ՀՏԴ 378.148.53 Ֆիզիկա

ՆՅՈՒՏՈՆԻ ԵՐԿՐՈՐԴ ՕՐԵՆՔԻ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԲՆՈՒՅԹԻ ՄԱՍԻՆ

Աշոտ ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ, Ալբերտ ԱԼԵՔՍԱՆՅԱՆ, Արկադի ՍՈՂՈՄՈՆՅԱՆ

Բանալի բառեր՝ *վեկտորական հավասարում, իներցիալ համակարգ, սկալյար ֆունկցիա, վեկտոր ֆունկցիա, դիֆերենցիալ հավասարում, բացահայտ կախում, դեկարտյան, գլանային և սֆերիկ համակարգեր, համարժեկություն, ուժ, կինեմատիկ պարամետրեր:*

Ключевые слова: *векторное уравнение, инерциальные системы, скалярная функция, вектор функция, дифференциальные уравнения, явная зависимость, декартовые, сферические и цилиндрические координаты, эквивалентность, сила, кинематические параметры.*

Keywords: *vector equation, inertial systems, scalar function, the vector function, differential equations, the explicit dependence, Cartesian, spherical and cylindrical coordinates, equivalence, force, kinematic parameters.*

А.Хачатрян, А.Алексанян, А.Согомонян

О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПРИРОДЕ ВТОРОГО ЗАКОНА НЬЮТОНА

В статье показано, что математический вид выражающий второй закон Ньютона, представкленный как векторное уравнение, анализированный с помощью произвольной координатной системы, равнозначен, в общем случае, системе трех дифференциальных уравнений.При этом предполагается, что внешняя сила, действующая на тело массой т является функцией радиус вектора и вектора скорости, который в свою очередь зависит от времени.

A. Khachatryan, Al. Aleksanyan, A. Soghomonyan

ABOUT THE MATHEMATICAL CHARACTER OF NEWTON’S SECOND LAW

Article shows that the mathematical form of Netwons second low ,presented as a vector equation,analuzed by aribitary coordinational system,in the general case is equivalente to a system of three differential equations. In this case,it is assumed that the external force acting on the body mass m is a function of the radius vector and the velocity vector,which i8n turn depends on the turn.

Հոդվածում ցույց է տրված, որ Նյուտոնի երկրորդ օրենքի մաթեմատիկական տեսքը, ներկայացված որպես վեկտորական հավասարում, վերլուծված կամայական կոորդինատական համակարգի միջոցով, ընդհանուր դեպքում համարժեք է երեք դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգին:

Այս դեպքում ենթադրվում է, որ m զանգվածով մարմնի վրա ազդող արտաքին ուժը հանդիսանում է ֆունկցիա շառավիղ վեկտորից և արագության վեկտորից, վերջիններս էլ իր հերթին կախված են ժամանակից:

Ինչպես հայտնի է, հաշվարկման իներցիալ համակարգներում մարմնի դիրքը բնութագրող $\vec{r}(t)$ շառավիղ վեկտորը բավարարում է Նյուտոնի երկրորդ օրենք անվանումը կրող հավասարմանը.

$$m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{\ }\ \vec{\ }\ \vec{\ }(t), t), \tag{1}$$

որտեղ m-ը մարմնի զանգվածն է, $\vec{v}(t) = \vec{\ }\ t$ - մարմնի շարժման արագությունը, $\vec{F}$-ը՝ նրա վրա ազդող ուժը: $\vec{F}(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t)$ գրառումը ենթադրում է, որ մարմնի վրա ազդող ուժը կարող է լինել կախված $\vec{r}(t)$-ից, $\vec{v}(t)$-ից և t-ից [1;2]:

Իր մաթեմատիկական բնույթով $\vec{r}(t)$ շառավիղ վեկտորը իրենից ներկայացնում է վեկտոր ֆունկցիա: Այլ կերպ ասած, այն համարժեք է ըստ ժամանակի երեք սկալյար (սովորական) ֆունկցիաների. $\vec{r}(t) \square\ \alpha\ \ \beta\ \ \gamma$, որտեղ "□" համարժեքություն սիմվոլն է, իսկ $\alpha\ \ \beta\ \ \gamma$ ժամանակից կախված որոշակի ֆունցիաներ են: Կարևոր է նկատել, որ $\vec{r}(t)$ և $\alpha\ \ \beta\ \ \gamma$ համարժեքության հարցում էական է սկալյար ֆունցիաների հերթականությունը: Մի կողմ դնելով չափողականության հարցերը, եթե ասվում է, որ սկալյար ֆունկցիաները, օրինակ, հետևյալն են.

$$\alpha \quad = \quad - \qquad \beta \quad = \qquad + \quad \gamma \quad = \qquad + \quad \sqrt{\quad + \quad}$$

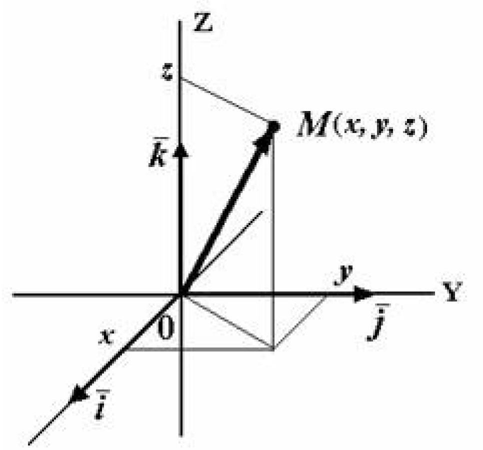
ապա պարտադիր կերպով պետք է նշվի, թե նրանցից որը պետք է դիտարկել առաջին, որը՝ երկրորդ և որը՝ երրորդ: Այսպես, ընդհանուր դեպքում, երբ $\alpha \quad \beta \quad \gamma$ ֆունցիաներն իրարից տարբերվում են, ապա

$$\alpha \quad \beta \quad \gamma \quad \neq \beta \quad \alpha \quad \gamma \quad \neq \gamma \quad \beta \quad \alpha \quad \cdots$$

Վեկտոր ֆունկցիայի նույնականացումը երեք սկալյար ֆունկցիաների հերթականության հետ կարելի է իրականացնել տարբեր եղանակներով: Դրանցից առավել հայտնի է դեկարտյան կոորդինատային համակարգի կիրառմամբ եղանակը, երբ շառավիղ վեկտորը ներկայացվում է համապատասխան առանցքներով՝ իր բաղադրիչների միջոցով. $\vec{r}(t) = \qquad t), z(t)$ կամ

$$\vec{r}(t) = \qquad \vec{\ } + \qquad \vec{\ } + \qquad \vec{\ } \tag{2}$$

որտեղ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ միավոր, չափողականություն չունեցող վեկտորներ են՝ ուղղված, համապատասխանաբար, X, Y, Z առանցքների դրական ուղղություններով (տես նկ.1): x, y, z մեծությունները ընդունված է անվանել դեկարտյան կոորդինատներ:



Նկ. 1

Հաճախ, խնդրի համաչափությամբ պայմանավորված, վեկտոր ֆունկցիան նույնականացվում է երեք սկալյար ֆունկցիաների հետ, այլ կոորդինատական համակարգերի օգնությամբ, որոնցից առավել հայտնի են սֆերիկը և գլանայինը (տես Հավելված)

$$\vec{v}(t) = \qquad \vec{\ } + \qquad \vec{\ } + \qquad \vec{\ } \tag{3}$$

$$\vec{F}(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t) = \qquad \vec{\ } + \qquad \vec{\ } + \qquad \vec{\ } \tag{4}$$

Նկատենք, որ, համաձայն $\vec{v}(t) = \quad t$ կինեմատիկ կապի, շառավիղ վեկտորի և արագության վեկտորների պրոյեկցիաների միջև գործում է հետևյալ կապը;

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} \qquad = \frac{dy(t)}{dt} \qquad = \frac{dz(t)}{dt} \tag{5}$$

Ըստ (4)-ում (տես նաև (1)) արված գրառման՝ մարմնի վրա ազդող $\vec{F}(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t)$ ուժը կարող է կախված լինել շարժման կինեմատիկ պարամետրերից՝ դիրքից և շարժման արագությունից, ինչպես նաև ժամանակից: Քանի որ $\vec{r}(t)$ ու $\vec{v}(t)$ վեկտորները համարժեք են որոշակի եռյակ սկալյար ֆունկցիաների հերթականության՝

$$\vec{r}(t) = \qquad t), z(t) \quad \text{ու} \quad \vec{v}(t) = \left[\qquad \right],$$

ապա հասկանալի է, որ $\vec{F}(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t)$ կախվածությունը կարելի է ներկայացնել իբրև կախվածություն այդ սկալյար ֆունկցիաներից.

$$\vec{F}(\vec{r}(t),\vec{v}(t),t)=\vec{\ }\left(\qquad\qquad\qquad\right): \qquad (6)$$

Ասվածը վերաբերում է նաև $\vec{F}$-ի կոմպոնենտներին.

$$F_x(\vec{r}(t),\vec{v}(t),t)=\ \left(\qquad\qquad\qquad\right), \qquad (7)$$

$$F_y(\vec{r}(t),\vec{v}(t),t)=\ \left(\qquad\qquad\qquad\right), \qquad (8)$$

$$F_z(\vec{r}(t),\vec{v}(t),t)=\ \left(\qquad\qquad\qquad\right). \qquad (9)$$

Մի շարք գործնական հետաքրքրություն ներկայացնող դեպքերում, ուժը դրսևորում է գծային կախվածություն մարմնի դիրքից և արագությունից.

$$\vec{F}(\vec{r}(t),\vec{v}(t),t)=\ \vec{\ }\ +\ \vec{\ }\ + \qquad (10)$$

այստեղ a,b-ն ուժի ազդեցության բնութագրականներ են, որոնք կարող են լինել ինչպես դրական, այնպես էլ բացասական, $f(t)$-ն որոշակի ֆունկցիա է ժամանակից: Կարևոր է նկատել, որ նույնիսկ $f(t)=$ պայմանում մարմնի վրա ազդող ուժը դրսևորում է ժամանակային կախվածություն $\vec{F}(\vec{r}(t),\vec{v}(t),t)=\vec{\ }\ \vec{\ }\ \ \vec{\ }(t))$: Քանի որ մարմնի դիրքն ու արագությունը փոխվում են ըստ ժամանակի, այսինքն ֆունկցիա են ժամանակից, իսկ ուժը կախված է նրանցից, ապա դիրքի ու արագության միջոցով ուժը ևս լինում է կախված ժամանակից: Նման դեպքերում ասում են, որ ուժի ժամանակային կախվածությունը ոչ բացահայտ է, քանի որ այն տրվում է այլ ֆունկցիայի կամ ֆունկցիաների միջոցով: Այսպես, օրինակ, եթե $F=$, ապա F-ի կախվածությունը t-ից հայտնի կլինի միայն այն դեպքում, եթե հայտնի լինի $x(t)$ ֆունկցիայի բացահայտ տեսքը: Նկատենք նաև, որ ժամանակից բացահայտ կախում ունենում են, որպես կանոն, հարկադրական բնույթի ուժերը:

Օգտվելով (2), (3), ինչպես նաև (7)-(9)բանաձևերի, Նյուտոնի (1) հավասարման համար կարող ենք գրել.

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}=\ \left(\qquad\qquad\qquad\right) \qquad (11)$$

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2}=\ \left(\qquad\qquad\qquad\right) \qquad (12)$$

$$m\frac{d^2z(t)}{dt^2}=\ \left(\qquad\qquad\qquad\right) \qquad (13)$$

Համաձայն բերված արդյունքի, ընդհանուր դեպքում Նյուտոնի (1) վեկտորական հավասարումը համարժեք է երեք դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի, գրված երեք անհայտ $x(t),y(t),z(t)$ ֆունկցիաների նկատմամբ: Կարևոր է նկատել, որ (11)-(13) հավասարումների համակարգը կտրոհվի առանձին հավասարումների, եթե ուժի բաղադրիչներն ունենան կախվածություն միայն իրենց ուղղությանը համապատասխանող կինեմատիկ պարամետրերից.

$$F_x\left(\qquad\qquad\qquad\right)\ \left(\qquad\qquad\right),$$

$$F_y\left(\qquad\qquad\qquad\right)\ \left(\qquad\qquad\right),$$

$$F_z\left(\qquad\qquad\qquad\right)\ \left(\qquad\qquad\right):$$

Այս դեպքում (11)-(13) հավասարումների համակարգը կվերածվի հետևյալին.

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \left(\quad \right) \tag{14}$$

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} = \left(\quad \right) \tag{15}$$

$$m\frac{d^2z(t)}{dt^2} = \left(\quad \right) \tag{16}$$

Նկատենք, որ ի տարբերություն ընդհանուր դեպքի համար գրված (11)-(13) հավասարումների, մասնավոր դեպքի համար գործող (14)-(16) հավասարումները չեն կազմում համակարգ, քանի որ նրանցից յուրաքանչյուրը պարունակում է միայն մեկ անհայտ ֆունկցիա միայն իրեն համապատասխանող ածանցյալներով: Այսպես, օրինակ, (14)-ում առկա է միայն $x(t)$, $dx(t)/dt$, $d^2x(t)/dt^2$ և այլն:

Հեշտ է նկատել, որ (10)-ին համապատասխան տեսք ունեցող ուժերի ազդեցությունը մեխանիկական շարժման վրա նկարագրվում է համաձայն (14)-(16) հավասարումների.

$$F_x(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t) = \quad + \frac{dx(t)}{dt} +$$

$$F_y(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t) = \quad + \frac{dy(t)}{dt} +$$

$$F_z(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t) = \quad + \frac{dz(t)}{dt} +$$

(14)-(16) հավասարումներով նկարագրվող մեխանիկական շարժման ձևերը բազմաթիվ են: Մասնավորապես, ուղղելով X առանցքը ուղղահայաց դեպի ներքև Երկրի մակերևույթի մոտ շարժվող մարմնի վրա ազդող ուժի համար կարող ենք գրել $\vec{F} = \quad \vec{}$, կամ

$$F_x = \quad = \quad = \quad , \tag{17}$$

ինչը թույլ է տալիս (14)-(16) հավասարումները գրել հետևյալ տեսքով

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \qquad m\frac{d^2y(t)}{dt^2} = \qquad m\frac{d^2z(t)}{dt^2} = \tag{18}$$

Այս հավասարումների լուծումները հայտնի են՝

$$x(t) = \quad + \quad + \qquad , \; y(t) = \quad + \quad , \; z(t) = \quad + \quad , \tag{19}$$

որտեղ $x_0, y_0, z_0, v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}$ շարժման սկզբնական պայմանները բնութագրող հաստատուններ են. $\vec{r}_0 = \quad + \quad + \quad$ - շարժման սկզբնական դիրք, $\vec{v}_0 = \quad + \quad + \quad$ - շարժման սկզբնական արագություն: Օգտվելով (2)-ից, հեշտ է առանձին ուղղություններով (19) լուծումները ներկայացնել մեկ վեկտոր ֆունկցիայի միջոցով .

$$\vec{r}(t) = \quad + \quad + \quad \frac{\quad t^2}{2}$$

Կարևոր է նկատել, որ ընդհանուր դեպքում, Նյուտոնի օրենքի ներկայացումը դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի ձևով հատուկ է ոչ միայն դեկարտյան կոորդինատներին: Նյուտոնի (1) հավասարումը վերլուծված կամայական կորդինատական համակարգերի՝ սֆերիկ, գլանային և այլն, ընդհանուր դեպքում միշտ ներկայանում է որպես դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգ:

Հավելված

Հաճախ, խնդրի համաչափությունով պայմանավորված, շառավիղ վեկտոր ֆունկցիան ներկայացնում են այսպես կոչված, սֆերիկ կոորդինատների կամ գլանային կոորդինատների միջոցով: Եթե դեկարտյան համակարգի ժամանակ մարմնի դիրքը բնութագրվում երեք հեռավորություններով, ապա սֆերիկի դեպքում` մեկ հեռավորությունով և երկու անկյուններով, իսկ գլանայինի դեպքում` երկու հեռավորություններով և մեկ անկյունով:

Նկ. 2-ում պատկերված է շառավիղ վեկտորի ներկայացումը սֆերիկ կոորդինատների միջոցով. $\vec{r}(t) = \quad \theta \quad \phi$: Ինչպես երևում է նկ.2-ից, սֆերիկ $\mathbf{r}$ կոորդինատը պարզապես $\vec{r}$ վեկտորի մոդուլն է.

$$r(t)^2 = \quad + \quad + \quad :$$

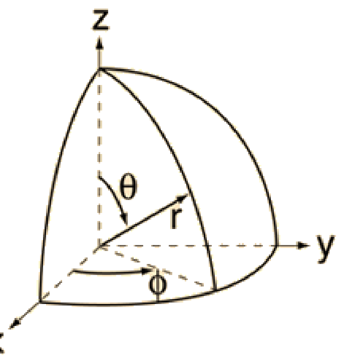
θ φ կոորդինատները՝ անկյուններ են, որոնք կրում են զենիթային և ազիմուտալ անկյուններ անվանումը: Նկարում սլաքներով նշված են նաև θ φ անկյունների դրական ուղղությունները:

Եթե դեկարտյան համակարգի դեպքում կոորդինատները կարող են ընդունել կամայական արժեք;

$$-\infty < \quad < +\infty \quad -\infty < \quad < +\infty \quad -\infty < \quad < +\infty$$

ապա սֆերիկի կոորդինատների ժամանակ նրանց արժեքների տիրույթները սահմանափակ է.

$$0 \leq \quad < \infty,\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \phi \leq \quad \pi :$$



Նկ. 2

Հայտնի է, որ դեկարտյան և սֆերիկ կոորդինատների միջև գործում են հետևյալ կապերը.

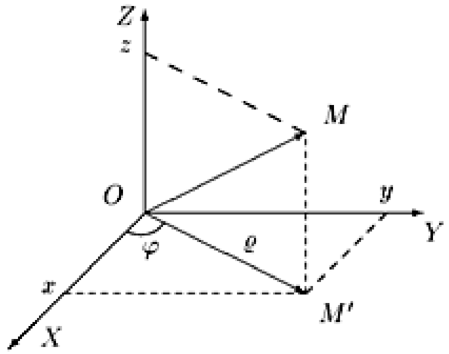
$$x = \quad \theta \quad \phi \quad = \quad \theta \quad \phi \quad = \quad \theta :$$

Գլանային կոորդինատական համակարգում (նկ.3) որպես մարնի դիրքի բնութագրիչներ դիտարկվում են նրա կոորդինատը z առանցքի վրա և բևեռային կոորդինատներով ներկայացված նրա պրոյեցկիայի դիրքը X, Y հերթության մեջ. $\vec{r}(t) = \quad \rho \quad \varphi$: Գլանային կոորդինատները, նման սֆերիկի, ևս հնարավոր է արտահայտել դեկարտյան կոորդինատների միջոցով.

$$x = \rho \quad \varphi \quad = \rho \quad \varphi \quad = \quad ,$$

Նկատենք նաև, որ գլանային կոորդինատների փոփոխման տիրույթները, բացառությամբ z-ի, սահմանափակ են.

$$-\infty < \quad < +\infty,\ 0 \leq \rho < +\infty,\ 0 \leq \varphi \leq \quad \pi :$$



Նկ.3

Նկարներ 2, 3- պարզ համեմատությունից երևում է, որ ϕ անկյունը սֆերիկի կոորդինատների դեպքում և φ անկյունը գլանայինում, ըստ էության նույն բանն են: Եթե սֆերիկի դեպքում X, Y հարթության մեջ դիրքը բնութագրող անկյունը անվանում են ազիմուտալ, ապա գլանային կորդինատների դեպքում նրան հաճախ կոչում են բևեռային անկյուն:

Գրականություն

1. Մ.Գ Աբրահամյան-Մեխանիկայի ֆիզիկական հիմունքներ, Երևան 1997թ.
2. Ի.Վ Սավելեվ- Ընդհանուր ֆիզիկայի դասընթաց, h I, Երևան 1977թ.

Տվյալներ հեղինակների մասին.

1. Խաչատրյան Աշոտ՝ Հայաստանի ազգային պոլիտեխնիկական համալսարանի ֆիզիկային ամբիոնի վարիչ, ֆ.մ.գ.դ. պրոֆեսոր:
e-mail: ashot.khachatrian@gmail.com
2. Ալեքսանյան Ալբերտ՝ Արցախի պետական համալսարանի ֆիզիկայի ամբիոնի վարիչ, ֆ.մ.գ.դ., պրոֆեսոր:
e-mail: alalbert@inbox.ru:
3. Սողոմոնյան Արկադի՝ ՀԱԱՀ Ստեփանակերտի մասնաճյուղի ուսումնա-գիտական աշխատանքների գծով տնօրենի տեղակալ, ֆ.մ.գ.թ., դոցենտ:
e-mail: arkady.Soghomonyan@mail.ru:

Հոդվածը տպագրության է երաշխավորել խմբագրական կոլեգիայի անդամ, ֆ.մ.գ.դ. Ա. Մ.Խաչատրյանը: