ՀՏԴ 512.1: 371 *Մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկա*

ԵՐԵՍՈՒՆՎԵՑ ԱՍՏԻՃԱՆԻ ՀԱՎԱՍԱՐ ԱՆԿՅԱՆ ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԱՇՎՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ալեքսանդր ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ, Կարինե ՄԱՐՈՒԹՅԱՆ

Բանալի բառեր. *երեսունվեց աստիճան, եռանկյունաչափական ֆունկցիաներ, եռանկյունաչափական մեթոդ, երկրաչափական մեթոդ, ֆիզիկական իմաստ:*

Ключевые слова: *тридцатьшесть градусов, тригонометрические функции, тригонометрический метод, геометрический метод, физический смысл.*

Keywords: *thirtysix degrees, trigonometrical functions, trigonometrical method, geometrical method, physical meaning.*

А. Хачатрян, К.Марутян

О РАСЧЕТЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ УГЛА РАВНОГО ТРИДЦАТИ ШЕСТИ ГРАДУСАМ

Работа посвящена определению тригонометрических функций угла 36 градуса. Дело в том, что тригонометрические функции от этого угла получаются с помощью других приемов. Используя разные тригонометрические и геометрические подходы, приведены некоторые методы определения тригонометрических функций угла 36 градуса. В одном случае приведен физический смысл задачи. Имея значения тригонометрических функций угла 36 градуса, не трудно вычислить значения тригонометрических функций 18 и 72 градусов.

A.Khachatryan, K. Marutyan

ON DETERMINATION OF TRIGONOMETRIC FUNCTIONS OF THIRTY SIX DEGREES ANGLE

The article is devoled to the determination of trigonometrical functions of 36 degrees. The point is that trigonometrical functions from this angle come with the help of different methods. Using trigonometrical and geometrical different methods. Several methods of determination of trigonometrical functions of 36 degrees are given and in one case the physical meaning of a task is given. When we have values of trigonometrical functions of 36 degrees angle we can also find values of trigonometrical functions of 18 and 72 degrees angles.

Աշխատանքը նվիրված է երեսունվեց աստիճանի անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաների հաշվմանը: Այս անկյան եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արժեքների հաշվման համար անհրաժեշտ են այլ հնարքներ: Օգտագործելով եռանկյունաչափական և երկրաչափական տարբեր մոտեցումներ, բերված են երեսունվեց աստիճանի եռանկյունաչափական ֆունկցիաների հաշվման մի քանի մեթոդներ: Մի մոտեցման դեպքում բերված է խնդրի ֆիզիկական իմաստը: Ունենալով երեսունվեց աստիճանի եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արժեքները դժվար չէ գտնել 18 և 72 աստիճանի եռանկյունաչափական ֆունկցիաների արժեքները:

Եռանկյունաչափական մոտեցում

1. Օգտվելով նրանից, որ 2α և 3α (72^0 և 108^0) (այստեղ և այնուհետև ընդունվում է, որ $\alpha = \frac{\tau}{5}$) անկյունները եռանկյունաչափական շրջանի մեջ համաչափ (սիմետրիկ) են ուղղահայաց առանցքի նկատմամբ, բերման բանաձևերից կունենանք [1]

$$\sin 2\alpha = \sin 3\alpha \qquad (1)$$

Լուծենք (1) հավասարումը, օգտվելով կրկնակի և եռակի անկյունների համար եռանկյունաչափական ֆունկցիաների բանաձևերից՝

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha; \quad \sin 3\alpha = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha$$

Կունենանք

$$2\sin\alpha\cos\alpha = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha$$

Քանի որ մեզ հետաքրքրում է 36^0 անկյունը, ապա $\sin\alpha \neq 0$: Ստացված հավասարման երկու կողմը բաժանենք $\sin\alpha$-ի վրա, կստանանք

$$2\cos\alpha = 3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

կամ

$$4\cos^2\alpha - 2\cos\alpha - 1 = 0 \qquad (2)$$

(2) հավասարման լուծումն է

$$\cos\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \qquad (3)$$

Երկրորդ լուծումը՝ $\cos\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{4} < 0$: Այս և (2) հավասարման (3)-ից տարբեր այլ լուծումները մեզ չեն հետաքրքրում: Նկատենք, որ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ միջակայքում $\cos\alpha$-ն նվազող է և տեղի ունի

$\cos\frac{\pi}{4} < \cos\frac{\pi}{5} < \cos\frac{\pi}{6}$ կամ $\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos\frac{\pi}{5} < \frac{\sqrt{3}}{2}$ անհավասարությունը:

2. Օգտվելով նրանից, որ $5\alpha = \pi$, և որ $\sin 5\alpha = 0$ բերենք $\cos\alpha$-ի հաշվման ևս մի եղանակ: Նախ բերենք մեզ անհրաժեշտ մի քանի բանաձևեր.

$$\sin 4\alpha = 2\sin 2\alpha\cos 2\alpha = 4\sin\alpha\left(2\cos^3\alpha - \cos\alpha\right)$$

$$\cos 4\alpha = 1 - 2\sin^2 2\alpha = 1 - 8\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$$

$$\sin 5\alpha = \sin\alpha\cos 4\alpha + \cos\alpha\sin 4\alpha = \sin\alpha\left(16\cos^4\alpha - 12\cos^2\alpha + 1\right)$$

Այժմ, օգտվելով $\sin 5\alpha$-ի համար ստացած բանաձևից, $\sin 5\alpha = 0$ հավասարումից կստանանք հետևյալ երկքառակուսի հավասարումը ($\sin\alpha \neq 0$)

$$16\cos^4\alpha - 12\cos^2\alpha + 1 = 0 \qquad (4)$$

Կատարենք նշանակում՝ $t = \cos^2\alpha$: (4) հավասարումը կբերվի

$$16t^2 - 12t + 1 = 0$$

քառակուսի հավասարման, որի լուծումներն են $t_1 = \frac{6+2\sqrt{5}}{16}$, $t_2 = \frac{6-2\sqrt{5}}{16}$:

Հետևաբար՝

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{16}} = \sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

t-ի երկրորդ արժեքից ստանում ենք

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{16}} = \sqrt{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

որը չի բավարարում խնդրի պայմաններին:

3. $\cos\alpha$-ի արժեքը կարելի հաշվել նաև $\cos 18^0 = \sin 72^0$ կամ $\cos\frac{\alpha}{2} = \sin 2\alpha$ բերման բանաձևից, թեպետ այն բերվում է խորանարդ աստիճանի հավասարման:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \sin^2 2\alpha \Leftrightarrow 1+\cos\alpha = 2\left(2\sin\alpha\cos\alpha\right)^2 \qquad (5)$$

Պարզ ձևափոխություններից հետո այն բերվում է

$$1+\cos\alpha = 8\cos^2\alpha\left(1-\cos^2\alpha\right)$$

կամ

$$\left(1+\cos\alpha\right)\left(8\cos^3\alpha - 8\cos^2\alpha + 1\right) = 0 \qquad (6)$$

հավասարման: Այստեղ $1+\cos\alpha \neq 0$: Մնում է լուծել

$$8\cos^3\alpha - 8\cos^2\alpha + 1 = 0 \qquad (7)$$

հավասարումը:

Կատարենք նշանակում՝ $t = \cos\alpha$, և (7) հավասարումը կբերվի

$$8t^3 - 8t^2 + 1 = 0 \qquad (8)$$

խորանարդ աստիճանի հավասարման: Խորանարդ աստիճանի հավասարումները լուծուվում են Կարդանոյի բանաձևերով [2,3], որոնք դուրս են դպրոցական ծրագրից: Սակայն այն կարելի լուծել նաև արտադրիչների վերլուծման եղանակով: (8) հավասարումը նախ գրենք

$$8t^3 - (2+\sqrt{5}) - 8t^2 + (3+\sqrt{5}) = 0 \qquad (9)$$

այնուհետև

$$t^3 - \frac{2+\sqrt{5}}{8} - \left(t^2 - \frac{3+\sqrt{5}}{8}\right) = 0$$

տեսքով: Նկատենք, որ

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{16} = \frac{3+\sqrt{5}}{8}; \qquad \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^3 = \frac{16+8\sqrt{5}}{64} = \frac{2+\sqrt{5}}{8}$$

(9) հավասարումը կներկայացնենք

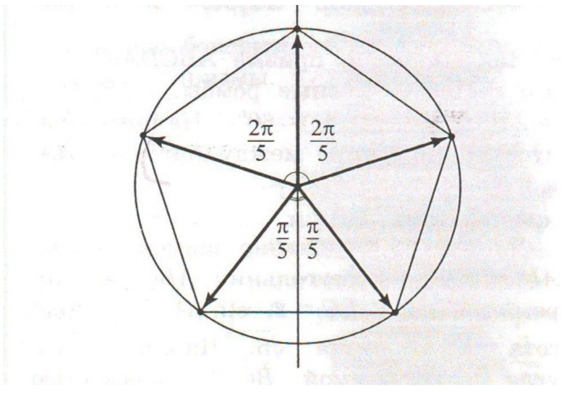
$$\left(t - \frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)\left(t^2 + \frac{\sqrt{5}-3}{4}t + \frac{5+3\sqrt{5}}{8}\right) = 0 \qquad (10)$$

տեսքով, որն ունի մեկ իրական արմատ՝ $t = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, քանի որ քառակուսային հավասարման տարբերիչը (դիսկրիմինանտը) բացասական է՝

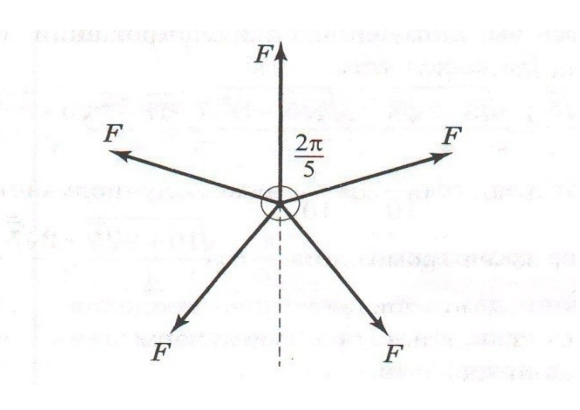
$$D = \left(\frac{\sqrt{5}-3}{4}\right)^2 - 4\left(\frac{5+3\sqrt{5}}{8}\right) = -\frac{26+30\sqrt{5}}{16} < 0$$

Երկրաչափական մոտեցում

4. Դիտարկենք միավոր շառավղով շրջանագծին ներգծած կանոնավոր հնգանկյուն և շրջանագծի կենտրոնից տանենք հինգ միավոր վեկտորներ, ուղղված դեպի հնգանկյան գագաթները (նկ.1): Երկու հարևան վեկտորների կազմած անկյունը հավասար է $2\alpha = \frac{2\pi}{5}$, իսկ վեկտորների գումարը հավասար է զրոյի: Դրանում համոզվում ենք, հաշվի առնելով, որ վեկտորների համակարգը $\frac{2\pi}{5}$ անկյամբ պտտելիս գալիս ենք նույն համակարգին՝ նույն գումարային վեկտորով: Եթե գումարային վեկտորը հավասար չլիներ զրոյի, ապա վեկտորների համակարգը $\frac{2\pi}{5}$ անկյամբ պտտելիս այն ևս կփոխվեր և կստանայինք հակասություն:



Նկ.1



Նկ.2

Քանի որ գումարային վեկտորը հավասար է զրոյի, ապա բոլոր վեկտորների պրոյեկցիաների գումարը կոորդինատական առանցքների վրա պետք է հավասար լինի զրոյի: Պրոյեկցիաների գումարը հորիզոնական առանցքի վրա համաչափության հետևանքով նույնաբար հավասար է զրոյի: Ուղղահայաց առանցքի վրա վեկտորների պրոյեկցիաների գումարի զրո լինելու պայմանից ստանում ենք

$$1+2\cdot\cos2\alpha-2\cdot\cos\alpha=0$$

կամ

$$2\cos2\alpha-2\cos\alpha+1=0$$

Վերջինս էլ, ոչ բարդ ձևափոխություններից հետո, բերվում է մեզ ծանոթ

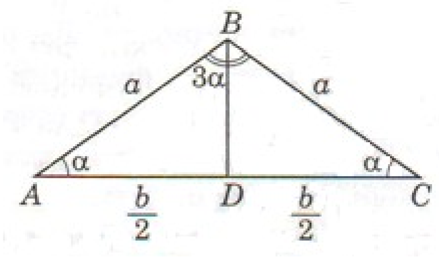
$$4\cos^2\alpha-2\cos\alpha-1=0$$

հավասարմանը, որը լուծելիս, իհարկե, պետք է հաշվի առնել, որ $\cos\alpha>0$:

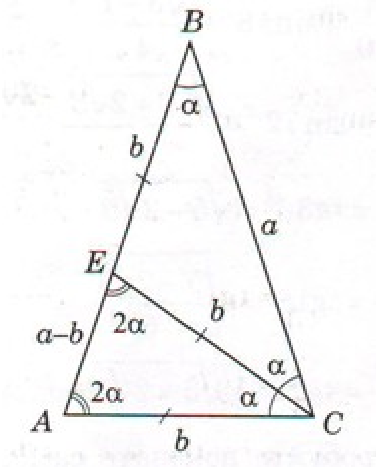
Ֆիզիկական իմաստը: Եթե շրջանագծի կենտրոնում տեղադրենք հինգ հավասար մեծության ուժեր, ուղղված դեպի կանոնավոր հնգանկյան գագաթները (նկ.2), ապա կստանանք հավասարակշռված ուժային համակարգ, քանի որ նրա համազորը հավասար է զրոյի;

5. Դիտարկենք հավասարասրուն եռանկյուն, որի հիմքի անկյունները հավասար են $\alpha=36^0$ (նկ.3): Այդ դեպքում գագաթի B անկյունը հավասար է $180^0-72^0=108^0=3\alpha$: Սինուսների թեորեմից կստանանք $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin3\alpha}$:

Եռանկյունի ABD-ից $\cos\alpha=\dfrac{b/2}{a}$, հետևաբար $b=2a\cos\alpha$ և $\dfrac{1}{\sin\alpha}=\dfrac{2\cos\alpha}{\sin3\alpha}$:



Նկ.3



Նկ.4

Այստեղից ստանում ենք մեզ արդեն ծանոթ (1) հավասարումը՝ $\sin2\alpha=\sin3\alpha$, որն իր հերթին բերվում է (2) հավասարմանը, իսկ վերջինիս լուծումն է՝

$$\cos\alpha=\frac{1+\sqrt5}{4}:$$

6. Դիտարկենք մեկ այլ հավասարասրուն եռանկյուն, որի հիմքի անկյունները հավասար են $2\alpha=72^0$ (նկ.4):

Այդ դեպքում գագաթի B անկյունը հավասար է $180^0-2\cdot72^0=36^0=\alpha$: Տանենք C անկյան կիսորդը և նրա հատման կետը AB կողմի հետ նշանակենք E: Դժվար չէ տեսնել, որ ABC և ECA եռանկյունները նման են: Եռանկյունների նմանությունից՝ $\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{b}{a}$, որտեղից էլ ստանում ենք՝

$$a^2-ab-b^2=0$$

հավասարումը: Լուծենք այն a-ի նկատմամբ որպես քառակուսի հավասարում, կստանանք

$$a=\frac{b\pm\sqrt{b^2+4b^2}}{2}=\frac{1\pm\sqrt5}{2}b:$$

Քանի որ եռանկյան կողմերը բացասական լինել չեն կարող, վերցնում ենք միայն պլյուս նշանը՝ $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}b$: Այժմ օգտվելով $\cos\alpha=\frac{a}{2b}$ առնչությունից, որը հեշտությամբ ստացվում է BEC հավասարասրուն եռանկյունուց (E գագաթից պետք է տանել բարձրություն), ստանում ենք մեզ արդեն քաջածանոթ $\cos\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ արժեքը:

Եռանկյունաչափական վերջաբան

7. Ունենալով $\cos\alpha$-ի արժեքը և օգտվելով եռանկյունաչափության բանաձևերից դժվար չէ գտնել այդ անկյան մյուս ֆունկցիաների արժեքները: Այսպես՝

$$\sin\frac{\pi}{5}=\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{5}}=\sqrt{1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{16}}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},$$

$$tg\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{(1+\sqrt{5})^2}}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}=\sqrt{5-2\sqrt{5}}:$$

Օգտվելով $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ և $\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$ բանաձևերից, ստանում ենք

$$\sin\frac{\pi}{10}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{5}}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{1+\sqrt{5}}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}=\frac{\sqrt{5}-1}{4},$$

$$\cos\frac{\pi}{10}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{5}}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{1+\sqrt{5}}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},$$

Օգտվելով բերման բանաձևերից կարելի հաշվել $\cos\frac{2\pi}{5}$-ի և $\sin\frac{2\pi}{5}$-ի արժեքները.

$$\cos\frac{2\pi}{5}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{5}\right)=\sin\frac{\pi}{10};\quad \sin\frac{2\pi}{5}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{5}\right)=\cos\frac{\pi}{10}:$$

Այսպիսով՝

$$\cos\frac{\pi}{5}=\cos36^0=\frac{1+\sqrt{5}}{4};\qquad \sin\frac{\pi}{5}=\sin36^0=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4};\qquad tg\frac{\pi}{5}=tg36^0=\sqrt{5-2\sqrt{5}}$$

$$\cos\frac{2\pi}{5}=\cos72^0=\frac{\sqrt{5}-1}{4};\quad \sin\frac{2\pi}{5}=\sin72^0=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4};\qquad tg\frac{2\pi}{5}=tg72^0=\sqrt{5+2\sqrt{5}}$$

$$\cos\frac{\pi}{10}=\cos18^0=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4};\quad \sin\frac{\pi}{10}=\sin18^0=\frac{\sqrt{5}-1}{4};\qquad tg\frac{\pi}{10}=tg18^0=\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$$

Գրականություն

1. Գևորգյան Գ.Գ., Սահակյան Ա.Ա. Հանրահաշիվ և մաթեմատիկական անալիզ: Ավագ դպրոցի 10-րդ դասարանի դասագիրք (բնագիտական հոսքի համար).- Եր.: “Տիգրան Մեծ”, 2009.-208 էջ:

2. Մովսիսյան Յու. Մ. Բարձրագույն հանրահաշիվ և թվերի տեսություն: Եր.: “Զանգակ-97”, 2008.- 732 էջ:
3. Կուրոշ Ա.Գ. Բարձրագույն հանրահաշվի դասընթաց.-Եր.: “Լույս”, 1965.- 495 էջ:

Տեղեկություններ հեղինակների մասին.

Խաչատրյան Ալեքսանդր Մովսեսի -Ֆիզ.մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր
ԱրՊՀ, Մաթեմատիկայի ամբիոնի վարիչ:
Հեռ. (+37497) 201949
E - mail alexkhach@yandex.ru
Մարության Կարինե Լորիկի - ԱրՊՀ, Մաթեմատիկայի ամբիոնի դոցենտ:
Հեռ. (+37497) 248985

Հոդվածը տպագրության է երաշխավորել խմբագրական կոլեգիայի անդամ, ֆ.մ. գ.թ., Գ.Հ.Սահակյանը: