ՀՏԴ 371.31:51, 378.147:51 *Մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկա*

ԱՆՈՐՈՇ ԻՆՏԵԳՐՄԱՆ ՄԻ ՊԱՐԶԱԳՈՒՅՆ ՕՐԻՆԱԿ

Միքայել ԱՊՐԵՍՅԱՆ

Բանալի բառեր: *Անորոշ ինտեգրալ, ֆունկցիա, նախնական, ածանցյալ, հաստատուն, արկսինուս, արկտանգենս, ուղիղ և հակադարձ, տեղադրում, դիֆերենցիալ, եռանկյուն, անկյուն:*
Ключевые слова: *Неопределенный интеграл, функция, первообразная, производная, постоянная, арксинус, арктангенс, прямое и обратное, подстановка, дифференциал, треугольник, угол.*
Keywords:*indefinite integral,function,primary,derivative,constant,arcsine,arctangent, direct and inverse, substitution,differential,triangular,angle. antiderivative.*

М.Апресян

ОДИН ПРОСТОЙ ПРИМЕР ИНТЕГРИРОВАНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

В работе рассмотрен один простой пример интегрирования неопределенного интеграла с его разными решениями. Нет таких правил и формул, с помощью которых возможно найти первообразную произвольной функции, если она существует. Поэтому важно знать разные методы для нахождения первообразной функции. Работа состоит из ряда таких приемов. Рассмотренные способы не являются окончательными.Возможно аналогичные и другие решения.

M. Apresyan

A SIMPLE EXAMPLE OF INTEGRATION OF THE INDEFINITE INTEGRAL

The paper considers a simple example of the integration of the indefinite integral with different solutions. There are no rules and formulas, with enable to find an antiderivative of arbitrary function, if it is exists. This states the importance of different methods in finding an arbitrary function. A number of these methods are presented in the given work. Considered methods are not final . Probably exist similar other solutions.

Աշխատանքում դիտարկվում է անորոշ ինտեգրման մի պարզագույն օրինակ՝ իր տարբեր լուծումներով:
Չկան այնպիսի կանոններ և բանաձևեր, որոնց միջոցով հնարավոր լինի գտնելու ցանկացած ֆունկցիայի նախնականը: Այդ իմաստով կարևոր է տիրապետել նախնականը գտնելու տարբեր մեթոդների, տարբեր հնարքների: Աշխատանքը պարունակում է մի շարք այդպիսի հնարքներ:
Դիտարկված մոտեցումները վերջնական չեն: Հնարավոր են նմանօրինակ այլ լուծումներ:

Մարդիկ ամեն օր հանդիպում են զանազան խնդիրների: Այդ խնդիրների դժվարության աստիճանի գնահատումը պայմանավորված է նրանց լուծմամբ: Որոշ դեպքերում բարդ խնդիրների պարզագույն լուծումները այդ խնդիրները դարձնում են ավելի հետաքրքիր, ավելի «հեշտ»: Առանձին ուշադրություն են ներկայացնում հատկապես այն խնդիրները, որոնք առաջին հայացքից շատ պարզ են և ունեն բազմաթիվ լուծումներ: Գիտության տարբեր բնագավառներում հանդիպող խնդիրները ավելի հետաքրքիր են դառնում, երբ նրանց լուծումները պարզ են ու համոզիչ, ընդհանուր ու անհավանական:

Մաթեմատիկայում, սովորաբար խնդիրները դիտարկվում են երկու տեսանկյունից՝ ուղիղ և հակադարձ խնդիրներ: Այսպես, տրված ֆունկցիայի ածանցյալը գտնելը և տրված ածանցյալով ֆունկցիայի վերականգնման խնդիրը հանդիսանում են ուղիղ և հակադարձ խնդիրներ: Հայտնի է, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան X միջակայքում ունի որևէ $F(x)$ նախնական, ապա նա այդ միջակայքում ունի անթիվ բազմությամբ նախնականներ, որոնք ստացվում են $F(x)$ ֆունկցիային կամայական C հաստատուն գումարելով:

Դիտարկենք հետևյալ անորոշ ինտեգրալը՝ [2]

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

Լուծում 1: Քանի որ $d\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$, ապա

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = 2\int \frac{dx}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}} = 2\int \frac{d\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} = 2\arcsin\sqrt{x} + C$$

Լուծում 2: Քանի որ $x - x^2 = -\left(\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$, ապա

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x - x^2}} = \int \frac{d\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} = \arcsin\frac{x - 0{,}5}{0{,}5} + C = \arcsin(2x-1) + C$$

Լուծում 3: Քանի որ $4x - 4x^2 = 1 - (2x - 1)^2$, ապա

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = 2\int \frac{dx}{2\sqrt{x - x^2}} = 2\int \frac{dx}{\sqrt{4x - 4x^2}} = 2 \cdot \frac{1}{2}\int \frac{d(2x-1)}{\sqrt{1 - (2x-1)^2}} = \arcsin(2x-1) + C$$

Լուծում 4: Քանի որ $d\sqrt{1-x} = -\frac{dx}{2\sqrt{1-x}}$, ապա

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = -2 \cdot \int \frac{-dx}{2 \cdot \sqrt{1-x}\sqrt{x}} = -2\int \frac{d\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} =$$

$$= -2\int \frac{d\sqrt{1-x}}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{1-x}\right)^2}} = -2\arcsin\sqrt{1-x} + C$$

Բերված չորս լուծումներում պարզագույն ձևափոխությունների օգնությամբ ինտեգրալի հաշվումը բերվեց աղյուսակային ինտեգրալների: Շարունակելով տարբեր մոտեցումները, այժմ կիրառենք փոփոխականի փոխարինման կամ տեղադրման մեթոդը:

Լուծում 5: Կատարելով փոփոխականի փոխարինում

$$x = \sin^2 t,\ t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

բանաձևով, կստացվի $dx = 2\sin t\cos t\,dt,\ 1 - x = 1 - \sin^2 t = \cos^2 t$,

$\sin t = \sqrt{x},\ t = \arcsin\sqrt{x}$, հետևաբար

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int \frac{2\sin t\cos t\,dt}{\sin t\cos t} = 2\int dt = 2t + C = 2\arcsin\sqrt{x} + C$$

Լուծում 6: Կատարելով փոփոխականի մեկ այլ փոխարինում $x = \cos^2 t,\ t \in [0, \pi]$

բանաձևով, կստանանք $dx = -2\sin t\cos t\,dt,\ 1 - x = 1 - \cos^2 t = \sin^2 t$,

$\cos t = \sqrt{x},\ t = \arccos\sqrt{x}$, հետևաբար

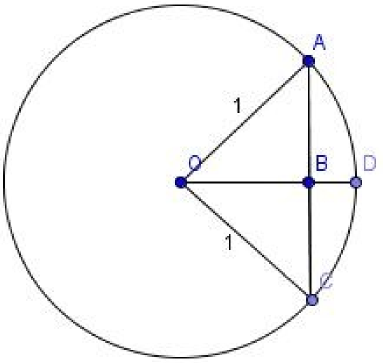
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = -\int \frac{2\sin t\cos t\,dt}{\sin t\cos t} = -2\int dt = -2t + C = -2\arccos\sqrt{x} + C$$

Նկատենք, որ $0 < x < 1$:

Դիտողություն : Դժվար չէ նկատել, որ տեղի ունի հետևյալ պայմանը

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 + \left(\sqrt{1-x}\right)^2 = 1$$

Դիտողության համաձայն ստացվում է նախնականի որոնման հետաքրքիր մեկնաբանություն:



$\arcsin\sqrt{x}$ անկյունը նկարում պատկերված OAB ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյունն է.

$AB = \sqrt{x}$, $OB = \sqrt{1-x}$, $OA = 1$:

Այդ նույն սուր անկյունը արտահայտվում է նաև հետևյալ տեսքերով.

$$arctg\sqrt{\frac{x}{1-x}},\ arcctg\sqrt{\frac{1-x}{x}},\ \arccos\sqrt{1-x}:$$

Լուծում 7:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int\frac{2}{1}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{x(1-x)}} = 2\int\frac{1}{(1-x)+x}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{x(1-x)}} =$$

$$=2\int\frac{1}{1+\frac{x}{1-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{1-x}}}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}dx = 2\int d\left(arctg\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right) = 2arctg\sqrt{\frac{x}{1-x}}+C$$

Լուծում 8:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int\frac{2}{1}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{x(1-x)}} = 2\int\frac{1}{x+(1-x)}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{x(1-x)}} =$$

$$=2\int\frac{-1}{1+\frac{1-x}{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{x}}}\cdot\frac{-1}{x^2}dx = 2\int d\left(arcctg\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right) = 2arcctg\sqrt{\frac{x}{1-x}}+C$$

Լուծում 9:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int\frac{dx}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}} = 2\int\frac{-1}{\sqrt{1-(1-x)}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\cdot(-1)dx =$$

$$=2\int d\left(\arccos\sqrt{1-x}\right) = 2\arccos\sqrt{1-x}+C$$

Լուծում 10: Կատարելով փոփոխականի փոխարինում

$$\sqrt{\frac{x}{1-x}} = tgt$$

բանաձևով, կստանանք

$$\frac{x}{1-x} = tg^2t;\ t = arctg\sqrt{\frac{x}{1-x}};\ x = tg^2t - xtg^2t;\ (1+tg^2t)x = tg^2t,$$

$$x\cdot\frac{1}{\cos^2 t} = \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t};\ x = \sin^2 t;\ dx = 2\sin t\cos t dt;\ \sqrt{x(1-x)} = \sin t\cos t,$$ հետևաբար

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int\frac{2\sin t\cos t dt}{\sin t\cos t} = 2\int dt = 2t + C = 2arctg\sqrt{\frac{x}{1-x}} + C:$$

Լուծում 11: Կատարելով փոփոխականի փոխարինում

$$\sqrt{\frac{1-x}{x}} = ctgt$$

բանաձևով, կստանանք $t = arcctg\sqrt{\frac{1-x}{x}}$, $\frac{1-x}{x} = ctg^2t;\ 1-x = xctg^2t$,

$$1 = x(1+ctg^2 t);\ 1 = x\cdot\frac{1}{\sin^2 t};\ x = \sin^2 t,\ dx = 2\sin t\cos t dt;\ \sqrt{x(1-x)} = \sin t\cos t,$$

հետևաբար

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int\frac{2\sin t\cos t dt}{\sin t\cos t} = 2\int dt = 2t + C = 2arcctg\sqrt{\frac{1-x}{x}} + C :$$

Լուծում12: Նման արդյունք կարելի է ստանալ կիրառելով Էյլերի երրորդ տեղադրումը [1]

Նշանակելով $\sqrt{x(1-x)} = tx;\ t = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$, կստանանք

$x(1-x) = t^2x^2;\ 1-x = t^2x;\ 1 = x(1+t^2)$

$x = \frac{1}{1+t^2};\ \sqrt{x(1-x)} = \frac{t}{1+t^2};\ dx = -\frac{2tdt}{(1+t^2)^2}$,

հետևաբար

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int\frac{1+t^2}{t}\cdot\frac{-2tdt}{(1+t^2)^2} = -2\int\frac{dt}{1+t^2} = 2arcctgt + C = 2arcctg\sqrt{\frac{1-x}{x}} + C:$$

Էյլերի տեղադրումների կիրառումը շատ հաճախ հանգեցնում է մեծածավալ հաշվումների: Հնարավորության դեպքում պետք է խուսափել Էյլերի տեղադրումներից և կիրառել այլ տեղադրումներ:

Լուծում13: Եթե $x = 0,5 - t$, ապա $1 - x = 0,5 + t$; $t = 0,5 - x$; $dx = -dt$, հետևաբար

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = -\int\frac{dt}{\sqrt{(0,5-t)(0,5+t)}} = -\int\frac{dt}{\sqrt{0,25-t^2}} = \arccos 2t + C = \arccos(1-2x) + C:$$

Լուծում14: Եթե $x = 0,5 + at; a \neq 0$, ապա $1 - x = 0,5 - at; at = x - 0,5;\ dx = d(at)$,

հետևաբար

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int\frac{d(at)}{\sqrt{(0,5+at)(0,5-at)}} = \int\frac{d(at)}{\sqrt{0,25-(at)^2}} = \arcsin 2at + C = \arcsin(2x-1) + C:$$

Լուծում15: Եթե $x = 0,5 - at;\ a \neq 0$, ապա $1 - x = 0,5 + at; at = 0,5 - x;\ dx = -d(at)$ հետևաբար

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = -\int\frac{d(at)}{\sqrt{0,25-(at)^2}} = \arccos 2at + C = \arccos(1-2x) + C:$$

Լուծում16: Եթե $\sqrt{x} = t$, ապա $x = t^2; dx = 2tdt$, հետևաբար

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int\frac{2tdt}{t\sqrt{1-t^2}} = 2\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 2\arcsin t + C = 2\arcsin\sqrt{x} + C:$$

Լուծում17: Եթե $\sqrt{1-x} = t$, ապա $1 - x = t^2; x = 1 - t^2; dx = -2tdt$, հետևաբար

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int\frac{-2tdt}{t\sqrt{1-t^2}} = -2\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 2\arccos t + C = 2\arccos\sqrt{1-x} + C :$$

Լուծում18: Եթե $x = 0,5 + t$, ապա $1 - x = 0,5 - t$; $t = x - 0,5; dx = dt$, հետևաբար

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int\frac{dt}{\sqrt{(0,5+t)(0,5-t)}} = \int\frac{dt}{\sqrt{0,25-t^2}} = \arcsin 2t + C = \arcsin(2x-1) + C:$$

Նախնականները որոնելու միջոց է նաև ֆունկցիայի ածանցյալ կամ ֆունկցիայի դիֆերենցիալ գտնելը: Բավական է բերել միայն հետևյալ օրինակները.

$$(\arcsin(2x-1))' = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}},\ (\arcsin\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}},\ \left(2arctg\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}},$$

$$\left(-2\arccos\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}, \quad \left(-2arcctg\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}},$$

$$\left(\arcsin 2\sqrt{x(1-x)}\right)' = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}:$$

Լուծում19: Եվս մեկ անգամ վերադառնալով վերևում պատկերված նկարին կարելի է դիտարկել AOC հավասարասրուն եռանկյունը: Այդ եռանկյան 1 և 1 կողմերով կազմված անկյունը նշանակելով φ -ով, կիրառելով կոսինուսների թեորեմը կստանանք.

$$\left(2\sqrt{x}\right)^2 = 1+1-2\cos\varphi, \; 4x = 2-2\cos\varphi, \; 2x = 1-\cos\varphi,$$

$$\cos\varphi = 1-2x, \; \varphi = \arccos(1-2x):$$

Քանի որ $\left(\arccos(1-2x)\right)' = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$, ապա $\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \arccos(1-2x)+C$:

Այնուհետև, դժվար չէ նկատել, որ

$$\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sqrt{1-(1-2x)^2} = 2\sqrt{x(1-x)}:$$

Առանց դժվարության կստացվի, որ $\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \arcsin 2\sqrt{x(1-x)}+C$:

Դիտարկված մոտեցումները վերջնական չեն: Հնարավոր են նմանօրինակ այլ լուծումներ:
Խնդրի լուծումը տարբեր եղանակներով ոչ միայն ձեռք բերված գիտելիքների և կարողությունների համակարգման գործընթաց է, այլև հանդիսանում է ստեղծագործական մտքի զարգացման լավագույն միջոց, հմտությունների ձեռք բերման հնարավորություն:

Գրականություն

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2. М., 2001. - 810 с.
2. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М., 1972. 544с.

Տեղեկություններ հեղինակի մասին
Միքայել Ապրեսյան-ԱրՊՀ, Մաթեմատիկայի ամբիոնի ավագ դասախոս
E-mail: 58AME@mail.ru

Հոդվածը տպագրության է երաշխավորել խմբագրական կոլեգիայի անդամ, ֆ.մ. գ.թ., Գ.Հ.Սահակյանը: