УДК: 517.9 *Математика*

О ПОСТРОЕНИИ ДВУМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАДАННЫМ ХАРАКТЕРОМ ОСЦИЛЛЯЦИИ

Георгий СААКЯН

Բանալի բառեր՝ *դիֆերենցիալ հավասարումների երկչափ գծային համասեռ համակարգ, օսցիլյացիա, ոչ օսցիլյացիա:*

Ключевые слова: *двумерная линейная однородная система дифференциальных уравнений, осцилляция, неосцилляция.*

Keywords*. Two-dimentional linear homogeneous system of differential equations, oscillation, non-oscillation.*

ՏՎԱԾ ՕՍՑԻԼՅԱՑԻԱՅԻ ԲՆՈՒՅԹՈՎ ԵՐԿՉԱՓ ԳԾԱՅԻՆ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ԿԱՌՈՒՅՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Գ. Սահակյան

Աշխատանքում հիմնավորվում է միայն տված հատվածում կամ նրանից դուրս օսցիլյացվող երկչափ գծային համասեռ դիֆֆերենցիալ հավասարումների համակարգերի կառուցման մեթոդ: Դիտարկվում են նաև

$$\begin{cases} y_1' = f(t)y_2, \\ y_2' = g(t)y_1, \end{cases}$$

տեսքի համակարգերի օսցիլյացիոն հատկությունները այն ենթադրումյամբ, որ $f(t) > 0$, *իսկ* $g(t)$ – *ն՝ որևէ բազմանդամ է:*

ON THE CONSTRUCTION OF TWO-DIMENTIONAL LINEAR SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH THE GIVEN NATURE OF THE OSCILLATIONSON

G. Sahakyan

In our work it is substantiate a method of constructing the two-dimentional homogeneous linear systems of differential equations, which are oscillated only in given segment or outside of it. We also consider oscillated properties of this kind of systems

$$\begin{cases} y_1' = f(t)y_2, \\ y_2' = g(t)y_1, \end{cases}$$

with the assumption, that $f(t) > 0$, *and* $g(t)$ *is a polynomial.*

В работе обосновывается метод построения двумерных линейных однородных систем дифференциальных уравнений, осциллирующих лишь на заданном отрезке или вне отрезка. Рассматриваются также осцилляционные свойства систем вида

$$\begin{cases} y_1' = f(t)y_2, \\ y_2' = g(t)y_1, \end{cases}$$

на полуоси $t \geq 0$ *в предположении, что* $f(t) > 0$, *а* $g(t)$ – *некоторый многочлен.*

Осцилляционные свойства системы

$$\begin{cases} y_1' = p(t)y_2, \\ y_2' = r(t)y_1, \end{cases} \tag{1}$$

до сих пор полностью не исследованы и продолжают изучаться (см., например, [1]-[5]). Цель настоящей работы –

1. построить систему (1) так, чтобы она осциллировала бы лишь на заданном отрезке $[a, b]$ или вне отрезка,
2. рассмотреть осцилляционные свойства системы (1) в предположении, что $p(t) > 0$, а $r(t)$ является многочленом.

Здесь, и всюду в дальнейшем, будем предполагать, что имеют место условия:

$$p(t) > 0,\ r(t) < 0. \tag{2}$$

Определение 1. Нетривиальное решение $\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ системы (1) назовем осциллирующим на $[a,b]$, если каждая из его компонент обращается в нуль в некоторой точке $[a,b]$, т.е. $y_i(t_i) = 0,\ t_i \in [a,b],\ i = 1,2.$

Определение 2. Нетривиальное решение системы (1) называется осциллирующим (см., например, [2]), если каждая из его компонент имеет последовательность нулей, стремящейся к бесконечности; в противном случае называется неосциллирующим.

Определение 3. Система (1) называется осциллирующей, если она имеет хотя бы одно осциллирующее решение, в противном случае система (1) называется неосциллирующей.

Пусть m_i $(i = 1,2)$ означает число нулей i-ой компоненты нетривиального решения системы (1). Для дальнейшего изложения нам понадобятся следующие теоремы (см. [4], [5]) **.**

Теорема 1. *Если в системе* (1) $p(t)$ *и* $r(t)$ *знакопостоянны на отрезке* $[a,b]$ *и имеют одинаковые знаки, то компоненты всякого нетривиального решения системы* (1) *не могут иметь на отрезке* $[a,b]$ *более одного нуля, причем наличие нуля у одной из компонент исключает ее наличие у другой.*

Теорема 2. *Пусть в системе* (1) $p, r \in C^2[a,b]$,

$$P(t) = \sqrt{-\frac{p(t)}{r(t)}},$$

1. $p'(t) \le 0,\ r'(t) \ge 0, \qquad (p'(t) \ge 0,\ r'(t) \le 0),$
2. $P'(t) \ge 0 \qquad (P'(t) \le 0),$
3. $(\ln P(t))'' \ge 0$.

Тогда, если уравнения

$$\int_a^t \sqrt{-p(\tau)r(\tau)}\,d\tau = \pi k,\ k \in Z \tag{3a}$$

и

$$\int_a^t \sqrt{-p(\tau)r(\tau)}\,d\tau = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z \tag{3b}$$

имеют корни на отрезке $[a,b]$, *причем* $n_1 = n_2 + 1$, *где* n_1 *- число корней уравнения* (3a), *а* n_2 *– уравнения* (3b), *то число нулей первой (второй) компоненты всякого нетривиального решения системы* (1) *на* $[a,b]$ *совпадет с числом корней уравнения* (3a) ((3b)) *или будет отличаться на единицу* ($m_i = n_i$ *или* $|m_i - n_i| = 1,\ i = 1,2$)..

Заметим, что если функция $f(x) \ge 0$, то знаки пар функций $(f(x))'$ и $\left(\sqrt{f(x)}\right)'$, а также $(\ln f(x))''$ и $\left(\ln \sqrt{f(x)}\right)''$ будут совпадать. Следовательно, в условиях теоремы 2 функцию $P(t) = \sqrt{-\frac{p(t)}{r(t)}}$ можно заменить на функцию $f(t) = -\frac{p(t)}{r(t)}$. Далее, пусть система (1) удовлетворяет условиям теоремы 2, и

$$M(t) = \int_a^t q(\tau)d\tau, \tag{4}$$

где

$$q(t) = \sqrt{-p(t)r(t)}. \tag{5}$$

Поскольку $q(t)=\sqrt{-p(t)r(t)}>0$, то на отрезке $[a,b]$

$$M(t)\geq 0,\ M'(t)\equiv q(t)>0, \tag{6}$$

и, следовательно, $M(t)$- неубываюшая функция с неотрицательными значениями. Заметим, что уравнения (3a) и (3b) с учетом (4) можно записать в виде:

$$M(t)=\pi k,\ k\in Z,\ t\in[a,b], \tag{7a}$$

и

$$M(t)=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z,\ \ t\in[a,b]. \tag{7b}$$

Далее, учитывая (6), мы можем утверждать, что множеством значений функции $M(t)$ будет отрезок $[0,M(b)]$. Тогда множество значений $k\in Z$, удовлетворяющих уравнению (7a) определится из неравенства

$$0\leq\kappa\leq\frac{M(b)}{\pi},$$

а множество значений $n\in Z$, удовлетворяющих уравнению (7b) , из неравенства

$$0\leq n\leq\frac{M(b)}{\pi}-\frac{1}{2}.$$

Если принять $M=M(b)$, то из последних двух неравенств будет следовать, что число корней уравнения (7a), а значит, и (3a), будет равно

$$n_1=\left[\frac{M}{\pi}\right]+1, \tag{8a}$$

а число корней уравнения (3b)

$$n_2=\left[\frac{M}{\pi}-\frac{1}{2}\right]+1, \tag{8b}$$

причем, очевидно, что $n_1\geq n_2$. И, следовательно, возможными будут случаи: $n_1=n_2+1$ или $n_1=n_2$. Нетрудно показать, что равенство $n_1=n_2+1$ будет иметь место при выполнении условия

$$\frac{M}{\pi}<\left[\frac{M}{\pi}\right]+0{,}5. \tag{9}$$

С другой стороны, очевидно, что уравнение (3a) как минимум имеет один корень $t=a$, а уравнение (3b) будет иметь корни при $M\geq\frac{\pi}{2}$. В этой связи условие теоремы 2 “*если уравнения* (3a) *и* (3b) *имеют корни*” можно заменить условием: $M\geq\frac{\pi}{2}$. Заметим также, что условие

$$M\geq 2\pi \tag{10}$$

согласно соотношению (8a) будет равносильно условию $n_1>2$. Обобщив вышеизложенное, мы придем к следующей теореме.

Теорема 3. *Пусть в системе* (1) $p,r\in C^2[a,b]$,

$$Q(t)=-\frac{p(t)}{r(t)},$$

1. $p'(t)\leq 0,\ r'(t)\geq 0,$ $\quad(p'(t)\geq 0,\ r'(t)\leq 0),$
2. $Q'(t)\geq 0$ $\quad(Q'(t)\leq 0),$
3. $(\ln Q(t))''\geq 0$.

Тогда, если имеют место условия (9) *и* (10), *то система* (1) *на отрезке* $[a,b]$ *осциллирует.*

Действительно, из условий теоремы, а также из соотношений (8a) и (8b) будет следовать, что имеют место условия теоремы 2 и $n_1 > 2,\ n_2 > 1$. Тогда, согласно теореме 2, будем иметь $m_1 > 1,\ m_2 \geq 1.$

Далее, имеет место

Теорема 4. *Пусть в системе* (1) $p, r \in C^2[a, +\infty), a \geq 0$,

$$Q(t) = -\frac{p(t)}{r(t)},$$

1. $p'(t) \leq 0,\ r'(t) \geq 0, \qquad (p'(t) \geq 0,\ r'(t) \leq 0),$
2. $Q'(t) \geq 0 \qquad (Q'(t) \leq 0),$
3. $(\ln Q(t))'' \geq 0$.

Тогда система (1) *на всей полупрямой* $[a, +\infty)$ *осциллирует.*

Доказательство. Примем

$$M(t) = \int_a^t \sqrt{-p(\tau)r(\tau)}d\tau .$$

Поскольку

$$M'(t) = -p(t)r(t) > 0,$$

то $M(t)$ будет на всей полуоси $[0, +\infty)$ строго возрастающей функцией, и, следовательно, $M(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$. Тогда, учитывая формулы (8a) и (8b), мы получим, что $n_1, n_2 \to \infty$ при $t \to +\infty$. Последнее, согласно определению 2, будет означать, что система (1) в этом случае осциллирует на всей полупрямой $[a, +\infty)$, что и требовалось доказать.

Покажем теперь, как можно определить систему (1), так чтобы она была бы осциллирующей лишь на заданном отрезке $[a,b],\ a \geq 0.$ Рассмотрим для этого систему

$$\begin{cases} y_1' = f(t)y_2, \\ y_2' = (t-a)(t-b)y_1, \end{cases} \tag{11}$$

в предположении, что для $t \in [0, +\infty)$

$$f(t) > 0 .$$

Очевидно, что при $t \notin [a,b]$ коэффициенты рассматриваемой системы будут иметь одинаковые знаки, и, следовательно, согласно теореме 1, система не будет осциллирующей. Покажем теперь, что можно подобрать $f(t)$ так, чтобы система (11) осциллировала бы на отрезке $[a,b]$. Для этого потребуем сначала выполнение условия

$$M = \int_a^b \sqrt{-f(t)(t-a)(t-b)}d\tau \geq 2\pi.$$

Заметим, что для удобства, в качестве $f(t)$ можно взять любое, удовлетворяющее этому условию, положительное число c. Для определения числа c достаточно вычислить значение интеграла

$$I = \int_a^b \sqrt{-(t-a)(t-b)}d\tau ,$$

а затем выбрать число c так, чтобы выполнялось условие

$$M = \sqrt{c} \cdot I \geq 2\pi .$$

или

$$c \geq \left(\frac{2\pi}{I}\right)^2 \tag{12}$$

Далее подберем значение c так, чтобы одновременно выполнялись условия (9) и (12). Тогда, согласно теореме 3, система (11) будет осциллировать на отрезке $[a,b]$. Продемонстрируем сказанное на следующем примере. Предположим, требуется построить систему (11) так, чтобы она была бы осциллирующей лишь на отрезке $[1,3]$. Имеем

$$I=\int_1^3\sqrt{-(t-1)(t-3)}dt\approx 1.571 .$$

Учитывая условие (12), найдем

$$c\geq\left(\frac{2\pi}{1.571}\right)^2\approx 16$$

Непосредственным вычислением можно убедиться в том, что при $c=11$ будет выполнятся и условие (9). Таким образом, в качестве требуемой системы, можно рассмотреть , например, систему

$$\begin{cases} y_1'=16y_2, \\ y_2'=-(t-1)(t-3)y_1. \end{cases} \qquad (13)$$

На рисунке 1 приводятся график одного частного решения системы (13) на отрезке $[1,3]$ (здесь и всюду в дальнейшем на приведенных рисунках $y0$ соответствует компоненте y_1, а $y1$ компоненте y_2. Как видно из рисунка, систерма (13) действительно осцилирует на отрезке $[1,3]$.

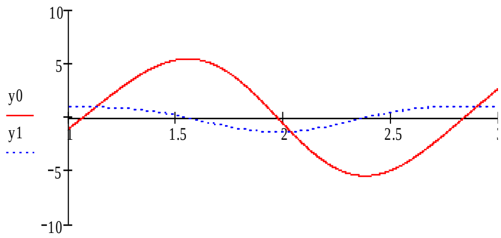


Рис. 1.

Учитывая вышепроведенные рассуждения, можно построить систему (1) и так, чтобы она осциллировала бы лишь вне заданного отрезка $[a,b]$, $a\geq 0$, а точнее – на полуоси $t\geq b$. Для этого, например, можно рассмотреть систему

$$\begin{cases} y_1'=f(t)y_2, \\ y_2'=-(t-a)(t-b)y_1, \end{cases} \qquad (14)$$

в предположении, что

$$f(t)>0 .$$

Примем $f(t)=c>0$. Нетрудно проверить, что в этом случае будут иметь место условия теоремы 4, согласно которой система (14) будет осциллировать на полуоси $t\geq b$.

В качестве примера, предположим,что $a=1$, $b=3$. Выберем в качестве c, например,число 1. Заметим, что при этом будем иметь систему

$$\begin{cases} y_1'=y_2, \\ y_2'=-(t-1)(t-3)y_1. \end{cases} \qquad (15)$$

Согласно теореме 4, при таком выборе c система (15) будет осциллировать и на множестве $(3,+\infty)$.

На рисунке 2 приводится график частного решения этой системы на отрезке $[3,10]$.

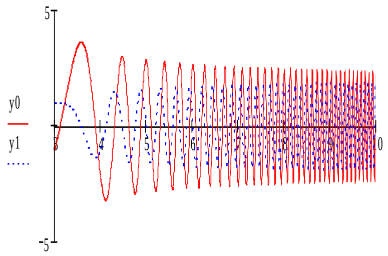


Рис. 2.

Перейдем теперь к рассмотрению осцилляционных свойств систем вида

$$\begin{cases} y_1' = f(t)y_2, \\ y_2' = g(t)y_1, \end{cases} \tag{16}$$

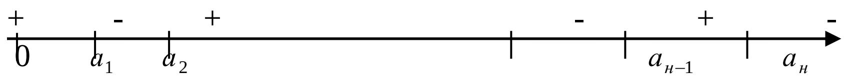
на полуоси $t > 0$ в предположении, что $f(t) > 0$, а $g(t)$ – многочлен с действительными положительными корнями

$$a_1 < a_2 < .... < a_{n-1} < a_n$$

(случай, когда многочлен $g(t)$ имеет кратные корни, рассматривается аналогично). В силу наших предположений, $g(t)$ можно представить в виде

$$g(t) = -g_1(t)(t - a_1)(t - a_2)...(t - a_{n-1})(t - a_n),$$

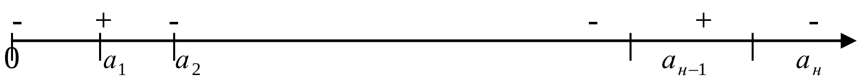
где $g_1(t)$ – некоторый многочлен, сохраняющий свой знак на всей прямой. Предположим, что $g_1(t) > 0$ (аналогично рассматривается случай $g_1(t) < 0$) и n-нечетно. Тогда, применив метод интервалов к выражению $-g_1(t)(t - a_1)(t - a_2)...(t - a_{n-1})(t - a_n)$, будем иметь на числовой полупрямой следующую расстановку знаков



Согласно теореме 1 система (16) при любом выборе $f(t) > 0$ не будет осциллировать на множестве

$$t \in [0,\ a_1] \cup [a_2, a_3] \cup ... \cup [a_{n-1}, a_н]\ .$$

В случае, когда n- четно, знаки $-g_1(t)(t - a_1)(t - a_2)...(t - a_{n-1})(t - a_n)$ будут расположены следующим образом



И, следовательно, система не будет осциллировать на множестве

$$t \in [a_1, a_2] \cup [a_3, a_4] \cup ... \cup [a_{n-1}, a_н].$$

Что касается поведения компонент решений на остальных отрезках, то, очевидно, что осцилляция будет зависеть от значений $f(t)$. В частности, если потребуется определить $f(t)$ так, чтобы система осциллировала бы на всех оставшихся отрезках, то это можно осуществить, например, следующим образом: для каждого из этих отрезков найти вышеизложенным способом постоянные c_k $(k = 1,2,..., n)$, а затем, исходя из полученных значений, определить значение c так, чтобы одновременно выполнялись условия $\frac{M_i}{\pi} < \left[\frac{M_i}{\pi}\right] + 0.5,\ i = 1,2,..., n$. В результате получим, что при $f(t) = c$ система будет осциллировать в случае нечетного n на множестве

$$t \in [a_1, a_2] \cup [a_3, a_4]... \cup [a_{n-2}, a_{н-1}] \cup [a_n, +\infty),$$

а в случае четных n - на множестве

$$t \in [0, a_1] \cup [a_2, a_3] \cup ... \cup [a_{n-2}, a_{н-1}] \cup [a_n, +\infty)\ .$$

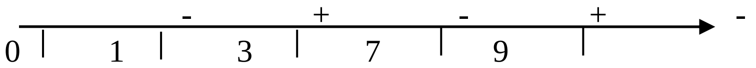
Проиллюстрируем вышесказанное на следующем примере. Рассматривается система

$$\begin{cases} y_1' = f(t)y_2, \\ y_2' = g(t)y_1, \end{cases}$$

на полуоси $t \geq 0$, где $g(t) = -t^4 + 20t^3 - 130t^2 - 189$ и $f(t) > 0$. Разложив $g(t)$ на линейные множители, найдем

$$g(t) = -(t-1)(t-3)t-7)(t-9) .$$

При этом для $g(t)$ будем иметь следующую расстановку знаков на числовой полупрямой.



В данном случае осцилляция, согласно теореме 1, возможна лишь на на отрезках $[0,1]$, $[3,7]$
и на интервале $[9,+\infty)$. Для обеспечения осцилляции на отрезках $[0,1]$ и $[3,7]$, определим значения постоянных c_1 и c_2. Имеем

$$I_1 = \int_0^1 \sqrt{(t-1)(t-3)(t-7)(t-9)}dt \approx 8.103\,,\ c_1 \geq \left(\frac{2\pi}{8.103}\right)^2 \approx 0.60\ .$$

$$I_2 = \int_3^7 \sqrt{(t-1)(t-3)(t-7)(t-9)}dt \approx 24.321\,,\ c_2 \geq \left(\frac{2\pi}{24.321}\right)^2 \approx 0.07\ .$$

Примем $c = 0.81$. Тогда будем иметь

$$M_1 \approx 0.81 \cdot 8.103 = 6.563 > 2\pi,\ M_2 \approx 19.701 > 2\pi,$$

при этом, нетрудно проверить, что $\dfrac{M_i}{\pi} < \left[\dfrac{M_i}{\pi}\right] + 0.5,\ i = 1{,}2,$ и, следовательно, система

$$\begin{cases} y_1' = 0.81 y_2, \\ y_2' = -(t-1)(t-3)(t-7)(t-9)y_1, \end{cases}$$

будет осциллирующей на отрезках $[0,1]$ и $[3,7]$. Согласно теореме 4, она будет осциллировать и на интервале $[9,+\infty)$. Таким образом мы получим, что построенная система будет осциллировать на множестве $[0,1] \cup [3,7] \cup [9,+\infty)$. На рисунке 3 приводится графическая интерпретация одного частного решения системы соответственно на отрезках $[0,1]$, $[3,7]$ и $[7,9]$.

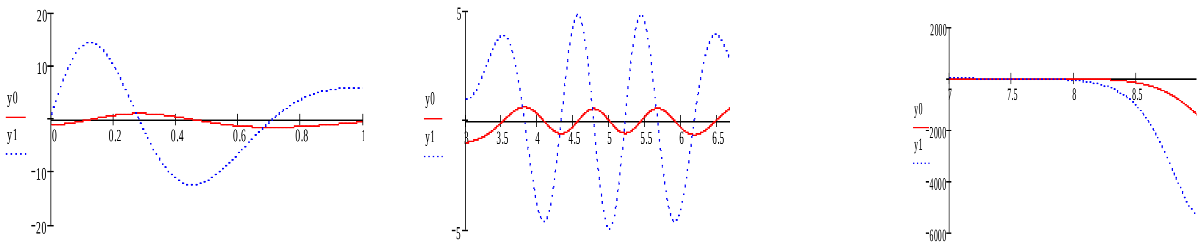


Рис. 3

ЛИТЕРАТУРА

1. Схаляхо Ч.А. *О нулях решений одной двумерной дифференциальной системы на конечном промежутке*. Дифференциальные уравнения. 1988, Т.24, № 6, с.1080-1083.
2. Схаляхо Ч.А. *Колеблемость решений систем дифференциальных уравнений со знакопеременными правыми частями.* Дифференциальные уравнения.1992.Т.28, № 10, с. 1736-1747.
3. Саакян Г.Г. *Об одном критерии осцилляции и неосцилляции двумерной линейной однородной системы дифференциальных уравнений.* Slovak international scientific journal. № 2, 2016, с.48-51.

4. Саакян Г.Г. *О некоторых свойствах решений канонической системы Дирака.* Ученые записки ЕрГУ, 2007, № 2, с. 3-11.
5. Саакян Г.Г. *О нулях решений некоторых линейных систем дифференциальных уравнений второго порядка на конечном интервале.* American Scientific Journal. № 2 (2) , 2016, Vol.2, p. 88-92.

Сведения об авторе:

Георгий Саакян - к.ф.м.н., доцент кафедры прикладной математики и информатики, АрГУ
e-mail: ter_saak_george@mail.ru

Статья рекомендована к печати членом редакционной коллегии, д.ф.м.н., А.М. Хачатряном.