ՀՏԴ 513 Մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկա

ԽՆԴԻՐՆԵՐ ՀԱՄԱԿՑՎԱԾ ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՊԱԿՏԵՐՆԵՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Գայանե ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ

Բանալի բառեր. *համակցված երկրաչափական պատկերներ, ներգծյալ և արտագծյալ պատկերներ, տարածական պատկերներ, ներգծյալ գլան, արտագծյալ գլան, ներգծյալ գունդ, ներգծյալ բուրգ, ներգծյալ կոն, ներգծյալ պրիզմա, արտագծյալ պրիզմա:*

Ключевые слова: *совмещенные геометрические фигуры, вписанные и описанные фигуры, пространственные фигуры, вписанный цилиндр, описанный цилиндр, вписанный шар, вписанный пирамида, вписанный конус, вписанный призма, описанный призма.*

Keywords: *combined geometric figures, inscribed and circumscribed figures, spatial figures, inscribed cylinder, described cylinder, inscribed sphare, inscribed pyramid, inscribed cone, inscribed prism, described prism.*

Г. Аракелян

ЗАДАЧИ О СОВМЕЩЕННЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУРАХ

В обычной жизни часто возникает необходимость обозреть такое взаимное расположение пространственных фигур, при котором одна из них содержит другую. В часности, взаимное расположение таких двух фигур как вписанные и описанные фигуры.

В статье рассматриваются задачи о совмещенных геометрических фигурах, которые обогащают знания учащихся и развивают их пространственное представление.

G. Arakelyan

TASKS ON COMBINED GEOMETRIC FIGURES

In everyday life it is often necessary to observe such mutual arrangement of spatial figures in which one of them contains another. Especially, mental arrangement of the two figures, as inscribed and circumscribed figures.

The article deals with the tasks on combined geometric figures which enrich the knowledge of students and develop their spatial representation

Առօրյա կյանքում հաճախ անհրաժեշտություն է առաջանում դիտարկել տարածական պատկերների այնպիսի փոխադարձ դասավորվածություններ, որոնցում նրանցից մեկը որոշակի ձևով պարունակվում է մյուսում կամ պարունակում է մյուսը: Երկու պատկերների այդպիսի փոխադարձ դասավորվածության մասնավոր դեպք են ներգծած և արտագծած պատկերները:

Հոդվածում դիտարկվում են համակցված երկրաչափական պատկերների վերաբերյալ խնդիրներ, որոնք հարստացնում են սովորողների գիտելիքները, զարգացնում նրանց տարածական պատկերացումներն ու երևակայությունները:

Գործնականում հաճախ անհրաժեշտություն է առաջանում դիտարկել տարածական պատկերների այնպիսի փոխադարձ դասավորվածություններ, որոնցում նրանցից մեկը որոշակի ձևով պարունակվում է մյուսում կամ պարունակում է մյուսը: Երկու պատկերների այդպիսի փոխադարձ դասավորվածության մասնավոր դեպք են ներգծած և արտագծած պատկերները: Գործնականում այդպիսի պատկերների վերաբերյալ հանդիպում են բազմաթիվ խնդիրներ, որոնք ընդհանուր առմամբ անվանում են *խնդիրներ համակցված երկրաչափական պատկերների վերաբերյալ:*

Երկրաչափական պատկերների պատկերումն ունի ոչ միայն գործնական, այլև ուսուցողական մեծ արժեք: Դրանց միջոցով հարստանում են սովորողների գիտելիքները, զարգանում են նրանց տարածական պատկերացումներն ու երևակայությունները:

Փորձը ցույց է տալիս, որ համակցված տարածական պատկերների վերաբերյալ խնդիրներ լուծելիս սովորողները հանդիպում են դժվարությունների:

Սովորողների զգալի մասի մոտ անբավարար են զարգացած տարածական պատկերացումները, որի հետևանքով նրանք առաջադրված խնդիրները լուծելիս թույլ են տալիս կոպիտ սխալներ:

Փորձը ցույց է տալիս, որ ավագ դպրոցի աշակերտների զգալի մասը չունենն անհրաժեշտ գիտելիքներ և կարողություններ համակցված երկրաչափական պատկերների վերաբերյալ խնդիրներ լուծելու համար: Այս տեսանկյունով, գտնում ենք, որ ուսուցիչը պետք է համակարգված աշխատի աշակերտների հետ, որպեսզի դասավանդման գործընթացում պատկերների պատկերումները լինեն հնարավորին չափ դիտողական, ճշգրիտ ու պարզ:

Համակցված խնդիրներ գնդի և գլանի վերաբերյալ: Համակցված երկրաչափական պատկերների վերաբերյալ խնդիրներից առավել դժվար ըմբռնելի են գնդի և բազմանիստերի վերաբերող համակցված խնդիրները: Ըստ մեր դիտարկումների գնդի և գլանի վերաբերյալ համակցված խնդիրների լուծման ժամանակ, ամենից առաջ անհրաժեշտ է ներմուծել գնդին ներգծել գլան և գլանին ներգծել գունդ հասկացությունները:

Գլանը կոչվում է գնդին ներգծված (գունդը՝ գլանին արտագծած), եթե գլանի հիմքերի շրջանագծերը պատկանում են գնդային մակերևույթին (նկ.1):

Խնդիրներ լուծելու ընթացքում սովորողները պետք է նկատի ունենան, որ յուրաքանչյուր գլանի կարելի է արտագծել գունդ: Արտագծած գնդի կենտրոնը գլանի բարձրության միջնակետն է, որը համընկնում է գլանի առանցքային հատույթին արտագծած շրջանագծի կենտրոնի հետ, ընդ որում, գնդի շառավիղը հավասար է այդ շրջանագծի շառավղին:

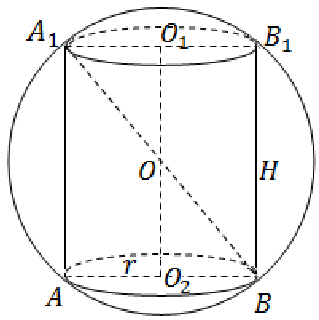
Եթե գնդի շառավիղը նշանակենք R-ով, գլանի շառավիղը՝ r-ով, իսկ նրա բարձրությունը՝ H-ով, ապա ΔOO_2B -ից կստանանք՝

$$R=\sqrt{r^2+\left(\frac{H}{2}\right)^2}:$$

Գունդը կոչվում է գլանին ներգծած (գլանը՝ գնդին արտագծած), եթե գլանի հիմքերը և բոլոր ծնիչները շաշափում են գունդը (նկ. 2):

Գլանին գունդ ներգծելու համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ գլանը լինի հավասարակողմ, այսինքն՝ $H=2r$, $(R=r)$: Ներգծված գնդի կենտրոնը գլանի հիմքերի կենտրոնները միացնող հատվածի միջնակետն է:

Խնդիր 1: Գնդին ներգծված է գլան, որի հիմքի շառավիղը հարաբերում է բարձրությանն այնպես, ինչպես $m:n$: Գտեք այդ գլանի լրիվ մակերևույթի մակերեսը, եթե գնդի մակերևույթի մակերեսը հավասար է S-ի:



Նկ.1

Լուծում: Դիցուք գնդին ներգծված է գլան (նկ.1): Նշանակենք գնդի շառավիղը R-ով, գլանի հիմքի շառավիղը՝ r –ով, գլանի բարձրությունը՝ H-ով, գլանի լրիվ մակերևույթի մակերեսը՝ S_{ql}-ով: Ունենք՝

$$S_{ql}=2\pi r(H+r):$$

Ըստ պայմանի, $\frac{r}{H}=\frac{m}{n}$, որտեղից

$$H=\frac{nr}{m}: \quad (1)$$

$$S_{ql}=\frac{2\pi r^2(m+n)}{m}: \quad (2)$$

Ըստ խնդրի պայմանի գնդի մակերևույթի մակերեսը կլինի՝ $S=4\pi R^2$, որտեղից

$$R^2=\frac{S}{4\pi}: \quad (3)$$

Տանելով BA_1 տրամագիծը, BAA_1 ուղղանկյուն եռանկյունից կստանանք ${BA_1}^2={AA_1}^2+AB^2$ կամ

$$4R^2=4r^2+H^2: \quad (4)$$

Հաշվի առնելով (1) և (3) առնչությունները, (4)-ից կունենանք՝

$$4\cdot\frac{S}{4\pi}=4r^2+\frac{n^2r^2}{m^2},$$

որտեղից

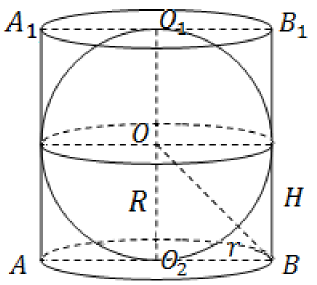
$$r^2=\frac{Sm^2}{\pi(4m^2+n^2)}:$$

Այսպիսով,

$$S_{ql}=\frac{2Sm(m+n)}{4m^2+n^2}:$$

Պատասխան՝ $\frac{2Sm(m+n)}{4m^2+n^2}$:

Խնդիր 2: Գնդին արտագծված է գլան: Գտեք նրանց մակերևույթների մակերեսների և ծավալների հարաբերությունները:



նկ. 2

Լուծում: Դիցուք O կենտրոն ունեցող գնդին արտագծված է գլան (նկ.2):

Ենթադրենք գնդի շառավիղը հավասար է R-ի, գլանի հիմքի շառավիղը՝ r-ի, բարձրությունը՝ H-ի: Հաշվենք $\frac{S_q}{S_{ql}}$ հարաբերությունը: Ունենք՝

$$S_q = 4\pi R^2\,, S_{ql} = 2\pi rH + 2\pi r^2:$$

Քանի որ գնդին արտագծված է գլան, ապա $R = r$ և $2r = H$: Հետևաբար,

$$S_q = 4\pi r^2\ , \quad S_{ql} = 4\pi r^2 + 2\pi r^2 = 6\pi r^2 \qquad \text{և}$$

$\frac{S_q}{S_{ql}} = \frac{2}{3}$:

Որոշենք $\frac{V_q}{V_{ql}}$ հարաբերությունը:

Ունենք՝

$$V_q = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi r^3\,,$$
$$V_{ql} = \pi r^2 H = 2\pi r^3,$$

որտեղ $\frac{V_q}{V_{ql}} = \frac{2}{3}$:

Պատասխան՝ $\frac{2}{3}$:

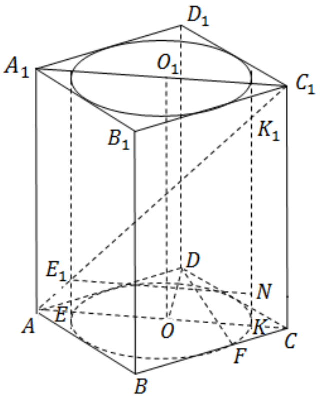
Համակցված խնդիրներ գլանի և պրիզմայի վերաբերյալ: Այս տիպի խնդիրները լուծելու համար սովորողներին ամենից առաջ անհրաժեշտ է իմանալ գլանին ներգծել պրիզմա և պրիզմային ներգծել գլան հասկացությունները: Այդ հասկացությունները ներմուծելու ընթացքում սովորողներին ցուցադրվում են պատրաստի գծագրեր:

Պրիզման կոչվում է գլանին ներգծված (գլանը պրիզմային արտագծած), եթե պրիզմայի հիմքերը ներգծված են գլանի հիմքերին:

Գլանին ներգծված պրիզմայի (պրիզմային արտագծված գլանի) վերաբերյալ խնդիրներ լուծելիս սովորողների ուշադրությունը պետք է հրավիրել որոշ փաստերի վրա:

Նախ, սովորողների հետ պետք է պարզել այն հարցը, թե կամայական պրիզմային կարելի է արդյոք արտագծել գլան: Այդ հարցի պատասխանը տալիս է հետևյալ թեորեմը. «Որպեսզի պրիզմային արտագծվի գլան, անհրաժեշտ է ու բավարար, որ պրիզման լինի ուղիղ և նրա հիմքին հնարավոր լինի արտագծել շրջանագիծ»:

Սովորողները պետք է իմանան, որ ցանկացած կանոնավոր և ուղիղ եռանկյուն պրիզմային հնարավոր է արտագծել գլան, և որ գլանին ներգծված պրիզմայի յուրաքանչյուր կողմնային կող գլանի կողմնային մակերևույթի համար ծնորդ է:



նկ. 3

Գլանը կոչվում է պրիզմային ներգծված (պրիզման՝ գլանին արտագծված), եթե գլանի հիմքերը ներգծված են պրիզմայի հիմքերին:

Պրիզմային գլան ներգծելու համար անհրաժեշտ է ու բավարար, որ պրիզման լինի ուղիղ և նրա հիմքին հնարավոր լինի ներգծել շրջանագիծ:

Սովորողները գլանին արտագծած պրիզմայի վերաբերյալ խնդիրների լուծումն ինքնուրույն որոնելու ընթացքում հաճախ հաշվի չեն առնում որոշ անհրաժեշտ փաստեր: Այսպես, օրինակ, նրանք անտեսում են այն հանգամանքը, որ գլանին արտագծված պրիզմայի յուրաքանչյուր կողմնային նիստ շոշափում է գլանի կողմնային մակերևույթը, ընդ որում, շոշափման գիծը այն ծնորդն է, որն անցնում է պրիզմայի հիմքերի համապատասխան կողմերի և գլանի հիմքերի համապատասխան կողմերի և գլանի հիմքերի շրջանագծերի շոշափման կետերով: Ասվածը պարզաբանենք խնդիրների միջոցով:

Խնդիր 3: Գլանի հիմքի շառավիղը հավասար է r, իսկ բարձրությունը $5r$: Գլանին արտագծված է քառանկյուն պրիզմա, որի հիմքը շեղանկյուն է և ծավալը հարաբերում է գլանի ծավալին, ինչպես $5:\pi$: Գտնել պրիզմայի մեծ անկյունագծի այն հատվածի երկարությունը, որը գտնվում է գլանի ներսում:

Լուծում: DF -ը, որպես $ABCD$ շեղանկյան բարձրություն հավասար է ներգծած շրջանագծի տրամագծին, այսինքն $DF = 2OK = 2r$ (նկ.3):

Նշանակելով $\angle DCB = \alpha, \Delta DFC$-ից՝ կունենան

$$DC = \frac{2r}{sin\alpha},$$

ուստի

$$V_{պր} = BC \cdot DF \cdot CC_1 = \frac{20 \cdot r^3}{sin\alpha},$$

իսկ

$$V_{գլ} = 5\pi r^3:$$

Ըստ պայմանի՝

$$\frac{20 \cdot r^3}{sin\alpha} : 5\pi r^3 = 5 : \pi,$$

Որից $\quad sin\alpha = \frac{4}{5}$,

հետևապես $cos\alpha = \frac{3}{5}$ և $DC = \frac{5r}{2}$,

$$\Delta DOC \text{ -ից՝ } \quad OC = DC \cdot cos\frac{\alpha}{2} = \frac{5r}{2}\sqrt{\frac{1+cos\alpha}{2}} = \sqrt{5} \cdot r$$

և $AC = 2\sqrt{5} \cdot r$, իսկ ΔACC_1 -ից՝ կունենանք՝

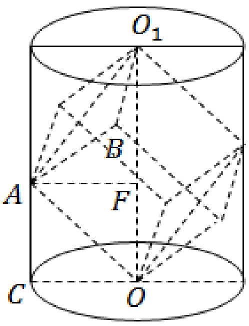
$$AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2 = 20r^2 + 25r^2,$$

$$AC_1 = 3\sqrt{5}r:$$

Տանելով $E_1N || AC$, E_1K_1N և AC_1C եռանկյունների նմանությունից կունենանք՝ $E_1K_1 : AC_1 = E_1N : AC$ կամ $E_1K_1 : 3\sqrt{5}r = 2r : 2\sqrt{5}r$, որտեղից $E_1K_1 = 3r$:

Պատասխան՝ $3r$:

Խնդիր 4: Գլանին ներգծված է խորանարդ այնպես, որ նրա անկյունագծի ծայրակետերը համընկնում են գլանի հիմքերի կենտրոնների հետ, իսկ մնացած բոլոր գագաթները գտնվում են կողմնային մակերևույթի վրա: Գտնել գլանի լրիվ մակերևույթի մակերեսը, եթե խորանարդի անկյունագծային հատույթի մակերեսը հավասար է S:



նկ. 4

Լուծում: Նշանակենք $OO_1 = h$, $AF = CO = r$, $AB = a, AO_1 = a\sqrt{2}$ իսկ $OO_1 = a\sqrt{3}$, որպես խորանարդի անկյունագիծ (նկ.4):

$$S = AO \cdot AO_1 = a^2\sqrt{2},$$

որից $a^2 = \frac{S}{\sqrt{2}}$: Մյուս կողմից

$$h \cdot r = S \quad \text{կամ} \quad r^2 = \frac{S^2}{h^2} = \frac{2a^2}{3} = \frac{a^2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{3} = \frac{S\sqrt{2}}{3},$$

$$S_{լր} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi(rh + r^2) = 2\pi\left(S + \frac{S^2}{h^2}\right) =$$

$$= 2\pi\left(S + \frac{S\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{2\pi S}{3}(3 + \sqrt{2}):$$

Պատասխան՝ $\frac{2\pi S}{3}(3 + \sqrt{2})$:

Համակցված խնդիրներ կոնի և բուրգի վերաբերյալ: Այս տիպի խնդիրները լուծելու համար անհրաժեշտ է օգտվել կոնին ներգծել բուրգ և բուրգին ներգծել կոն հասկացություններից:

Բուրգը կոչվում է կոնին ներգծված (կոնը՝ բուրգին արտագծված) եթե նրանց գագաթները համընկնում են, իսկ բուրգի հիմքը ներգծված է կոնի հիմքին (նկ.5):

Այս սահմանումից հետևում է, որ կոնին ներգծած բուրգի յուրաքանչյուր կողմնային կող կոնի ծնորդ է: Եթե կոնին ներգծած է բուրգ, ապա նրանց բարձրությունները համընկնում են:

Խնդիրներ լուծելու համար սովորողներին անհրաժեշտ է իմանալ նաև հետևյալ թեորեմը. Որպեսզի բուրգին արտագծվի կոն, անհրաժեշտ է ու բավարար, որ բուրգի կողմնային կողերն ունենան հավասար երկարություններ»:

Կոնը կոչվում է բուրգին ներգծված (բուրգը՝ կոնին արտագծված), եթե կոնի և բուրգի գագաթները համընկնում են, իսկ կոնի հիմքը ներգծված է բուրգի հիմքին (նկ.6):

Այս սահմանումը ներմուծելուց հետո սովորողներին պետք է ծանոթացնել հետևյալ թեորեմին, որը կարևոր է խնդիրներ լուծելու համար:

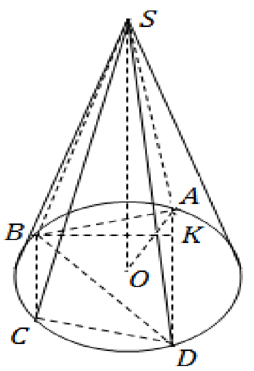
Թեորեմ: Որպեսզի բուրգին հնարավոր լինի ներգծել կոն, անհրաժեշտ է ու բավարար, որ բուրգի հիմքին հնարավոր լինի ներգծել շրջանագիծ, իսկ բուրգի բարձրության հիմքը (գագաթի օրթոգոնալ պրոյեկցիան) լինի այդ շրջանագծի կենտրոնը:

Մասնավորապես, յուրաքանչյուր կանոնավոր բուրգի կարելի է ներգծել կոն:

Կոնին արտագծած բուրգի յուրաքանչյուր կողմնային նիստ շոշափում է նրա կողմնային մակերևույթը ծնորդով, որը միաժամանակ այդ կողմնային նիստի բարձրությունն է և անցնում է բուրգի հիմքի համապատասխան կողմի և կոնի հիմքի շրջանագծի շոշափման կետով:

Խնդիր 5: Կոնին ներգծած է $SABCD$ քառանկյուն բուրգը, որի հիմքը սեղան է $(AD||BC)$: Հայտնի է, որ $\angle BAD = 60^0$, $BC = 3a,\ AD = 8a$: Գտնել կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսը, եթե բուրգի բարձրությունը հավասար է $7a$:

Լուծում: Բուրգի հիմքը հավասարասրուն սեղան է, որովհետև այն ներգծված է կոնի հիմքի շրջանագծին (նկ.5):



նկ.5

Տանելով BK բարձրությունը ΔBKA-ից կունենանք

$$AK = \frac{AD-BC}{2} = \frac{5a}{2},$$

իսկ $$AB = \frac{AK}{COS60^0} = 5a:$$

Օգտվելով կոսինուսների թեորեմից ΔABD -ի մեջ

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB\cdot ADcos60^0\ ,\quad BD = 7a\ ,$$

որից հետո օգտվելով $R = \frac{BD}{2sin60^0}$ բանաձևից կստանանք $R = \frac{7a}{\sqrt{3}}$ և ΔSOA -ից, ըստ Պյութագորասի թեորեմի կունենանք

$$SA^2 = SO^2 + OA^2:$$

$$SA = \sqrt{(7a)^2 + \left(\frac{7a}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{14a\sqrt{3}}{3}\ :$$

Այնուհետև կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսը կլինի՝

$$S = \pi R\cdot SA = 98\frac{\pi a^2}{3}\ :$$

Պատասխան՝ $98\frac{\pi a^2}{3}$:

Գրականություն

1. Шаригин И.Ф., Голубев В. И. Факультативный курс по математике 11. М., 1991, 383 ст.
2. Շարիգին Ի.Ֆ.: Երկրաչափություն 11 բնագիտամաթեմատիկական հոսք: Երևան, 2009, 111 էջ
3. Շարիգին Ի.Ֆ.:Երկրաչափություն 12 բնագիտամաթեմատիկական հոսք: Երևան, 2009, 160 էջ

Տեղեկություններ հեղինակի մասին.

Գայանե Առաքելյան - Շուշիի տեխնոլոգիական համալսարանի SS և բնագիտական առարկաների ամբիոնի ասիստենտ

E-mail: era88@inbox.ru

Հոդվածը տպագրության է երաշխավորել խմբագրական կոլեգիայի անդամ, ֆ.մ. գ.թ., Գ.Հ.Սահակյանը: