարբեր եղանակներով լուծման վրա:

Ներկայացնենք (1) հավասարման լուծման տարբեր եղանակներ:

I եղանակ : (1) հավասարումն իրենից ներկայացնում է

$$asinx + bcosx = c \qquad (2)$$

հավասարման մասնավոր դեպքը, երբ $a = b = c = 1$: Դպրոցական դասընթացից հայտնի է, որ (2) հավասարումը կարելի է լուծել լրացուցիչ անկյուն մուծելու եղանակով [3].

$$sin\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

կամ որ նույնն է՝ $tg\varphi = \frac{a}{b}$ և $\varphi = arctg\frac{a}{b}$:

Արդյունքում (2) հավասարումը բերվում է

$$cos(x-\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad (3)$$

տեսքի: Եթե $\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \leq 1$ (3) հավասարումն ունի լուծում, իսկ եթե $\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}} > 1$, լուծում չունի: (1) հավասարման դեպքում ունենք

$$tg\varphi = 1, \varphi = \frac{\pi}{4}, \ \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

և (3) հավասարումը բերվում է

$$cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad (4)$$

հավասարման, որի լուծումն է

$$x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

Այստեղից՝

$$x = 2\pi k, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \ k \in Z \qquad (5)$$

Նշենք, որ հետագա գրություններում ևս, թեպետ չի նշվում, $k \in Z$ և $n \in Z$:

II եղանակ: (2), հետևաբար, և (1) հավասարման լուծման մյուս հայտնի եղանակը հետևյալ տեղադրությունն է.

$$\sin x = \frac{2\text{tg}\frac{x}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{x}{2}}, \qquad \cos x = \frac{1-\text{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{x}{2}}$$

Տեղադրելով (1) հավասարման մեջ ոչ բարդ ձևափողություններից հետո ստանում ենք

$$\text{tg}\frac{x}{2}\left(\text{tg}\frac{x}{2}-1\right)=0$$

$$\text{tg}\frac{x}{2}=0 \text{ կամ } \text{tg}\frac{x}{2}=1,$$

Բնականաբար, նորից ստանում ենք (4) լուծումները՝

$$x=2\pi k,\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$$

III եղանակ: Դիմենք բերման բանաձևերի օգնությանը և (1) հավասարումը ներկայացնենք հետևյալ տեսքերց մեկով.

ա) $\sin x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=1 \Leftrightarrow 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

բ) $\cos x+cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=1 \Leftrightarrow 2\cos\frac{\pi}{4}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Երկու դեպքերում էլ (1) հավասարումը բերվեց (4) հավասարմանը, որի լուծումն ունի (5) տեսքը:

IV եղանակ: (1) հավասարման երկու կողմը բարձրացնենք քառակուսի: Այստեղ պետք է հաշվի առնել այն հանգամանքը, որ (1) հավասարման ձախ մասը կարող է ընդունել ինչպես դրական, այնպես էլ բացասական արժեքներ: Հետևաբար, քառակուսի բարձրացման գործողության ժամանակ կարող են առաջանալ ավելորդ արմատներ: Իրոք՝

$$(\sin x+\cos x)^2=1 \Leftrightarrow 1+2\sin x\cos x=1 \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \cos x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi n\\ x=\frac{\pi}{2}+\pi n\end{array}\right.$$

Դեն նետելով քառակուսի բարձրացման արդյունքում առաջացած $x=\pi+2\pi n$ և $x=\frac{3\pi}{2}+2\pi n$ ավելորդ լուծումները, կստանանք (5) լուծումները;

V եղանակ: (1) հավասարությունը տեղի ունի, եթե

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin x=0\\ \cos x=1\end{cases}\\ \begin{cases}\sin x=1\\ \cos x=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\pi n\\ x=2\pi k\end{cases}\\ \begin{cases}x=\frac{\pi}{2}+2\pi k\\ x=\frac{\pi}{2}+\pi n\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\pi k\\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi k\end{array}\right.$$

VI եղանակ: (1) հավասարումը ներկայացնենք

$$sinx=1-cosx$$

տեսքով, իսկ վերջինիս ձևափոխությամբ ստանում ենք.

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\sin^2\frac{x}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\frac{x}{2}=0\\ \text{tg}\frac{x}{2}=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\pi k\\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi k\end{array}\right.$$

VII եղանակ: (1) հավասարումը ներկայացնենք

$$\sin x+\cos x=\sin^2 x+\cos^2 x$$

տեսքով և ձևափոխենք այն

$$\sin x(1-\sin x)+\cos x(1-\cos x)=0$$

տեսքի: Օգտվելով եռանկյունաչափության հայտնի բանաձևերից, կունենանք.

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}(1-\sin x)+2\cos x\sin^2\frac{x}{2}=0$$

$$2\sin\frac{x}{2}\left[\cos\frac{x}{2}-\left(\sin x\cos\frac{x}{2}-\cos x\sin\frac{x}{2}\right)\right]=0$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin\frac{x}{2}=0\\ \cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\frac{x}{2}=0\\ tg\frac{x}{2}=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\pi k\\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi k\end{array}\right.$$

VIII եղանակ: (1) հավասարումը ներկայացնենք

$$\sqrt{1-\cos^2 x}=1-\cos x$$

տեսքով և ձևափոխենք այն հետևյալ կերպ

$$1-cos^2 x=(1-\cos x)^2$$
$$1-\cos^2 x=1-2\cos x+\cos^2 x$$
$$\cos^2 x-\cos x=0$$

Ստանում ենք

$$\left[\begin{array}{l}\cos x=1\\ \cos x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\pi k\\ x=\frac{\pi}{2}+\pi n\end{array}\right.$$

Վերցնում ենք միայն $x=2\pi k, x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ արժեքները:

IX եղանակ: (1) հավասարումը կարելի է ներկայացնել նաև

$$\sqrt{1-\sin^2 x}=1-\sin x$$

տեսքով և կատարելով նախորդ եղանակում կատարված ձևափոխությունները, կունենանք

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi n\\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi k\end{array}\right.$$

Վերցնում ենք միայն $x=2\pi k, x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ արժեքները:

X եղանակ: (1) հավասարման երկու կողմը բազմապատկենք $\sin x\neq 0$ -ով: Ձևափոխությունների արդյունքում կստանանք

$$\sin^2 x+\sin x\cos x=\sin x\Leftrightarrow 1-\cos^2 x-\sin x\,(1-\cos x)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(1-\cos x)(1+\cos x-\sin x)=0\Leftrightarrow$$
$$\left[\begin{array}{c}1-\cos x=0\\ 1+\cos x-\sin x=0\end{array}\right.$$

Լուծելով համախմբի առաջին հավասարումը, կստանանք

$$\cos x=1\,, x=2\pi k$$

Օգտվելով համախմբի երկրորդ և ելակետային հավասարումներից կունենանք

$$\begin{cases}\cos x-\sin x=-1\\ \cos x+\sin x=1\end{cases}$$

Բազմապատկելով համակարգի հավասարումների աջ և ձախ մասերը, կստանանք

$$\cos 2x=-1\,, x=\frac{\pi}{2}+\pi n$$

Վերցնում ենք միայն $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ արժեքները:

XI եղանակ: (1) հավասարման երկու կողմը բազմապատկենք $\cos x\neq 0$-ով: Ձևափոխությունների արդյունքում կստանանք

$$\cos^2 x+\sin x\cos x=\cos x\Leftrightarrow 1-sin^2 x-\cos x(1-\sin x)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(1-\sin x)(1+\sin x-\cos x)=0\Leftrightarrow$$
$$\left[\begin{array}{c}\sin x=1\\ 1+\sin x-\cos x=0\end{array}\right.$$

Լուծելով համախմբի առաջին հավասարումը, կստանանք

$$\sin x=1\,, x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$$

Օգտվելով համախմբի երկրորդ և ելակետային հավասարումներից, կունենանք

$$\begin{cases}\cos x-\sin x=1\\ \cos x+\sin x=1\end{cases}$$

Գումարելով համակարգի հավասարումների աջ և ձախ մասերը, կստանանք

$$\cos x=1\,, x=2\pi k$$

XII եղանակ: (1) հավասարման երկու կողմը բաժանենք $\sin x\neq 0$-ի վրա կունենանք

$$1+\mathrm{ctg}x=\frac{1}{\sin x}\Leftrightarrow(1+\mathrm{ctg}x)^2=\frac{1}{\sin^2 x}$$

Օգտվելով

$$\frac{1}{\sin^2 x}=1+\mathrm{ctg}^2 x$$

նույնությունից, կստանանք

$$1+2\text{ctg}x+\text{ctg}^2x=1+\text{ctg}^2x \Leftrightarrow \text{ctg}x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi n$$

Վերցնում ենք միայն $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ արժեքները:

Եթե $\sin x=0$, ապա $x=\pi n$: Վերցնում ենք միայն $x=2\pi k$ արժեքները:

XIII եղանակ: (1) հավասարման երկու կողմը բաժանենք $\cos x \neq 0$-ի վրա կունենանք

$$1+\text{tg}x=\frac{1}{\cos x} \Leftrightarrow (1+\text{tg}x)^2=\frac{1}{\cos^2 x}$$

Օգտվելով

$$\frac{1}{\cos^2 x}=1+\text{tg}^2x$$

նույնությունից, կստանանք

$$1+2\text{tg}x+\text{tg}^2x=1+\text{tg}^2x \Leftrightarrow \text{tg}x=0 \Leftrightarrow x=\pi n$$

Վերցնում ենք միայն $x=2\pi k$ արժեքները:

Եթե $\cos x=0$, ապա $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$: Վերցնում ենք միայն $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ արժեքները:

XIV եղանակ: (1) հավասարումը ներկայացնենք

$$\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}+\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}=1$$

տեսքով և հավասարման երկու կողմը բարձրացնենք քառակուսի: Կստանանք

$$\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1+\cos 2x}{2}+2\sqrt{\frac{1-cos^2 2x}{4}}=1$$

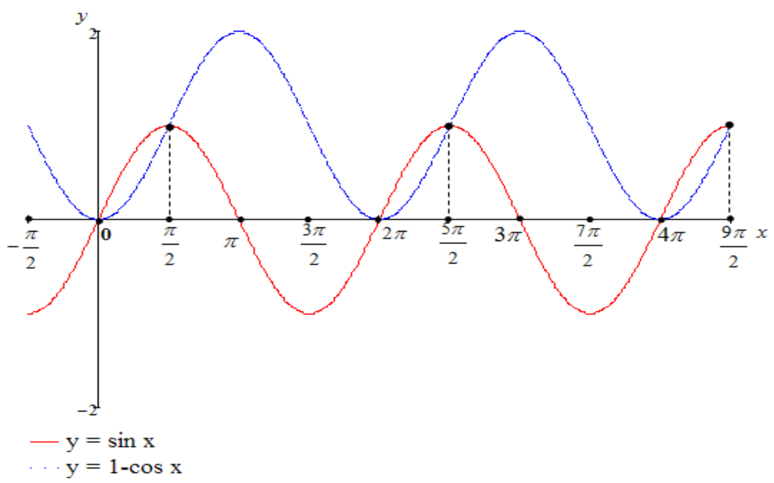
որը բերվում է $\sin 2x=0$ հավասարման, որի ընդհանուր լուծումն է

$$2x=\pi n \Leftrightarrow x=\frac{\pi n}{2}$$

Դեն նետելով քառակուսի բարձրացման արդյունքում առաջացած ավելորդ լուծումները, կստանանք $x=2\pi k$ և $=\frac{\pi}{2}+2\pi k$:

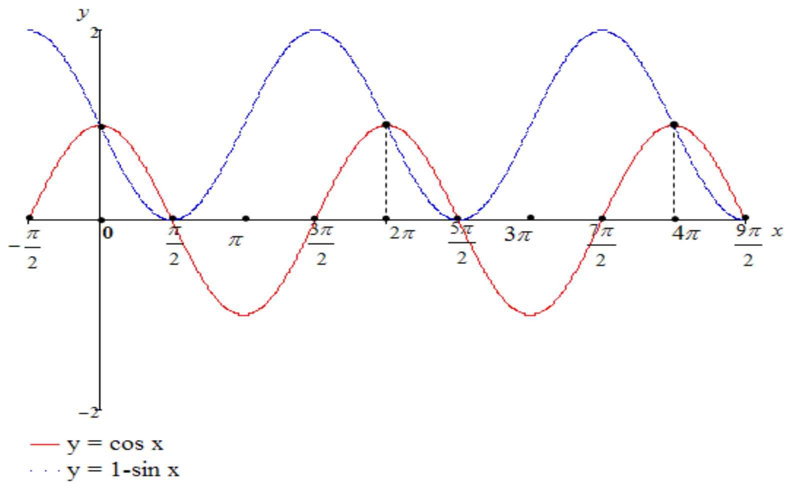
XV եղանակ: (1) հավասարումը կարելի լուծել նաև *գրաֆիկական եղանակով*:

ա) Նախ այն ներկայացնենք $\sin x=1-\cos x$ տեսքով, այնուհետև կառուցենք $y=\sin x$ և $y=1-\cos x$ ֆունկցիաների գրաֆիկները: Հարմար է դիմել համակարգչի օգնությանը: Գրաֆիկների հատման կետերի աբցիսները կլինեն (1) հավասարման լուծումները (նկ.1):



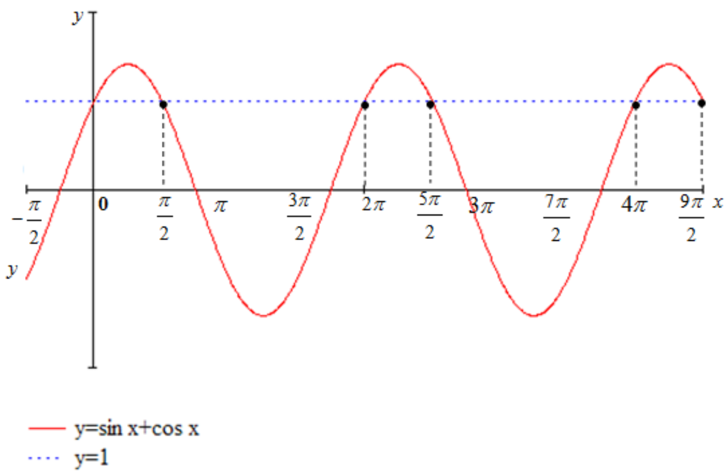
Նկ. 1

բ) (1) հավասարումը կարելի ներկայացնել նաև $\cos x=1-\sin x$ տեսքով: Այս դեպքում պետք է կառուցել $y=\cos x$ և $y=1-\sin x$ ֆունկցիաների գրաֆիկները: Նորից գրաֆիկների հատման կետերի աբցիսները կլինեն (1) հավասարման լուծումները (նկ.2):



Նկ. 2

գ) Հավասարումը գրաֆիկական եղանակով կարելի լուծել կառուցելով $y = \sin x + \cos x$ և $y = 1$ ֆունկցիաների գրաֆիկները: Գրաֆիկների հատման կետերի աբցիսները կլինեն (1) հավասարման լուծումները (նկ.3):



Նկ. 3

Նշենք, որ նկ.1-3 –ում պտկերված են առաջին վեց արմատները

Գրականություն

1. Колягин Ю.М., Луканкин Г.Л., Мокрушин Е.Л., Оганесян В.А., Пинчурин Л.Я., Саннинский В.Я. Методика преподавания математики в средней школе. Частные методики. М.: Просвещение, 1977.-480с.

2. Блох А.Я., Канин Е.С., Килина Н.Г., Копылов В.С., Крупич В.И., Лускина М.Г., Павленкова И.А., Семаков В.С., Столяр А.А., Терешин И.А.Черкасов Р.С., Чиканцева Н.И. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика. М.: Просвещение, 1985.-336с.

3. Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա. Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզ: Ավագ դպրոցի 10-րդ դասարանի դասագիրք (բնագիտական հոսքի համար).- Եր.: Տիգրան Մեծ, 2009.- 208 էջ:

Տվյալներ հեղինակների մասին.

Ալեքսանդր Մովսեսի Խաչատրյան, ֆ.մ.գ.դ., ԱրՊՀ մաթեմատիկայի ամբիոնի պրոֆեսոր
Հասցեն. ԱՀ, ք.Ստեփանակերտ, Մխիթար գոշի փող., 5
E-mail: alexkhach49@yandex.ru

Գուրգեն Մովսեսի Խաչատրյան, ֆ.մ.գ.թ., Շուշիի տեխնոլոգիական համալսարան
Հասցեն. ԱՀ, ք. Շուշի, Աշոտ Բեկորի փող., 4

Հոդվածը տպագրության է երաշխավորել խմբագրական կոլեգիայի անդամ, ֆ.մ. գ.դ. Ա.Մ. Խաչատրյանը: