УДК: 517.9 **Математика**

О НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМАХ СРАВНЕНИЯ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Георгий САAКЯН

Ключевые слова: *однородная линейная система дифференциальных уравнений первого порядка, теорема сравнения, нули компонент решений.*

Բանալի բառեր` *առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների գծային համասեռ համակարգ, համեմատության թեորեմ, լուծումների կոմպոնենտների զրոներ:*

Keywords: *linear homogeneous system of differential equations of first order, comparison theorem, zeros of components of the solutions.*

Գ. Սահակյան

ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԵՐԿՉԱՓ ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ՈՐՈՇ ՀԱՄԵՄԱՏՈՒԹՅԱՆ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ենթադրելով, որ

$$\begin{cases} y_1' = p(t) y_2, \\ y_2' = r(t) y_1, \end{cases}$$

համակարգի գործակիցները անընդհատ են վերջավոր $[a,b]$ *հատվածի վրա, մոնոտոն են և ունեն հաստատուն նշաններ, ապացուցվում են համեմատության թեորեմներ, որոնք թույլ են տալիս որոշ համակարգերի լուծումների կոմպոնենտների զրոների քանակի որոշումը բերել նրանց որոշման` բացահայտորեն ինտեգրվող համակարգերի լուծումների համապատասխան կոմպոնենտների համար:*

G.Sahakyan

ABOUT SOME COMPARISON THEOREMS FOR TWO-DIMENTIONAL LINEAR SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

Assuming continuity, monotony and sign-constancy of coefficients of the second order linear

$$\begin{cases} y_1' = p(t) y_2, \\ y_2' = r(t) y_1, \end{cases}$$

on a finite interval $[a,b]$, *the comparison theorems, which allow to reduce the determination of zeros of the components of the solutions of some systems to their definition for the corresponding components of obviously integrable systems are proved.*

Предполагая непрерывность, монотонность и знакопостоянство коэффициентов линейной однородной системы дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} y_1' = p(t) y_2, \\ y_2' = r(t) y_1, \end{cases}$$

на конечном отрезке $[a,b]$, *доказываются теоремы сравнения, позволяющие свести определение нулей компонент решений некоторых систем к их определению для соответствующих компонент явно интегрируемых систем.*

Поведение нулей компонент решений системы

$$\begin{cases} y_1' = p(t) y_2, \\ y_2' = r(t) y_1, \end{cases} \tag{1}$$

где $p(t), r(t) \in C[a,b]$, и связанные с ним вопросы осцилляции и неосцилляции решений, до сих пор полностью не исследованы и изучаются различными математиками (см., например, [1]- [5]).

Цель настоящей работы – доказать для рассматриваемых систем теоремы сравнения, связывающие числа нулей компонент решений этих систем.

Для дальнейшего изложения нам понадобятся следующие утверждения.

Лемма 1. (см., например, [6, стр. 128]). *Если* $p_0,\ p_0', r_0 \in C[a,b]$, *то уравнение*

$$z'' + p_0(t)z' + r_0(t)z = 0 \tag{2a}$$

равносильно уравнению

$$y'' + q(t)y = 0, \tag{2b}$$

в котором

$$q(t) = -\frac{p_0^2(t)}{4} - \frac{p_0'(t)}{2} + r_0(t), \tag{2c}$$

т.е. всякому решению $z(t)$ *уравнения* (2a) *соответствует одно и только одно решение* $y(t)$ *уравнения* (2b), *задаваемое формулой*

$$y(t) = z(t)e^{\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} p_0(\tau)d\tau}, \tag{2d}$$

где t_0*-произвольная точка из отрезка* $[a,b]$.

Заметим, что из соотношения (2d) следует, что *нули функций* $y(t)$ *и* $z(t)$ *на отрезке* $[a,b]$ *совпадают.*

Теорема Штурма о сравнении (см, например [6, стр. 134]). *Пусть даны два дифференциальных уравнения*

$$y'' + q_1(t)y = 0$$

и

$$y'' + q_2(t)y = 0,$$

причем $q_2(t) \ge q_1(t)$. *Тогда между двумя последовательными нулями решения первого уравнения обязательно лежит по крайней мере один нуль любого решения второго уравнения.*

Теорема 1 (см., [7]). *Если в системе* (1) $p, r \in C[a,b]$ *и* $p(t)\cdot r(t) \neq 0$ *на отрезке* $[a,b]$, *то между всякими соседними нулями любой из компонент нетривиального решения системы* (1) *находится ровно один нуль другой компоненты того же решения (нули компонент перемежаются).*

Из теоремы 1, в частности, следует, что если n_i $(i=1,2)$ означает число нулей i-ой компоненты нетривиального решения системы (1) и $n_i \ge 1$ $(i=1,2)$, то либо $n_1 = n_2$, либо $|n_1 - n_2| = 1$,

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} u_1' = p(t)u_2, \\ u_2' = r(t)u_1, \end{cases} \tag{3}$$

предположив, что $p,\ r \in C^2[a,b]$. Дифференцируя по t первое уравнение системы (3), получим

$$u_1'' - p'(t)u_2 - p(t)u_2' = 0. \tag{4}$$

Далее, выразив u_2 и u_2' из уравнений системы (3) и затем, подставив найденные значения в уравнение (4), получим следующее уравнение

$$u_1'' - \frac{p'(t)}{p(t)}u_1' - p(t)r(t)u_1 = 0. \tag{5}$$

Обозначим

$$k(t) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{p'(t)}{p(t)}, \tag{6}$$

тогда нетрудно проверить, что имеет место условие леммы 1, согласно которой уравнение (5) можно привести к следующему равносильному уравнению

$$y'' + q(t)y = 0, \tag{7}$$

в котором, с учетом (2c) и (6), будем иметь

$$q(t) = -k^2(t) - k'(t) - p(t)r(t), \tag{8}$$

причем, согласно (2d), компонента $u_1(t)$ всякого решения системы уравнений (1.3) будет связана с решением $y(t)$ уравнения (7) соотношением

$$y(t)=u_1(t)e^{\int_{t_0}^{t}k(\tau)d\tau},$$

где t_0 - произвольная точка из интервала $[a,b]$. Из последнего соотношения следует, что *нули функций $u_1(t)$ и $y(t)$ на отрезке $[a,b]$ совпадают.*

Рассмотрим теперь системы уравнений

$$\begin{cases} y_1' = p_1(t)y_2, \\ y_2' = r_1(t)y_1, \end{cases} \tag{9a}$$

и

$$\begin{cases} z_1' = p_2(t)z_2, \\ z_2' = r_2(t)z_1. \end{cases} \tag{9b}$$

Здесь, и всюду в дальнейшем, будем предполагать, что имеют место условия

$$p_1(t)>0,\ r_1(t)<0,\ i=1,2.$$

Имеет место

Теорема 2. *Пусть в системах* (9a) и (9b) $p_i, r_i \in C^2[a,b]\ (i=1,2)$, *и*

$$P(t)=\frac{p_2(t)}{p_1(t)}.$$

Если имеют место условия:

1. $p_i'(t)\le 0,\ r_i'(t)\ge 0,\qquad (p_i'(t)\ge 0,\ r_i'(t)\le 0),\ i=1,2,$
2. $P'(t)\ge 0 \qquad (P'(t)\le 0),$
3. $\left(\ln P(t)\right)''\ge 0,$
4. $p_1(t)\cdot r_1(t)\equiv p_2(t)\cdot r_2(t),$

$\vec{u}(t)=\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t)\end{pmatrix}$ *и* $\vec{v}(t)=\begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t)\end{pmatrix}$ *- соответственно нетривиальные решения системы* (9a) *и* (9b)*, то*

a) *между всякими соседними нулями $u_1(t)$ находится хотя бы один нуль $v_1(t)$,*

b) *между всякими соседними нулями $v_2(t)$ находится хотя бы один нуль $u_2(t)$.*

Доказательство. Пусть $\vec{u}(t)=\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t)\end{pmatrix}$ *и* $\vec{v}(t)=\begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t)\end{pmatrix}$ соответственно нетривиальные решения системы (9a) и (9b). Предположим, что имеют место условия

$$p_i'(t)\le 0,\ r_i'(t)\ge 0\ (i=1,2),\ \text{и}\ P'(t)\ge 0.$$

(аналогично рассматривается и второй случай). Повторив вышеизложенные рассуждения к каждой из систем (9a) *и* (9b), и, обозначив

$$k_i(t)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{p_i'(t)}{p_i(t)}, \tag{10}$$

$$q_i(t)=-k_i^2(t)-k_i'-p_i(t)r_i(t),\ i=1,2. \tag{11}$$

получим соответствующие им уравнения:

$$y''+q_1(t)y=0 \tag{12a}$$

и

$$z''+q_2(t)z=0. \tag{12b}$$

Соотношения, связывающие первые компоненты решений систем (9a) и (9b) с решениями соответствующих им уравнений (12a) и (12b), будут иметь вид:

$$y(t) = u_1(t) e^{\int_{t_0}^{t} k_1(\tau) d\tau} \tag{13a}$$

и

$$z(t) = v_1(t) e^{\int_{t_0}^{t} k_2(\tau) d\tau}, \tag{13b}$$

где t_0 - произвольная точка из интервала $[a, b]$. Согласно предположениям и (10), будем иметь

$$k_i(t) \geq 0, \quad (i = 1,2). \tag{14}$$

Поскольку $P'(t) \geq 0$, то, подставив вместо $P(t)$ в это неравенство $\dfrac{p_2(t)}{p_1(t)}$ и, упростив, получим

$$\frac{p'_1(t)}{p_1(t)} \leq \frac{p'_2(t)}{p_2(t)}. \tag{15}$$

Учитывая (10), (14) и (15), получим, что для любого $t \in [a,b]$

$$k_1(t) \geq k_2(t) \geq 0. \tag{16}$$

Следовательно, для любого $t \in [a,b]$ будет верно неравенство

$$k_1^2(t) \geq k_2^2(t). \tag{17a}$$

Далее, так как в силу условий теоремы $(\ln P(t))'' \geq 0$, то найдем, что

$$\left(\frac{P'(t)}{P(t)} \right)' \geq 0.$$

Подставив вместо $P(t)$ в это неравенство $\dfrac{p_2(t)}{p_1(t)}$ и, упростив, получим, что

$$\left(\frac{p'_2(t)}{p_2(t)} - \frac{p'_1(t)}{p_1(t)} \right)' \geq 0,$$

или, с учетом (10)

$$k'_1(t) \geq k'_2(t). \tag{17b}$$

И, наконец, так как по условию теоремы $p_1(t) \cdot r_1(t) \equiv p_2(t) \cdot r_2(t)$ при $t \in [a,b]$, то учитывая неравенства (17a) и (17b), получим

$$q_2(t) - q_1(t) = \left(k_1^2(t) - k_2^2(t)\right) + \left(k'_1(t) - k'_2(t)\right) + p_1(t) r_1(t) - p_2(t) r_2(t) \geq 0$$

или

$$q_2(t) \geq q_1(t).$$

Из условий теоремы и обозначений (11) будет также следовать, что $q_1, q_2 \in C[a,b]$. Таким образом, для уравнений (12a) и (12b) имеют место условия теоремы сравнения Штурма, согласно которой *между соседними нулями всякого нетривиального решения* $y(t)$ *уравнения* (12a)*, а значит, согласно* (13a), *и* $u_1(t)$*, найдется хотя бы один нуль для всякого нетривиального решения* $z(t)$ *уравнения* (12b)*, а значит, согласно* (13b)*, и* $v_1(t)$.

Для доказательства утверждения b) достаточно повторить вышепроведенные рассуждения применительно к системам (9a) и (9b), записав их в виде:

$$\begin{cases}(-y_2)' = -r_1(t)y_1,\\ y_1' = -p_1(t)(-y_2).\end{cases}$$

и

$$\begin{cases}(-z_2)' = r_2(t)(-z_1),\\ (-z_1)' = p_2(t)(-z_2).\end{cases}$$

Теорема доказана.

Обозначим через n_i - число нулей i-ой компоненты нетривиального решения системы (9a), а через m_i $(i=1,2)$ - число нулей i-ой компоненты нетривиального решения системы (9b). Имеем место

Теорема 3. *Пусть в системах* (9a) и (9b) $p_i, r_i \in C^2[a,b]$ $(i=1,2)$, *и*

$$P(t) = \frac{r_2(t)}{p_1(t)},$$

а также имеют место условия:

1. $p_i(t), -r_i(t),\ (i=1,2)$ *-монотонные одного характера*
2. $P(t)$ *-монотонная,* ,
3. $\left(\ln P(t)\right)'' \geq 0$, *если характеры монотонности в условиях 1 и 2 не совпадают, и* $\left(\ln P(t)\right)'' \leq 0$ *- в противном случае,*
4. $p_1(t)\cdot r_1(t) \equiv p_2(t)\cdot r_2(t)$,

Тогда, если компоненты нетривиального решения системы (9a) *имеют нули, причем* $n_1 = n_2$ *или* $n_1 = n_2 + 1$, *то их число совпадет с числом нулей соответствующей компоненты любого нетривиального решения системы* (9b) *или будет отличаться на единицу.*

Доказательство. Заметим, прежде всего, что если характеры монотонностей в условиях 1 и 2 не совпадают, то утверждение теоремы будет верным согласно теореме 2. Случай одинаковых характеров монотонности можно свести к предыдущему, поменяв местами рассматриваемые системы. В этом случае будем иметь $P(t) = \frac{r_1(t)}{p_2(t)}$, и при этом, очевидно, изменится характер монотоности функции $P(t)$, а условие $\left(\ln P(t)\right)'' \leq 0$ заменится условием $\left(\ln P(t)\right)'' \geq 0$.

По условию теоремы $n_i, m_i > 0$ $(i=1,2)$. Из теоремы 2 будет следовать, что при выполнении условий теоремы имеют место неравенства

$$m_1 \geq n_1,\ n_2 \geq m_2. \tag{18}$$

Предположим теперь, что $n_1 = n_2$. Согласно теореме 1, будут верны следующие условия:

$$m_1 = m_2 \text{ или } |m_1 - m_2| = 1. \tag{19}$$

Если $m_1 = m_2$, то с учетом (18) будем иметь

$$n_1 = n_2 \geq m_2 = m_1,$$

откуда и из (18) будет следовать, что

$$m_1 = n_1,\ m_2 = n_2.$$

Если же $|m_1 - m_2| = 1$, то легко найти, что в этом случае или $m_1 = n_1,\ m_2 = n_2 - 1$, или $m_1 = n_1 + 1,\ m_2 = n_2$.

Рассмотрим теперь случай, когда $n_1 = n_2 + 1$. Учитывая вновь (18) и (19), нетрудно показать, что возможными соотношениями в этом случае являются $m_1 = n_1,\ n_2 = m_2$. Теорема доказана.

Замечание 1. Путем вышеизложенных рассуждений нетрудно показать, что *при* $n_1 = n_2 -$ *возможны два случая:* $m_1 = n_1,\ m_2 = n_2 - 1,$ *и* $m_2 = n_2,\ m_1 = n_1 + 1.$ Таким образом, учитывая также случаи, рассмотренные в доказательстве теоремы, можно сделать вывод, *что при выполнении условий* 1-4 *теоремы, число нулей одной из компонент решений системы* (9b) *обязательно совпадет с числом нулей соответствующей компоненты решения системы* (9a).

Замечание 2. Обобщая вышеизложенннное, приходим к следующему выводу: *если имеют место условия теоремы* 3 *и компоненты нетривиального решения системы* (9a) *имеют нули, то возможны следующие случаи:*

1. $n_1 = n_2 = m_1 = m_2,$
2. $n_1 = n_2,\quad m_1 = n_1,\ m_2 = n_2 - \ ,$
3. $n_1 = n_2,\quad m_1 = n_1 + \ ,\ m_2 = n_2.$
4. $n_1 = n_2 + \ ,\ m_1 = n_1,\ n_2 = m_2,$
5. $n_1 = n_2 - \ ,\ m_1 = n_1,\ m_2 = n_2 - 1,$
6. $n_1 = n_2 - \ ,\ m_2 = n_2,\ m_1 = n_1 + 1.$

Проиллюстрируем применение теоремы 3 на следующем примере. Рассматривается задача на определение числа нулей компонент нетривиальных решений системы

$$\begin{cases} y_1' = ty_2, \\ y_2' = -t^3 y_1, \end{cases} \tag{20}$$

на отрезке $\left[\frac{\pi}{2},\ \pi\right]$. Параллельно с системой (20) рассмотрим систему

$$\begin{cases} z_1' = t^2 z, \\ z_2' = -t^2 z_1. \end{cases} \tag{21}$$

В данном случае примем

$$p_1(t) = \ ^2,\ r_1(t) = -\ ,\ p_2(t) = \ ,\ r_2(t) = -\ .$$

Заметим, что для $t \in \left[\frac{\pi}{2},\ \pi\right]$

$$p_i(t) > 0,\ r_i(t) < 0,\ (i = \ ,2).$$

Имеют место условия теоремы 3, а именно

1. $p_i'(t) > 0,\ \ r_i'(t) < 0\ \ (i = \ ,2),$
2. функция $P(t) = \frac{p_2(t)}{p_1(t)} = \frac{1}{t}$ - монотонная,
3. $p_1(t) \cdot r_1(t) \equiv p_2(t) \cdot r_2(t).$
4. $(\ln P(t))'' = \frac{1}{t^2} \geq 0.$

Непосредственным вычислением нетрудно проверить, что частным решением системы (21) будет

$$z_1(t) = \ \text{in}\left(\frac{t^3}{3}\right)\quad z_2(t) = \ \text{os}\left(\frac{t^3}{3}\right)$$

Для определения нулей первой компоненты $z_1(t)$ будем иметь

$$\frac{t^3}{3} = \pi\quad k \in\ ,$$

откуда найдем формулу для определения t

$$t = \sqrt[3]{3\pi}\ ,\kappa \in\ .$$

Учитывая условие $\frac{\pi}{2} \le t \le \pi$, найдем

$$\frac{\pi}{24} \le \kappa \le \frac{\pi}{3}.$$

Отсюда получим, что n_1-число нулей первой компоненты решения системы (21) будет равно 3-м. Нетрудно найти, что n_2- число нулей второй компоненты, также будет равно 3-м. Таким образом, $n_1 = n_2$ и, согласно замечанию 2, количество нулей компонент решений системы (21) будет определяться одним из следующих трех соотношений:

1. $m_1 = n_1 = m_2 = n_2 = 3$.
2. $m_1 = n_1 = 3$, $m_2 = n_2 - 1 = 2$.
3. $m_1 = n_1 + 1 = 4$, $m_2 = n_2 = 3$.

Ниже, на рисунках 1a и 1b, приводятся графики решений соответственно для систем (20) и (21) в среде Mathcad на отрезке $[\pi/2, \pi]$ с начальными условиями $y_1(\pi/2) = z_1(\pi/2) = -1$, $y_2(\pi/2) = z_2(\pi/2) = 1$. В данном случае, как видно из рисунка, число нулей 1-ых компонент соответственно равно 4-м и 3-м, а для 2-ых компонент решений обоих систем (первой компоненте на рисунке соответствует $y0$, а второй- $y1$) они совпадают и равны 3.

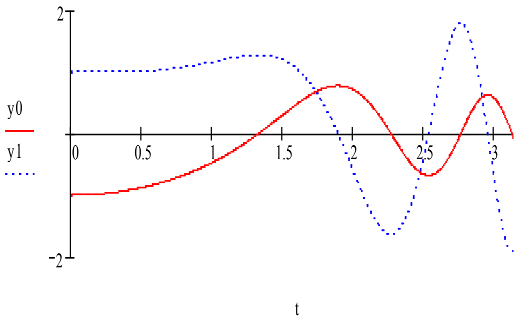

Рис. 1a

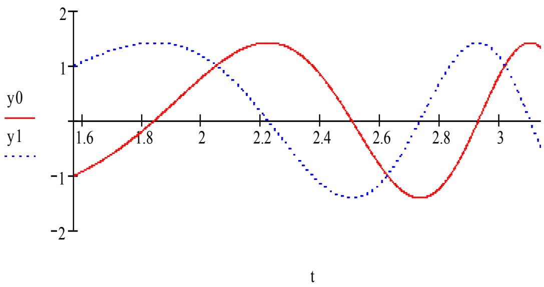

Рис. 1b

Литература

1. **Схаляхо Ч.А.,** О нулях решений одной двумерной дифференциальной системы на конечном промежутке. Дифференциальные уравнения, 1988, Т.24, N 6, с.1080-1083.
2. **Chantladze T. , Kandelaki N. and Lomtatidze A.** Oscillation and nonoscillation criteria for second order linear differential equation. Georgian Math. J. 6(1999), N 5, p. 401-414.
3. **Chuaqui M., Duren P., Osgood B., Stowe D.,** Oscillation of solutions of linear differential equations. \it Bull. Anst. Math. Soc., 79(2009), p. 161-169.
4. **Lomtatidze A. and Partsvania N.,** Oscillation and nonoscillation criteria two-dimentional systems of first linear ordinary differential equations, Georgian Math. J., 6 (1999), N 3, p. 285-298.
5. **Polak L.,** Oscillation and nonoscillation criteria for two-dimentional, Georgian Math. J., 11 (2004), N1, p. 137-154.
6. **Трикоми Ф.** Дифференциальные уравнения: М.: УРСС, 2007.
7. **Саакян Г.Г.** О некоторых свойствах решений канонической системы Дирака, Ученые записки ЕрГУ, 2007, N 2, с. 3-11.

Сведения об авторе:
Георгий Саакян - к.ф.м.н., доцент кафедры прикладной математики и информатики, АрГУ
e-mail: ter_saak_george@mail.ru

Статья рекомендована к печати членом редакционной коллегии, д.ф.м.н., А.М. Хачатряном.