ENCYCLOPÉDIE SCIENTIFIQUE

PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DU Dr TOULOUSE

BIBLIOTHÈQUE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

DIRECTEUR M. D'OCAGNE

Théorie et Pratique des Opérations Financières

2e ÉDITION

PAR

ALFRED BARRIOL

AD LUCEM

O. DOIN ET FILS, ÉDITEURS, PARIS

Octave DOIN et FILS, éditeurs, 8, place de l'Odéon. Paris.

ENCYCLOPÉDIE SCIENTIFIQUE

Publiée sous la direction du Dr TOULOUSE

BIBLIOTHÈQUE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Directeur : **M. D'OCAGNE**

Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées,
Professeur à l'Ecole Polytechnique
et à l'Ecole des Ponts et Chaussées.

Le terme de mathématiques appliquées est par lui-même assez vague. Etendu à toutes les branches de la science qui font appel à l'emploi des mathématiques, il engloberait un domaine immense dans lequel viendraient se fondre nombre d'autres sections de l'Encyclopédie. Dans le plan général de celle-ci, il est réservé aux seules catégories suivantes :

1° *Science du calcul*;

2° *Analyse appliquée à la science de la valeur*;

3° *Géométrie appliquée à la détermination des positions et à la représentation des figures terrestres*.

I. — L'exécution des *calculs numériques* joue, dans un très grand nombre de techniques, un rôle aujourd'hui primordial. On doit s'efforcer de la rendre aussi rapide et aisée que possible, en l'appropriant exactement au degré d'approximation que l'on recherche, et en écartant, autant que faire se peut, les chances d'erreurs. L'étude des méthodes à suivre à cet effet, formant une sorte de prolongement des mathématiques pures, mérite d'être considérée comme une science à part, celle du calcul proprement dit, dont les principes sont de la plus haute utilité pour tous ceux qui, dans un ordre d'application quelconque, ont à exécuter sur des nombres des opérations plus ou moins compliquées.

L'effort du calculateur a pu d'ailleurs être largement soulagé grâce à l'intervention de procédés soit *graphiques*, soit *mécaniques*, de formes très diverses. Ces différents modes de calculs constituent aujourd'hui, à côté des méthodes purement numériques, des disciplines autonomes comportant des exposés d'ensemble spéciaux que l'on trouvera dans la première section de cette bibliothèque.

II. — La *science de la valeur*, sous ses divers aspects, repose essentiellement sur les notions de nombre et de fonction; elle peut donc apparaître comme une application directe de l'analyse mathématique.

La pratique des opérations monétaires, toutes les combinaisons du prêt à intérêt, ont donné naissance à l'*arithmétique des changes* et à l'*algèbre financière*, dont l'exposé fournit la matière d'un premier volume.

Le calcul des probabilités a introduit dans les rapports économiques un nouvel élément de précision et fourni une base scientifique à l'industrie des assurances, dont les résultats restent la meilleure preuve de sa valeur pratique. L'étude spéciale des probabilités relatives à tous les sinistres susceptibles d'assurance, la combinaison de ces probabilités avec le jeu de la capitalisation, les moyens de calcul aptes à définir pratiquement les primes et réserves de tous les contrats, constituent la *théorie mathématique des assurances*, fondement de l'actuariat, à laquelle un second volume est consacré.

En dehors de ces applications pratiques déjà classiques, des tentatives nouvelles se sont produites pour emprunter à l'analyse mathématique toutes les rigueurs de notation et de raisonnement permettant de soumettre l'ensemble même des manifestations de la vie économique à une étude vraiment scientifique. Un mouvement s'affirme qui, rompant avec le verbalisme incertain des écoles et des doctrines, toujours dominé par les préoccupations pratiques, entend rester exclusivement théorique et constituer, — comme cela a été fait en physique, — une économique mathématique ou rationnelle et une économique expérimentale destinées à se contrôler, à se rejoindre même sur certains points lorsque la tâche sera suffisamment avancée.

La première abstrait des réalités économiques des types définis et des mécanismes simplifiés dont elle s'efforce de poser les conditions d'équilibre et de mouvement, en tendant à les ramener aux équations de Lagrange qui se trouveraient ainsi dominer un jour la mécanique des intérêts comme celle des forces. La seconde, ne pouvant recourir à l'expérience proprement dite, s'applique à perfectionner l'observation statistique, à en grouper les résultats, à en éliminer par l'interpolation les influences secondes. Elle soumet à des règles rationnelles les moyens de rechercher, de contrôler, de démontrer les corrélations entre les phénomènes ainsi rendus comparables. Deux volumes exposeront l'état actuel et les perspectives de cette double science en formation : l'*Économique rationnelle*, d'une part ; la *Statistique mathématique*, de l'autre.

L'ensemble des volumes groupés dans la seconde section de cette bibliothèque se trouve ainsi constituer un exposé complet de ce qu'on appelle parfois la *chrématistique*.

III. — En vertu de ses origines mêmes, la géométrie est avant tout la science de la mesure des objets terrestres et de la détermination de leur forme. Par suite d'une évolution toute naturelle, elle est devenue, par le fait, la science générale des propriétés de l'espace. Il n'en est pas moins vrai que l'on doit, parmi ses applications, faire une place à part à celles qui visent son objet primitif, en les groupant en un seul tout, alors même que, pour plusieurs d'entre elles, il est fait appel, dans une certaine mesure, à des notions empruntées à d'autres sciences comme l'astronomie et la physique.

Au premier rang des objets terrestres, dont la mesure utilise les méthodes de la géométrie, s'offre la terre elle-même, dont la *géodésie* définit la figure d'ensemble tandis que la *topographie* fait connaître les détails de sa surface.

La *géodésie* peut d'ailleurs se subdiviser en trois branches principales correspondant à des études de plus en plus élevées :

1° La *géodésie élémentaire* qui, partant de l'hypothèse de la terre sphérique, applique à ses résultats des termes correctifs pour le passage à l'ellipsoïde, et qui comprend tout ce qu'exigent les observations et les calculs relatifs aux triangulations exécutées en vue des opérations topographiques ;

2° La *géodésie sphéroïdique*, reposant, comme son nom l'indique, sur la considération du sphéroïde et qui comprend tout ce qui concerne les triangulations primordiales;

3° La *géodésie supérieure*, consacrée à l'étude de l'exacte figure de la terre.

A chacune d'elles correspond un volume spécial. En raison du rôle capital qu'en ces matières joue la théorie des erreurs, celle-ci, dont les éléments sont exposés dans le premier de ces trois volumes, reçoit, dans le second, tout le développement susceptible d'intéresser les géodésiens.

La détermination des positions absolues sur la terre ferme, que réclame la géodésie, fait l'objet de l'*astronomie géodésique* que, en raison de leur étroite affinité, on ne saurait séparer de la *navigation*; l'une et l'autre de ces sciences d'application reposent d'ailleurs, en réalité, sur des opérations purement géométriques auxquelles l'astronomie ne fournit que des points de repère.

Il a paru également à propos de rapprocher de la géodésie et de la topographie (dont la *métrophotographie* n'est qu'une branche spéciale) diverses sciences connexes comme la *métrologie* qui détermine les étalons de mesure utilisés par la géodésie, la *cartographie* qui a pour objet la représentation des résultats fournis par la topographie...

Quant à la représentation des objets de petites dimensions, elle résulte de la mise en œuvre de divers systèmes de projection, au premier rang desquels ceux des projections orthogonales (*géométrie descriptive*) et des projections centrales (*perspective*).

Grâce à la *métrophotographie*, les lois de la perspective sont, en outre, très heureusement utilisées et le seront de jour en jour davantage en vue des levers topographiques.

Les volumes seront publiés dans le format in 18 jésus cartonné; ils formeront chacun 400 pages environ avec ou sans figures dans le texte. Le prix marqué de chacun d'eux, quel que soit le nombre de pages, est fixé à 5 frs. Chaque volume se vendra séparément.

Voir, à la fin du volume, la notice sur l'ENCYCLOPÉDIE SCIENTIFIQUE, pour les conditions générales de publication.

TABLE DES VOLUMES
ET LISTE DES COLLABORATEURS

*Les volumes parus sont indiqués par un **

A. — Science du calcul.

*1. **Calcul numérique**, par R. de Montessus et R. d'Adhémar, docteurs ès sciences mathématiques.

*2. **Calcul graphique et Nomographie**, par M. d'Ocagne, professeur à l'Ecole polytechnique et à l'Ecole des Ponts et Chaussées.

*3. **Calcul mécanique**, par L. Jacob, ingénieur général d'artillerie navale.

B. — Analyse appliquée.

*1. **Théorie et pratique des opérations financières**, par A. Barriol, ancien élève de l'Ecole polytechnique, membre de l'Institut des actuaires français, directeur de l'Institut des finances et assurances.

*2. **Théorie mathématique des assurances**, par J.-P. Richard et Em. Petit, anciens élèves de l'Ecole polytechnique, actuaires.

3. **Économique rationnelle**, par A. Aupetit, docteur en droit, membre de l'Institut des actuaires français.

*4. **Statistique mathématique**, par H. Laurent, docteur ès sciences, membre de l'Institut des actuaires français, répétiteur à l'Ecole polytechnique.

C. — Géométrie appliquée.

1. **Métrologie**, par R. Benoit, ancien directeur du Bureau international des poids et mesures, correspondant de l'Institut et du Bureau des longitudes.

2. **Astronomie géodésique**, par L. Driencourt, ingénieur hydrographe en chef de la Marine.

*3. **Navigation**, par E. Perret, lieutenant de vaisseau, professeur à l'Ecole navale.

*4. **Géodésie élémentaire**, par R. Bourgeois, général, Directeur du service géographique de l'armée, professeur à l'Ecole polytechnique, membre du Bureau des longitudes.

5. **Géodésie sphéroïdique**, par R. Bourgeois.

6. **Géodésie supérieure**, par R. Bourgeois.

7. **Topographie**, par R. Bourgeois.

*8. **Métrophotographie**, par J. Th. Saconney, capitaine du génie.

9. **Cartographie**, par G. G. Guibaud, chef de bataillon du génie.

*10. **Géométrie descriptive**, par R. Bricard, ingénieur des manufactures de l'Etat, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers.

11. **Perspective**, par M. Emanaud, ancien élève de l'Ecole polytechnique.

NOTA. — La collaboration des auteurs appartenant aux armées de terre et de mer, ou à certaines administrations de l'Etat, ne sera définitivement acquise que moyennant l'approbation émanant du ministère compétent.

ENCYCLOPÉDIE SCIENTIFIQUE

PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION

du Dr TOULOUSE, Directeur de Laboratoire à l'École des Hautes-Études.

Sécrétaire général : H. PIÉRON.

BIBLIOTHÈQUE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Directeur : M. D'OCAGNE

Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, Professeur à l'École polytechnique et à l'École des Ponts et Chaussées.

THÉORIE ET PRATIQUE

DES

OPÉRATIONS FINANCIÈRES

ERRATA

Page 18, tableau, *placer* $a^{(p)}$ à l'intersection des ligne 4 et colonne 5 *au lieu* des ligne 5 et colonne 5.

Page 64, tableau, ligne 2, colonne 5, *au lieu de* Fl. 7,108, *lire* Fl. 12,108.

Page 73, tableau, colonne 2, ligne 5, *au lieu de* Piaster, *lire* Piastre.

Page 219, tableau, colonne 2, *au lieu de* restant du, *lire* restant dû; colonnes 3 et 4, *au lieu de* annuité et amortissement, *lire* annuités et amortissements.

Page 341, tableau, colonne « Courtage et Impôts », *au lieu de* 2,25, *lire* 4,50.

Page 344, figure, *au lieu de*

$$l = a\,\frac{1 + 0{,}00105}{1 - 0{,}00105}, \qquad \textit{lire} \qquad l = a\,\frac{1 + 0{,}0011}{1 - 0{,}0011}.$$

Page 345, figure, *au lieu de*

$$l = v\,\frac{1 - 0{,}00105}{1 + 0{,}00105}, \qquad \textit{lire} \qquad l = v\,\frac{1 - 0{,}0011}{1 + 0{,}0011}.$$

Page 363, figure, *au lieu de*

$$(a - p)\,\frac{1 + 0{,}00005}{1 - 0{,}00105}, \qquad \textit{lire} \qquad (a - p)\,\frac{1 + 0{,}0001}{1 - 0{,}0011};$$

$$a\,\frac{1 + 0\ 00105}{1 - 0{,}00105}, \qquad \textit{lire} \qquad a\,\frac{1 + 0{,}0011}{1 - 0{,}0011};$$

$$p(1 - 0{,}00005) + a \times 0{,}001 \qquad \textit{lire} \qquad p(1 + 0{,}0001) + a \times 0{,}001.$$

THÉORIE ET PRATIQUE

DES

OPÉRATIONS FINANCIÈRES

PAR

Alfred BARRIOL

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
DIRECTEUR DE L'INSTITUT DES FINANCES ET DES ASSURANCES
MEMBRE DE L'INSTITUT DES ACTUAIRES FRANÇAIS

Deuxième édition revue, corrigée et augmentée.
Avec nombreux tableaux et graphiques dans le texte.

PARIS
OCTAVE DOIN ET FILS, ÉDITEURS
8, PLACE DE L'ODÉON, 8

1914

Nous devons remercier particulièrement MM. Brochu, Potin et Brandin *qui ont bien voulu revoir les épreuves de cette seconde édition en apportant à la correction difficile du texte un soin remarquable et une patience dont nous leur sommes sincèrement reconnaissants.*

A. B.

9

INTRODUCTION
DE LA PREMIÈRE ÉDITION

On appelle « Opération financière » toute opération dans laquelle se trouvent engagés des capitaux qui doivent en recevoir une rémunération, un loyer.

Il n'entre pas dans le plan de ce travail de discuter la nécessité de ce loyer, et d'en fixer ensuite la valeur. Ces questions sont du ressort de l'Economie politique.

Dans les études qui vont suivre, on admettra donc que toute somme prêtée ne peut être remboursée sans qu'il lui soit ajouté ses fruits, que l'on appelle « Intérêts ».

C'est sur cette hypothèse que reposent tous les calculs financiers. On sera, de plus, amené à supposer que cet intérêt est proportionnel au montant des capitaux engagés, et que l'intérêt d'une même somme reste constant pour une même durée de placement. Cependant ces deux nouvelles hypothèses ne sont pas absolument nécessaires, et, malgré leur commodité, il est possible de s'en affranchir.

L'ouvrage est divisé en trois livres :

Livre I. — Opérations financières à court terme.

Livre II. — Opérations financières à long terme.

Livre III. — Opérations financières de Bourse et de haute Banque.

Dans le premier Livre, on traite du prêt à intérêt simple et l'on admet que l'intérêt s'accumule sans jamais s'ajouter au capital. De telles opérations sont en général de très courte durée, un an au maximum ; on les a groupées sous le nom d' « Opérations à court terme » ; mais cependant elles peuvent s'étendre sur de longues périodes en vertu de conventions spéciales ; elles se transforment alors le plus souvent en opérations à long terme, les intérêts venant modifier le capital. Le *change*, étant une application directe de l'intérêt simple, a été étudié dans ce livre.

Le second Livre est consacré à la théorie des intérêts qui viennent s'ajouter au capital et produire eux-mêmes intérêts : les opérations dans lesquelles cette transformation des intérêts en capitaux se produit sont désignées sous le nom d' « Opérations à long terme », parce que, en général, on ne les conclut que pour des durées relativement longues.

On peut, pour faciliter l'étude, distinguer ces opérations suivant qu'elles concernent un capital indivis ou un capital divisé en coupures.

Enfin, le troisième Livre traite des applications effectives des théories exposées dans les deux premiers : c'est ainsi que la Bourse fait des opérations à court terme sur des titres représentant des opérations à long terme lancées par la haute Banque.

Conformément au plan général de l'Encyclopédie, nous avons cherché à donner une monographie complète de la science financière pure en excluant tout ce qui se rapporte au commerce des marchandises.

Nous nous sommes appliqué à donner des exemples numériques à l'appui de chacune des formules ; ces exemples sont en général tirés de faits réels : d'autres donnent la solution de questions posées au concours de l'Inspection générale des finances ou aux examens de l'Institut des actuaires français. D'ailleurs, ce traité d'opérations financières est la reproduction presque intégrale des leçons faites à l'Institut des Finances et des Assurances, au Collège libre des Sciences sociales et aux candidats Inspecteurs des Finances et Commissaires contrôleurs des Compagnies d'assurances-vie et accidents.

Il en résulte que l'ouvrage peut être lu facilement par toute personne possédant des connaissances élémentaires d'arithmétique lui permettant de se rendre compte des diverses formules et de leurs applications pratiques.

Dans quelques paragraphes, nous avons fait usage de l'intégration et employé la Géométrie analytique, mais leur lecture n'est pas indispensable dans une première étude de ce traité.

Les applications numériques ont été effectuées en faisant usage des tables de logarithmes à 8 décimales du Service géographique de l'armée, des tables d'intérêts composés de Pereire et des tables de valeurs intrinsèques d'obligations d'Arnaudeau.

NOTE SUR LA SECONDE ÉDITION

Nous ne pensions guère que ce petit livre serait appelé à une seconde édition, car il est bien rare que des traités analogues arrivent en peu de temps au quatrième millier ; son succès est probablement dû à l'attrait qu'exercent de plus en plus les opérations financières et au désir du public de chercher à pénétrer le sens de ces opérations.

Cette seconde édition diffère de la première par de nombreux compléments qui nous ont été suggérés par des amis ou des lecteurs aimables ; il est à peine besoin de dire que nous avons mis au point la partie relative aux impôts français qui ont été modifiés au lendemain même de la publication de la première édition.

THÉORIE ET PRATIQUE
DES
OPÉRATIONS FINANCIÈRES

LIVRE PREMIER
OPÉRATIONS FINANCIÈRES A COURT TERME

PREMIÈRE PARTIE
INTÉRÊT SIMPLE ET ESCOMPTE A INTÉRÊT SIMPLE

CHAPITRE PREMIER
PRÊT A INTÉRÊT SIMPLE

1. **Hypothèse, base des calculs.** — L'opération financière du prêt à court terme consiste dans la remise de numéraire, ou de valeur représentative, contre l'engagement pris par le débiteur, du remboursement de la dette, augmentée d'une certaine somme appelée *intérêts*.

Pour simplifier les calculs, il est d'usage de supposer que chaque franc de la somme prêtée rapporte le même intérêt pendant la même période. Cette hypothèse, sur laquelle reposent toutes les opérations qui vont suivre, n'est cependant pas essentiellement nécessaire ; on pourrait admettre que les sommes prêtées rapporteront un certain intérêt si elles ne dépassent pas une certaine valeur C_1 ; un autre intérêt, calculé différemment pour la partie du prêt comprise entre C_1 et C_2 ($C_2 > C_1$), etc.

On désignera par i l'intérêt pour 1 fr. de capital et pour une année de prêt ; cette quantité s'appelle le *taux d'intérêt* annuel pour 1 fr. de capital, mais dans la pratique le taux d'intérêt est le plus souvent énoncé pour 100 fr. de capital.

On dit ainsi : prêt à 3 $^1/_2$ $^0/_0$ l'an ; dans ce cas,

$$i = 0,035.$$

La loi du 10 avril 1900 indique que :

« L'intérêt légal sera, en matière civile, de quatre pour cent, et, en matière de commerce, de cinq pour cent. »

Il n'est sans doute pas inutile de rappeler que la fixation légale du taux de l'intérêt a souvent préoccupé les législateurs ; dans l'antiquité, le taux normal atteignait 1 $^0/_0$ par mois et Cicéron de Galicie le fixait à cette valeur ; pendant le moyen âge, Philippe-Auguste, en 1272, limitait le taux à 48 $^0/_0$ l'an ; sous Philippe IV, en 1311, il était de 20 $^0/_0$ et sous Charles V, en 1545, le maximum était 12 $^0/_0$. Il est descendu peu à peu et certaines personnes n'ont pas hésité à espérer une décroissance continue jusqu'à zéro, tandis que de bons esprits disent que le taux restera éternellement fixé entre 3 et 5 $^0/_0$.

Il semble tout à fait imprudent de faire des prévisions à ce sujet, car le taux d'intérêt dépend de variables trop diverses et, d'ailleurs, il importe de faire remarquer que le taux d'intérêt ne peut, en effet, être fixé que par une libre convention entre le prêteur et l'emprunteur, et qu'il dépend des conditions d'emprunt, de la solvabilité, de la plus ou moins grande abondance des capitaux disponibles, etc.

2. **Denier.** — On exprimait autrefois le taux par le nombre de deniers qu'il fallait placer pour obtenir un denier d'intérêt ; on indiquait ainsi une somme variable correspondant à un loyer fixe.

Si 100 fr. rapportaient 5 fr., on disait que le capital était placé au denier 20. Le taux actuel est l'inverse de l'ancien denier.

3. **Formule de l'intérêt simple.** — On admet que l'intérêt s'acquiert au jour le jour, mais n'est payable que suivant les conventions intervenues.

Si donc une somme C est prêtée pour n jours, au taux i, l'intérêt produit par le capital s'obtiendra par le raisonnement suivant :

1 fr., rapportant i en 365 jours, rapportera $\frac{i}{365}$ par jour, et $\frac{in}{365}$ en n jours.

Cet intérêt étant le même pour chaque franc de capital (hypothèse primitive), l'intérêt de C sera :

$I = \frac{Cin}{365}$ ou $I = \frac{Cin}{366}$ si l'année est bissextile.

La formule $I = \frac{Cin}{365}$ s'écrit, en désignant $\frac{n}{365}$, c'est-à-dire la fraction d'année correspondant à la durée du prêt, par f, $I = Cfi$.

La quantité fi est le taux proportionnel correspondant à i pour la période f.

Si $f = \frac{1}{2}$, on aura $fi = \frac{i}{2}$; ce sera le taux semestriel proportionnel à i.

Si $f = \frac{1}{4}$, on aura $fi = \frac{i}{4}$, taux trimestriel proportionnel à i, et ainsi de suite.

Exemple. — *Quel est l'intérêt produit par 3452 fr. 35 rapportant intérêts pendant 73 jours au taux 3,83 %? — Année de 365 jours.*

On a :

$$C = 3.452{,}35, \quad i = 0{,}0383, \quad n = 73,$$

d'où : $$I = \frac{3.452{,}35 \times 0{,}0383 \times 73}{365} = 26 \text{ fr. } 45.$$

4. **Année de 360 jours.** — En France, on convient, dans le but de simplifier les calculs, que l'année ne comprend que 360 jours et que l'intérêt acquis en un jour est $\frac{i}{360}$, au lieu de $\frac{i}{365}$.

On ne se sert de la formule exacte que dans les comptes avec l'État, et dans certains calculs d'intérêts consécutifs à des jugements par les tribunaux. On peut obtenir ainsi des résultats fort singuliers quand le nombre de jours est compris entre 360 et 365 mais l'usage est, on le sait, plus fort que la logique. Dans la plupart des autres pays, les calculs se font avec l'année réelle.

La formule pratique est donc : $I = \frac{Cin}{360}$.

La différence entre l'intérêt pratique et l'intérêt réel est :

$$\frac{Cin}{360} - \frac{Cin}{365} = \frac{Cin}{26.280}.$$

La formule pratique est à l'avantage du prêteur, puisqu'elle augmente la somme à lui verser pour prix du service rendu.

L'erreur relative, c'est-à-dire le rapport de la différence à l'intérêt réel est :

$$\frac{Cin}{26.280} : \frac{Cin}{365} = \frac{365}{26.280} = \frac{1}{72}.$$

Le banquier gagne donc le $\frac{1}{72}$ de l'intérêt qu'il aurait dû percevoir.

Si l'on rapporte la différence à l'intérêt pratique ou commercial, on trouve :

$$\frac{Cin}{26.280} : \frac{Cin}{360} = \frac{360}{26.280} = \frac{1}{73}.$$

Il suffit donc de retrancher de l'intérêt commercial la 73^e partie de cet intérêt pour obtenir l'intérêt vrai.

Exemple. — *Quel est l'intérêt produit par* 3.452 fr. 35 *rapportant intérêt pendant* 73 *jours au taux de* 3,83 $^0/_0$? — *Année commerciale.*

$$\text{On a : } I = \frac{3.452{,}35 \times 0{,}0383 \times 73}{360} = 26{,}81.$$

On avait trouvé précédemment (3) : $I = 26{,}45$.

La différence $26{,}81 - 26{,}45 = 0{,}36$ entre l'intérêt commercial et l'intérêt réel représente bien $\frac{26{,}81}{73}$ ou $\frac{26{,}45}{72}$.

5. **Doublement, triplement... d'un capital.** — Le total A du capital C et des intérêts I peut représenter un multiple du capital primitif et on peut se proposer de calculer le temps nécessaire pour doubler, tripler, etc., le capital.

Plus généralement si $A = p \,.\, C$ on aura :

$$A = pC = C + \frac{Cin}{360}$$

d'où :

$$n = (p - 1) \times \frac{360}{i}.$$

Ainsi le capital est doublé dans le temps $\frac{360}{i}$, triplé dans le temps $2 \times \frac{360}{i}$, etc.

En supposant $i = 0{,}03$, on trouve pour $p = 2$

$$n = 33 \text{ ans } 4 \text{ mois}.$$

La durée des opérations qui font l'objet du présent chapitre est généralement inférieure à une année. Mais on verra (chapitre IV) que la théorie de l'intérêt simple peut être étendue au cas de prêts à long terme.

6. **Formule de M. Moser.** — La formule précédemment établie suppose que l'intérêt I doit être payé aussitôt après sa production, même si la durée pendant laquelle est calculé l'intérêt est inférieure à 1 an. Or, en se plaçant dans ce dernier cas si l'on remarque que l'intérêt annuel i ne devrait être effectivement payé que dans un an, pour ramener I à sa valeur d'échéance, on doit retrancher l'intérêt de I pendant la période qui s'écoulera jusqu'à la fin de l'exercice, et écrire pour 1 franc de capital :

$$I_1 = fi - fi \times i \times (1 - f) = fi\,[1 - i\,(1 - f)].$$

Le terme soustractif représente l'intérêt de fi au taux i pour la période $1 - f$.

f étant inférieur à l'unité, puisqu'il s'agit d'opérations à court terme, $I_1 < fi$.

On a, pour un capital de 1 franc :

$$\Delta = I - I_1 = fi - I_1 = fi - fi[1 - i(1 - f)] = fi^2(1 - f).$$

Lorsque i est constant, le maximum de la différence est celui d'un produit de deux facteurs f et $1 - f$ dont la somme est constante.

Ce maximum a lieu lorsque les deux facteurs sont égaux c'est-à-dire lorsque $f = 1 - f$ ou $f = \frac{1}{2}$.

On a : $$\Delta = \frac{1}{2} i^2 \times \frac{1}{2} = \left(\frac{i}{2}\right)^2.$$

Exemple. — *Quel est l'intérêt produit par* 3.452 *fr.* 35 *rapportant intérêts pendant* 73 *jours au taux de* 3,83 % ? — *Méthode Moser. Année civile :*

$$I_1 = 3.452{,}35 \times \frac{73}{365} \times 0{,}0383 \times$$
$$\times \left[1 - 0{,}0383 \times \left(1 - \frac{73}{365}\right)\right] = 25{,}63.$$

Le maximum de la différence entre l'intérêt commercial et l'intérêt Moser serait :

$$3.452{,}35 \times \left(\frac{1}{2} \times 0{,}0383\right)^2 = 1{,}27.$$

7. **Méthodes pratiques de calcul.** — On peut simplifier les calculs en mettant la formule de l'intérêt sous des formes commodes et en employant diverses méthodes connues sous les noms de : *Méthode des Nombres et des Diviseurs* et *Méthode des parties aliquotes du taux et du temps.*

8. **Méthodes des Nombres et des Diviseurs.** — La formule $I = \frac{Cin}{365}$ s'écrit $I = Cn : \frac{365}{i}$.

Le produit $C \times n$ s'appelle *Nombre* ; on le désigne par N. Ce nombre N est une quantité auxiliaire qui remplace C et *n*; c'est le capital qui produit en 1 jour le même intérêt que C en *n* jours.

Le quotient $\frac{365}{i}$ s'appelle *Diviseur ;* on le désigne par D. On voit qu'il ne dépend que du taux *i*.

Le Diviseur D ne présente d'avantage pratique que s'il s'exprime par un nombre entier, ce qui permet évidemment de simplifier les calculs, surtout s'il s'agit de calculer les intérêts d'un grand nombre de sommes placées au même taux.

La formule de l'intérêt s'écrit : $I = \frac{N}{D}$.

On l'étudiera en supposant d'abord l'année contenant 365 (ou 366) jours, puis l'année ramenée conventionnellement à 360 jours.

1^er^ Cas : *année ordinaire.* — Si l'on divise 365 par les divers taux usuels, on peut dresser le tableau suivant :

TAUX % 100 i	DIVISEUR D	TAUX % 100 i	DIVISEUR D	TAUX % 100 i	DIVISEUR D	TAUX % 100 i	DIVISEUR D	TAUX % 100 i	DIVISEUR D
1 %.	36.500	2 %.	18.250	3 %.	12.166,66	4 %.	9.125	5 %.	7.300
1,25	29.200	2,25	16.222,22	3,25	11.230,77	4,25	8.588,24	5,25	6.952,38
1,5	24.333,33	2,5	14.600	3,5	10.428,57	4,5	8.111,11	5,5	6.636,36
1,75	20.857,14	2,75	13.272,72	3,75	9.733,33	4,75	7.684,21	5,75	6.347,83

Le calcul à 5 % peut s'effectuer assez simplement à l'aide de la remarque suivante :

On a simultanément $\dfrac{365}{0{,}05} = 7.300.$

et $$7.300\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{30} + \frac{1}{300}\right) = 10.001.$$

résultat qui diffère peu de 10.000.

Il en résulte que, pour obtenir une valeur très approchée de l'intérêt, il suffit de multiplier le Nombre par $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{30} + \frac{1}{300}$ et de diviser le résultat par 10.000.

L'erreur commise *par excès* est égale à :

$$e = Cn\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{30} + \frac{1}{300}\right) \times \frac{1}{10.000 \times 10.001}$$
$$< Cn\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{30} + \frac{1}{300}\right) \times \frac{1}{(10.000)^2}.$$

Soit enfin $e < \dfrac{1}{10.000}$ c'est-à-dire à peu près la $\dfrac{1}{1.000}$ partie de l'intérêt trouvé.

Exemple. — *Quel est l'intérêt de* 825.345 fr. 30 *pendant* 83 *jours au taux de* 5 % ? — *Année de* 365 *jours.*

$C \times n = 825.345{,}30 \times 83 =$		68.503.659,9
$\frac{1}{3}\ Cn$	= . . . . . . =	22.834.553,3
$\frac{1}{30}\ Cn$	= . . . . . . =	2.283.455,33
$\frac{1}{300}\ Cn$	= . . . . . . =	228.345,533
	Total =	93.850.014,063

On a donc : $I = 9.385$ fr,

La valeur exacte serait 9.384 fr. 07 présentant une différence de 0 fr. 93 avec la valeur approchée par excès.

L'erreur maximum que l'on peut commettre, est en effet inférieure à :

$$\frac{93.850.014}{100.000.000} \quad \text{ou} \quad 0 \text{ fr. } 938.$$

Il convient de remarquer que l'erreur commise est très inférieure à celle qui résulterait d'un calcul sur 360 jours ; on trouverait 9.514,40 comme intérêt, soit une différence de $130,33 = \frac{9.384,07}{72}$ (voir n° 4 p. 8).

On pourrait faire des remarques analogues pour les taux multiples ou sous-multiples de 5 $^0/_0$, mais elles présentent peu d'intérêt, car le calcul une fois fait pour le taux de 5 $^0/_0$, il est très facile de passer au résultat correspondant à l'un des autres taux usuels (voir : n° 9 p. 17).

2° Cas : *année bissextile.* — Si l'on divise 366 par les divers taux usuels, on obtient le tableau suivant :

TAUX %	DIVISEUR	TAUX %	DIVISEUR	TAUX %	DIVISEUR	TAUX %	DIVISEUR	TAUX %	DIVISEUR
1 %	36.600	2 %	18.300	3 %	12.200	4 %	9.150	5 %	7.320
1,25	29.280	2,25	16.266,67	3,25	11.261,54	4,25	8.611,76	5,25	6.971,43
1,50	24.400	2,50	14.640	3,50	10.457,14	4,50	8.133,33	5,50	6.654,55
1,75	20.914,29	2,75	13.309,09	3.75	9.760	4,75	7.705,26	5,75	6.365,22

Les calculs ne sont pas très simples, mais M. Mialin actuaire de la Cie d'assurances France-Vie, nous a signalé une formule approchée pour le taux de 6 $^0/_0$.

On a simultanément

$$D = \frac{366}{0,06} = 6.100$$

et,

$$6.100 \times \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30} + \frac{6}{1.000}\right) = 9.999,93\ldots$$

Cette formule permet d'effectuer les calculs très rapidement, d'une manière analogue à celle indiquée au 1° ci-dessus.

3ᵉ Cas : *année commerciale.* — Si l'on admet que le nombre de jours de l'année est 360, les calculs se simplifient beaucoup.

Le tableau des quotients de 360 par les taux usuels est le suivant :

TAUX	DIVISEUR	TAUX	DIVISEUR	TAUX	DIVISEUR	TAUX	DIVISEUR	TAUX	DIVISEUR
1 %	36 000	2 %	18 000	3 %	12 000	4 %	9 000	5 %	7 200
1,25	28 800	2,25	16 000	3,25	11 076,92	4,25	8 470,59	5,25	6 857,14
1,50	24 000	2,50	14 400	3,50	10 285,71	4,50	8 000	5,50	6 545,45
1,75	20 571,43	2,75	13 090,91	3,75	9 600	4,75	7 578,95	5,75	6 260,87

La plupart de ces diviseurs permettent, comme on le voit, d'effectuer facilement le calcul de $\frac{N}{D}$.

Exemple. — *Calculer l'intérêt de* 32.892 fr. 60 *au taux de* 2 % *pour* 109 *jours ? — Année commerciale :*

On a : $$I = \frac{N}{D} = \frac{32.892,60 \times 109}{18.000} = 199 \text{ fr. } 18.$$

9. **Méthode des parties aliquotes du temps, du taux.** — On cherche à simplifier les calculs pratiques en opérant sur des taux particulièrement commodes, tels que 6 % ou ses sous-multiples (appelés *parties aliquotes* de 6), et sur des périodes facilitant les calculs, telles que 60 jours ou ses sous-multiples (*parties aliquotes* de 60).

En général, on applique ces deux procédés de calcul simultanément ; ils ne sont d'ailleurs vraiment pratiques que si l'on adopte l'année commerciale.

On remarque que, à 6 %, l'intérêt du capital C est, en 60 jours : $\frac{C \times 0{,}06 \times 60}{360} = \frac{C}{100}$.

On peut remarquer que 60 est le centième du Diviseur (n° 8) correspondant à 6 % ; et, en généralisant, dire que pour un nombre de jours égal au centième du Diviseur correspondant à un taux i, l'intérêt du capital C à ce taux et pendant ce temps est $\frac{C}{100}$.

Mais, dans la pratique, le taux de 6 % est le plus fréquemment employé à cause du grand nombre de diviseurs de 60 : on a, en effet : $60 = 2^2 \times 3 \times 5$.

Par suite, le nombre de diviseurs de 60 étant le produit des exposants de ses facteurs premiers augmentés d'une unité, sera : $(2 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 12$.

Pour passer du taux de 6 % au taux donné, on peut se servir du tableau ci-après, qui donne l'expression des taux usuels en fonction des parties aliquotes du taux 6 %.

Exemple. — *Quel est l'intérêt rapporté par* 9.532 fr. 75 *en* 86 *jours à* 4 fr. 25 % ?

En 60 jours 9.532,75 rapportent à 6 % . .	95,3275
En 20 jours — — le 1/3 de la somme ci-dessus	31,7758
En 6 jours 9.532,75 rapportent le 1/10 de la première somme	9,5327
En 86 jours 9.532,75 rapportent à 6 % . .	136,6360
Pour passer de ce taux à 4 fr. 25 % il faut retrancher de cette somme le 1/4	34,1590
et le sixième de ce quart soit	5,6932
Reste.	96,7838

L'intérêt cherché est donc de 96 fr. 78.

Si l'on a de nombreux calculs à effectuer, on peut se servir de barêmes ou comptes faits qui existent dans le commerce ; leur usage est cependant peu répandu, car les recherches sont souvent laborieuses à cause de leur lecture difficile qui entraîne de fréquentes erreurs.

TAUX	RAPPORT A 6 °/°	TAUX	RAPPORT A 6 °/°	TAUX	RAPPORT A 6 °/°
1 °/°	$\frac{1}{6}$	2 °/°	$\frac{1}{3}$	3 °/°	$\frac{1}{2}$
1,25	$\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{4}\right)$	2,25	$\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{8}\right)$	3,25	$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{12}\right)$
1,50	$\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{2}\right)$	2,50	$\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{4}\right)$	3,50	$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{6}\right)$
1,75	$\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)$	2,75	$\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)$	3,75	$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\right)$

TAUX	RAPPORT A 6 °/°	TAUX	RAPPORT A 6 °/°
4 °/°	$1-\frac{1}{3}$	5 °/°	$1-\frac{1}{6}$
4,25	$1-\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{6}\right)$	5,25	$1-\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{4}\right)$
4,50	$1-\frac{1}{4}$	5,50	$1-\frac{1}{12}$
4,75	$1-\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{6}\right)$	5,75	$1-\frac{1}{24}$

10. **Méthode de Thoyer.** — On peut également simplifier les opérations en employant la méthode de Thoyer perfectionnée par Cauchy.

Elle consiste simplement en une disposition matérielle particulièrement commode pour effectuer les calculs.

Soit, par exemple, à effectuer un grand nombre de calculs d'intérêts à un même taux, les sommes étant a, a', a'', ... pour des nombres de jours n, n', n'', ... La méthode s'applique directement si n est inférieur à 99. Si n dépasse 99, on le décomposera en deux ou plusieurs nombres inférieurs à ce dernier.

Ceci posé, on inscrit chaque somme a, a', a'', ... dans un tableau analogue à celui ci-dessous, et dans la case intersection de la ligne ayant le numéro indiqué par le chiffre des dizaines de n et de la colonne ayant le numéro indiqué par le chiffre des unités.

Unités des nombres de jours

Dizaines des nombres de jours

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Dizaines des nombres de jours (totaux partiels)
0											l_0
1											l_1
2											l_2
3											l_3
4											l_4
5						$a^{(n)}$					l_5
6											l_6
7											l_7
8											l_8
9											l_9
Totaux partiels	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	$10T$
Report des totaux de la dernière colonne	$10l_0$	$10l_1$	$10l_2$	$10l_3$	$10l_4$	$10l_5$	$10l_6$	$10l_7$	$10l_8$	$10l_9$	
Totaux	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_9	
Multiplicateurs	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
		n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8	n_9	N

On totalise en long et en travers les lignes et les colonnes, et l'on remarque que les totaux T

$$C_0 + C_1 + \dots + C_9 \quad \text{et} \quad l_0 + l_1 + \dots + l_9$$

sont égaux, d'où une première vérification très simple.

On reporte ensuite dans la ligne en dessous des totaux

C_0, C_1, ... les nombres l_0, l_1, ... multipliés respectivement par 10, et l'on additionne dans chaque colonne. On obtient des nombres α_0, α_1, ... dont le total θ est égal à 11 T.

Les ligne et colonne o sont indiquées pour ordre dans le cas où des capitaux ne rapporteraient aucun intérêt.

On multiplie ensuite chacun de ces nombres α_0, α_1, ... α_9 par 0, 1, 2, 3, ... 9 respectivement. On obtient de nouveaux nombres, p_1, p_2, ... p_9, dont le total N est égal à la somme $an + a'n' + \ldots$

En effet, N contient le produit de $a^{(p)}$ par $n^{(p)}$ quel que soit p. Soit $n^{(p)} = 45$. N contient $5a^{(p)}$ dans le produit $5C_5$, lequel est contenu dans le nombre p_5 qui est égal à $5(C_5 + 10l_5)$.

De même N contient $40a^{(p)}$ dans le produit $40l_4$ contenu dans le nombre $p_4 = 4(C_4 + 10l_4)$.

Cauchy a fait remarquer que l'on pouvait calculer N sans faire les multiplications des nombres α par 0, 1, 2, etc. Il forme les nombres :

$$\begin{array}{l} \alpha_9 \\ \alpha_9 + \alpha_8 \\ \alpha_9 + \alpha_8 + \alpha_7 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_9 + \alpha_8 + \alpha_7 + \ldots + \alpha_1, \end{array}$$

par additions successives, et il additionne les totaux obtenus ; on voit de suite que cette somme est égale à :

$$9\alpha_9 + 8\alpha_8 + \ldots + \alpha_1,$$

c'est-à-dire à N.

Cauchy a donné de plus une vérification intéressante en formant les nombres :

$$\begin{array}{l} \alpha_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_9, \end{array}$$

dont la somme P, ajoutée à N, donne dix fois la somme

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_9 = \theta - \alpha_0,$$

c'est-à-dire

$$P + N = 10(\theta - \alpha_0).$$

Il suffit d'ajouter deux lignes au tableau précédent, afin de calculer par additions successives les nombres de Cauchy.

Exemple. — *Calculer par la méthode de Thoyer les intérêts à* 4 °/₀ *des capitaux suivants* :

47.000 fr. *pendant* 61 *jours* ; 9.000 fr. *pendant* 69 *jours* ; 39.000 fr. *pendant* 86 *jours* ; 53.000 fr. *pendant* 89 *jours* ; 85.000 fr. *pendant* 107 *jours.*

On voit que pour la dernière somme on devra décomposer *n* en deux, par exemple 60 et 47.

Le tableau de Thoyer se formera comme suit (voir, pages 22 et 23) :

L'intérêt total produit étant $\frac{N}{D}$ et le diviseur correspondant à 4 °/₀ étant 9.000 on aura :

$$I = \frac{20.654.000}{9.000} = 2.294 \text{ fr. } 89.$$

11. **Echéance commune d'intérêts.** — Le problème de l'échéance commune consiste à remplacer divers capitaux, produisant intérêt pendant des périodes diverses, par un seul capital produisant le total de leurs intérêts pendant une autre période.

Soient C_1, C_2,... C_p les capitaux placés pendant n_1, n_2,... n_p jours, et C le capital qui doit les remplacer et produire intérêt pendant n jours, on aura l'égalité :

$$\frac{C_1 i n_1}{360} + \frac{C_2 i n_2}{360} + \dots \frac{C_p i n_p}{360} = \frac{Cin}{360},$$

ou :

$$C_1 n_1 + C_2 n_2 + \dots C_p n_p = Cn,,$$

c'est-à-dire que le Nombre correspondant au capital C est égal à la somme des Nombres correspondant aux autres capitaux.

En général, on donne C et l'on cherche n, d'où le nom de problème *d'échéance commune* donné à ce calcul. On remarque que cette échéance est indépendante du taux d'intérêt i.

Exemple. — *Quelle doit être l'échéance d'un capital de* 200.000 fr. *produisant le même intérêt que :*
47.000 fr. *pendant* 61 *jours* ; 9.000 fr. *pendant* 69 *jours* ;
39.000 fr. *pendant* 86 *jours* ; 53.000 fr. *pendant* 89 *jours* ;
85.000 fr. *pendant* 107 *jours.*

on aura :

$$n = \frac{47.000 \times 61 + 9.000 \times 69 + 39.000 \times 86 + 53.000 \times 89 + 85.000 \times 107}{200.000},$$

$$= \frac{20.695}{200} = 103 \text{ jours } 27.$$

On néglige la fraction de jours si elle est inférieure à 0,5 ; si elle égale ou supérieure à 0,5, on augmente d'une unité le nombre de jours.

	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3					
4					
5					
6	85 000	47 000			
7					
8					
9					
Totaux.	85 000	47 000	»	»	»
Report des totaux de la dernière colonne multipliés par 10.	»	»	»	»	850 000
Nombres α . . .	85 000	47 000	»	»	850 000
Multiplicateurs . .	0	1	2	3	4
Produits.	»	47 000	»	»	3 400 000

VÉRIFICATIONS DE CAUCHY

1re somme des α	3 413 000	3 366 000	3 366 000	3 366 000
2e somme des α	47 000	47 000	47 000	897 000

5	6	7	8	9	TOTAUX (dizaines)
		85 000			85 000
				9 000	141 000
	39 000			53 000	92 000
»	39 000	85 000	»	62 000	318 000
»	1 410 000	»	920 000	»	3 180 000
»	1 449 000	85 000	920 000	62 000	3 498 000
5	6	7	8	9	
»	8 694 000	595 000	7 360 000	558 000	20 654 000
2 516 000	2 516 000	1 067 000	982 000	62 000	20 654 000
897 000	2 346 000	2 431 000	3 351 000	3 413 000	13 476 000

$(3\,498\,000 - 85\,000) \times 10 = 3\,413\,000 \times 10 =$ 34 130 000

12. **Echéance moyenne.** — Dans le cas particulier d'un capital C égal à la somme des capitaux portant intérêts, l'échéance trouvée prend le nom d'*échéance moyenne*.

On a :

$$C_1n_1 + C_2n_2 + \dots C_pn_p = (C_1 + C_2 + \dots C_p) \times n,$$

d'où :

$$n = \frac{\Sigma C_p n_p}{\Sigma C_p}.$$

Cette échéance est indépendante du taux d'intérêt.

Exemple. — *Quelle est l'échéance moyenne des capitaux suivants :*

47.000 fr. *pendant* 61 *jours* ; 9.000 fr. *pendant* 69 *jours ;*
39.000 fr. *pendant* 86 *jours ;* 53.000 fr. *pendant* 89 *jours ;*
85.000 fr. *pendant* 107 *jours ?*

on aura :

$$n = \frac{47.000 \times 61 + 9.000 \times 69 + 39.000 \times 86 + 53.000 \times 89 + 85.000 \times 107}{47.000 + 9.000 + 39.000 + 53.000 + 85.000} =$$

88 j. 64 ; soit 89 jours.

CHAPITRE II

COMPTES COURANTS ET D'INTÉRÊTS A COURTE PÉRIODE

13. **Compte courant simple.** — La comptabilité ayant pour but essentiel de donner la situation d'une entreprise quelconque, et, en particulier, sa position envers des tiers, on ouvre à chacun de ces derniers un « compte » qui le caractérise et donne l'historique des opérations le concernant.

Conformément aux règles de la comptabilité, le compte est divisé en deux parties : le *Doit* et *l'Avoir*.

On présente en général le compte sous forme de tableau analogue au suivant :

Doit ou Débit. COMPTE DE X... *Avoir ou Crédit.*

DATES	OPÉRATIONS	SOMMES		DATES	OPÉRATIONS	SOMMES	
3/1	Payé l'effet n°...	10 000	»	1/1	Son versement espèces	20 000	»
9/3	S/ virement s/ la Banque . . .	9 000	»	8/1	Coupons encaissés	8 000	»
				10/2	S/ virement du Comptoir . . .	5 000	»
	Solde créditeur (pour balance).	14 000	»				
		33 000	»			33 000	»

Dans le tableau *Doit*, on inscrit toutes les opérations constatant des valeurs délivrées pour le compte de X ou à lui-même, ainsi que les pertes qu'il doit supporter; l'inscription au tableau du *Doit* s'appelle passer un *débit* ou *débiter* X.

Dans le tableau *Avoir*, on inscrit toutes les opérations constatant les valeurs reçues de X ou pour le compte de X, ainsi que les bénéfices lui revenant; l'inscription au tableau de l'*Avoir* s'appelle passer au « crédit » de ou « *créditer* X ».

Ces comptes, qui « *courent* » du commencement à la fin d'un exercice, font apparaître des totaux d'opérations de débit et de crédit.

La différence entre ces totaux s'appelle « *solde* ».

Ce solde est « *créditeur* » si le total du crédit est supérieur à celui du débit ; il est « *débiteur* » dans le cas contraire.

On a l'habitude de le porter du côté le plus faible et de faire l'addition totale, afin que les totaux soient égaux ; on dit qu'on porte le solde pour « *balance* ».

Le solde créditeur est donc toujours porté dans le tableau du *Doit*, et le solde débiteur dans le tableau de l'*Avoir*.

14. **Compte courant et d'intérêts.** — Dans la plupart des cas, les comptes courants sont à intérêts, c'est-à-dire que toute somme qui est inscrite porte intérêts dans certaines conditions définies par un contrat, soit au profit du Banquier, soit au profit du titulaire du compte, suivant que la somme est débitrice ou créditrice.

15. **Taux d'intérêt.** — Les conventions relatives au taux d'intérêt peuvent être de trois natures :

Le taux est le même pour le débit et le crédit : on dit que le compte courant est à *taux réciproques* : c'est le cas le plus général.

Le taux est différent au débit et au crédit, ou il varie suivant la nature du solde : on dit que le compte courant est à *taux non réciproques ou différentiels.*

Enfin, le taux peut changer dans le courant d'une année ; le compte courant est dit à *taux variables.*

16. **Date de valeur.** — Les sommes inscrites dans un compte courant ne portent pas nécessairement intérêt à partir du jour même des opérations auxquelles elles se rapportent.

Pour les sommes inscrites « au débit » qui paraissent nécessiter un approvisionnement de fonds antérieur à l'opération, les banquiers comptent souvent les intérêts à partir de la veille, ou même de l'avant-veille, si la veille est jour férié Au contraire, pour les sommes inscrites au crédit, le banquier, alléguant qu'il ne peut les placer que le lendemain, ou même plus tardivement, ne fait partir les intérêts qu'après un ou plusieurs jours : ces jours de carence s'appellent « *jours de vue* ».

Sauf stipulation contraire, on compte l'intérêt du jour du versement d'un capital, mais on ne compte pas le jour du payement ou d'arrêté. Cette règle, qui résulte du fait du payement de l'intérêt à terme échu, c'est-à-dire seulement le lendemain de son échéance, se formule comme suit :

« L'intérêt du jour du payement est au profit de celui qui paye ».

Le calcul du nombre de jours s'écoulant entre deux dates est facilité par le tableau ci-après (p. 28).

Pour ne commettre aucune erreur, il faut se rap-

TABLEAU DONNANT LE NOMBRE DE JOURS COMPRIS ENTRE DEUX DATES. *(Deux Années ordinaires)*

(Année suivante)

	Fevrier	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet	Août	Septembre	Octobre	Novembre	Décembre	Janvier	Fevrier	Mars	Av.	M.	Juin	Juillet	Août	Septembre	Octobre	Novembre	Décembre
du Janvier au	31	59	90	120	151	181	212	243	273	304	334	365											
Fevrier		28	59	89	120	150	181	212	242	273	303	334	365										
Mars			31	61	92	122	153	184	214	245	275	306	337	365									
Avril				30	61	91	122	153	183	214	244	275	306	334	365								
Mai					31	61	92	123	153	184	214	245	276	304	335	365							
Juin						30	61	92	122	153	183	214	245	273	304	334	365						
Juillet							31	62	92	123	153	184	215	243	274	304	335	365					
Août								31	61	92	122	153	184	212	243	273	304	334	365				
Septembre									30	61	91	122	153	181	212	242	273	303	334	365			
Octobre										31	61	92	123	151	182	212	243	273	304	335	365		
Novembre											30	61	92	120	151	181	212	242	273	304	334	365	
Décembre												31	62	90	121	151	182	212	243	274	304	335	365

Ex : *Combien de jours du 30 Septembre 1852 au 12 Mai 1853? Cherchez la rencontre de la colonne horizontale* Septem. *avec la colonne* Mai *(année suivante); on trouve 242 (c'est le nombre de jours du 30 Sept. au 31 Mai). Il faut retrancher 19 jours pour revenir du 31 Mai au 12 Mai.*

On a ainsi : 223 jours

Dans l'évaluation du nombre de jours compris entre deux dates on compte le jour où se fait l'opération; mais on ne compte pas le jour de l'échéance.

peler que ce sont toujours des nombres de jours entre deux dates déterminées qui interviennent dans les calculs.

Si l'on prête une somme le 10 mai et que le remboursement ait lieu le même jour, il est bien certain qu'il n'y a pas à compter d'intérêts. Si cette somme est remboursée le 11, il y aura lieu de payer les intérêts du 10 au 11 mai; c'est l'intérêt du 10 mai qui est payable le 11 mai.

Cela explique que l'intérêt du jour de l'arrêté d'un compte courant ne soit jamais compris dans ce compte. On doit donc, pour parler correctement, dire : le compte courant arrêté au 1[er] janvier 1914, et non : le compte courant arrêté au 31 décembre 1913, puisque, en pratique, on comptera toujours les opérations et les intérêts afférents au dernier jour de l'année 1913.

Il est indispensable de s'exercer à calculer les nombres de jours séparant deux dates, soit avec l'aide du tableau précédent, soit en s'inspirant des exemples qui suivent : quelques exercices suffiront pour être absolument sûr des résultats.

Exemple. — *Combien y a-t-il de jours du 8 février au 17 juillet ?*

Combien y a-t-il de jours du 22 février au 15 septembre ?

Combien y a-t-il de jours du 12 octobre au 9 mars ?

1[er] Cas. — On écrit les dates 8/2 et 17/7 et l'on calcule comme suit :

(7 — 2) = 5 mois de 30 jours	150
du 8 au 17	9
mars, mai ont 31 jours	2
février n'a que 28 jours (année ordinaire).	— 2
Total.	159

En comptant 9 jours du 8 au 17 on ne compte pas l'un des deux jours le 8/2 ou le 17/7 ; effectivement c'est le 17 qui n'est pas compté.

2e Cas. — 22/2 au 15/9.

(9 — 2)	7 mois de 30 jours.	210
	mars, mai, juillet, août ont 31 jours. .	4
	février n'a que 28 jours.	— 2
	du 15 au 22 (à retrancher).	— 7
	Total	205

3e Cas. — 12/10 au 9/3.

(12 + 3 — 10) =	5 mois à 30 jours	150
	octobre, décembre, janvier ont 31 jours	3
	février n'a que 28 jours. .	— 2
	du 12 au 9 (à retrancher) .	— 3
	Total. . .	148

17. **Méthodes de calcul.** — Le calcul du solde des comptes courants et d'intérêts peut se faire à l'aide de la disposition du tableau indiqué précédemment, soit par la méthode *directe* soit par la méthode *indirecte* ou *rétrograde*.

On peut aussi faire ce calcul par une autre disposition matérielle appelée méthode *hambourgeoise*.

18. **Méthode directe.** — Le tableau de la page 31 indique la disposition matérielle d'un compte courant arrêté au 1er juillet par la méthode directe.

On complète le tableau ordinaire du compte de la comptabilité par l'addition des colonnes suivantes :

Date de valeur, dans laquelle on indique le jour du point de départ réel des intérêts ; par exemple, veille pour le débit, lendemain pour le crédit.

DATE DE L'OPÉRATION	NATURE DE L'OPÉRATION	SOMMES	DATE DE VALEUR	NOMBRE DE JOURS	NOMBRES OU INTÉRÊTS	DATE DE L'OPÉRATION	NATURE DE L'OPÉRATION	SOMMES	DATE DE VALEUR	NOMBRE DE JOURS	NOMBRES OU INTÉRÊTS
9/1	Payé pour X...	15 000	9/1	173	25 950	1/1	Solde créditeur.	10 000	1/1	181	18 100
						3/1	Versement espèces. . . .	2 000	3/1	179	3 580
	Balance des nombres . .				3 880	19/1	— d° —	5 000	19/1	163	8 150
							Intérêts s/ la balance des nombres. .	32,30			
					29 830						29 830
	Solde créditeur. . . .	2 032,30									
		17 032,30						17 032,30			

Dans le compte donné à titre d'exemple, c'est le jour même de l'opération qui est indiqué.

Nombre de jours, dans laquelle on porte le nombre de jours s'écoulant depuis la date de valeur, y compris ce jour, jusqu'au jour de l'arrêté du compte courant, non compris ce jour.

Ainsi, du 1er janvier au 30 juin (veille du 1er juillet) :

$$31 + 28 + 31 + 30 + 31 + 30 = 181\,;$$

du 19 janvier au 30 juin :

$$13 + 28 + 31 + 30 + 31 + 30 = 163, \qquad \text{etc.}$$

Nombres ou intérêts, dans laquelle on inscrit soit les produits des capitaux par les nombres de jours divisés par 100, soit directement les intérêts au taux donné ou à 6 %.

Si l'on inscrit dans cette colonne les Nombres, on détermine la différence des totaux du débit et du crédit que l'on inscrit pour balance du côté le plus faible (3.880).

Les intérêts se trouvant être de même nom que ce solde (et de nom contraire au côté dans lequel on le porte pour balance), on calcule et l'on porte les intérêts obtenus en multipliant le solde des Nombres par $\frac{100\,i}{360}$, soit ici $\frac{3}{360}$, du côté opposé à la balance.

On compare ensuite les totaux des capitaux du crédit et du débit et la différence est le solde du compte.

Le total du crédit étant, dans le cas actuel, supérieur à celui du débit, on doit porter le solde pour balance du côté du débit.

Il faut remarquer que si l'on emploie la durée conventionnelle de 360 jours, toute somme portée en compte entre le 1er et le 5 janvier rapporte plus d'un an d'intérêts.

Si le taux d'intérêt varie dans l'intervalle entre l'ouverture et l'arrêté du compte, on doit arrêter provisoirement le compte au changement de taux ; mais il faut avoir soin de ne pas comprendre les intérêts déjà calculés dans les soldes provisoires successifs : en opérant autrement, on leur ferait porter intérêts à nouveau, et il y aurait ainsi capitalisation des intérêts contrairement à la loi à moins, bien entendu, de conventions spéciales à ce sujet.

Lors de la remise d'effets à encaisser dont l'échéance est postérieure à la date d'arrêté du compte, le banquier peut les comprendre, sous réserve expresse d'encaissement, en leur comptant des intérêts négatifs ou intérêts *rouges* (ou des nombres rouges).

Il n'y a pas à s'embarrasser de ces intérêts soustractifs : ils viennent simplement diminuer les totaux des colonnes dans lesquelles ils sont portés.

Leur introduction revient à ramener la valeur de l'effet au dernier jour du compte courant, et 'on pourrait d'ailleurs faire un bordereau d'escompte dont on introduirait le solde dans le compte courant, valeur du dernier jour du compte courant.

19. **Méthode indirecte ou rétrograde de Laffite.** — Dans la méthode directe, on ne fait en général tous les calculs qu'au moment même de la date d'arrêté du compte courant, si celle-ci est quelconque.

Quand elle est déterminée et certaine, on peut inscrire au fur et à mesure les intérêts et abréger le travail d'arrêté, car il n'y a que très peu d'opérations à effectuer pour terminer le compte.

La méthode indirecte permet de réduire les calculs à un simple arrêté, comme dans le cas précédent, que l'on connaisse ou non la date de l'arrêté du compte.

On dresse un tableau des opérations identique à celui de la méthode directe, mais les opérations à faire pour le calcul des nombres sont basées sur les remarques ci-après.

Les intérêts créditeurs comptés dans la méthode directe sur une somme du crédit sont égaux à la différence entre les intérêts *créditeurs* sur cette somme, comptés pendant toute la durée du compte courant, et les intérêts *débiteurs* calculés sur cette même somme depuis l'origine jusqu'à la date de l'opération.

De même, les intérêts débiteurs calculés sur une somme portée au débit sont égaux aux intérêts débiteurs de cette somme depuis l'origine jusqu'à la fin du compte, diminués des intérêts créditeurs de cette même somme depuis l'origine jusqu'à son entrée en compte.

Si donc on porte dans la colonne « Nombre de jours » les nombres de jours écoulés depuis l'origine du compte jusqu'à la date de valeur de chaque somme, les intérêts (ou les Nombres) qu'ils permettront de calculer seront des intérêts (ou des Nombres) créditeurs au débit et débiteurs au crédit.

Ces opérations pourront se faire au moment même d'une opération sans qu'il y ait à préjuger de la date d'arrêté.

Dès que l'on connaîtra celle-ci, il faudra calculer les intérêts de chaque somme depuis l'origine jusqu'à l'arrêté, ou mieux, les intérêts (ou les Nombres) des totaux des capitaux du crédit et du débit, ou enfin même de la différence de ces capitaux.

Cette différence obtenue sera portée pour balance du côté des capitaux les plus faibles : les intérêts (ou Nombres) lui correspondant étant de nom contraire à ces capitaux seront du même nom que les intérêts (ou Nombres) portés dans la colonne « Intérêts ou Nombres » des capitaux les plus faibles et s'additionneront dans cette colonne avec les sommes qui y figureront.

Le solde des intérêts ou des nombres, qui fera la balance entre les totaux des colonnes « Intérêts ou Nombres », sera de *même nom* que le côté du tableau dans lequel il figurera, puisque l'on a inversé ces sommes dans les précédents calculs.

S'il s'agit de nombres, les intérêts correspondants s'ajouteront aux capitaux du côté de la balance des Nombres ; s'il s'agissait d'intérêts, ils s'ajouteraient aux capitaux du côté de la balance des intérêts.

Le compte serait arrêté ensuite comme dans la méthode directe.

Le tableau suivant (p. 36) indique la marche des opérations, il est facile de suivre la concordance des diverses sommes avec celles qui sont portées dans le compte-courant par la méthode directe.

20. **Méthode hambourgeoise.** — Dans cette méthode, on suit les opérations au fur et à mesure de leur arrivée sur un seul tableau, en déterminant après chacune d'elles le solde des capitaux et en calculant les intérêts débiteurs ou créditeurs produits par le précédent solde jusqu'à l'opération que l'on vient d'inscrire.

Cette méthode est surtout commode lorsque le taux est différent suivant la nature du solde, c'est-à-dire suivant qu'il y a avance de fonds par le banquier ou provision chez lui.

DATE DES OPÉRATIONS	NATURE DES OPÉRATIONS	SOMMES	DATE DES VALEURS	NOMBRE DE JOURS	INTÉRÊTS OU NOMBRES CRÉDITEURS	DATE DES OPÉRATIONS	NATURE DES OPÉRATIONS	SOMMES	DATE DES VALEURS	NOMBRE DE JOURS	INTÉRÊTS OU NOMBRES DÉBITEURS
9/1	Payé pour X...	15.000	9/1	8	1.200	1/1	Solde à nouveau. . . .	10.000	1/1	0	»
						3/1	Espèces. . . .	2.000	3/1	2	40
30/6	Balance provisoire des capitaux : 17.000 — 15.000 = 2.000		30/6	181	3.620	19/1	Espèces. . . .	5.000	19/1	18	900
							Balance des nombres *créditrice*. . .				3.880
					4.820						4.820
							Intérêts s/ balance des nombres . .				
	Solde créditeur. . . .	2.032,30						32,30			
		17.032,30						17.032,30			

Les calculs d'intérêts peuvent être effectués directement ou par la méthode des Nombres.

Le tableau ci-après (voir page 38) indique la manière dont on doit établir le compte courant.

21. **Frais et commissions.** — Les banquiers prélèvent souvent, en sus des bénéfices provenant des jours de vue, divers frais et commissions que l'on appelle *agio*. Ces frais sont ceux de timbre d'affranchissement, d'avis d'encaissement, de frais d'acceptation, etc.

Quant aux commissions, elles consistent en commission de banque, change de place, commission pour effets longs, etc.

Pour en tenir compte, on ouvre après la colonne des sommes deux colonnes intitulées : Taux de commission, etc., et Commissions, etc., dans lesquelles on porte les taux et les valeurs des frais divers.

Il faut avoir soin de reporter les frais et commissions du crédit en augmentation du total des frais et commissions du débit, et l'ensemble est porté dans la colonne des sommes débitrices.

DATES	LIBELLÉS	CAPITAUX		NOMBRE DE JOURS	NOMBRES	
		DÉBITEURS	CRÉDITEURS		DÉBITEURS	CRÉDITEURS
1/1	Solde créditeur. . . .	»	10 000	2		200
3/1	Versement espèces. .	»	2 000			
		»	12 000	6		720
9/1	Payé pour X... . . .	15 000	»			
		3 000	»	10	300	
19/1	Versement espèces. .	»	5 000			
			2 000	163		3 260
	Balance des nombres.				3 880	
	Intérêts créditeurs à 3 %.	»	32,30			
					4 180	4 180
	Solde créditeur. . .	»	2 032,30			

CHAPITRE III

ESCOMPTE

22. **Définition.** — Si une somme C est stipulée payable dans un certain délai, sa valeur à toute époque antérieure à son échéance est évidemment plus faible que C ; l'opération qui consiste à rechercher cette valeur réelle ou valeur *actuelle* s'appelle escompter la somme C ou capital *nominal.*

23. **Escompte en dedans ou rationnel et Valeur actuelle.** — Soit A la valeur actuelle, on doit écrire *rationnellement* que A, augmenté de ses intérêts pendant la période qui s'écoulera depuis l'époque actuelle jusqu'à l'échéance, doit reproduire la valeur nominale C ; on aura donc :

$$A + \frac{Ain}{360} = C.$$

La valeur actuelle sera :

$$A = \frac{C \times 360}{360 + in}.$$

L'escompte est égal à

$$C - A = \frac{Ain}{360} = \frac{Cin}{360 + in}.$$

Cette formule, qui donne un résultat rationnel appelé *escompte en dedans*, parce qu'il est compris dans la valeur nominale du billet, n'est généralement pas employée dans la pratique à cause des calculs laborieux qu'elle entraîne ;

on lui préfère la formule dite *de l'escompte commercial* ou *escompte en dehors*.

24. **Escompte en dehors ou commercial et Valeur actuelle.** — L'escompte en dehors est l'intérêt de la valeur nominale du billet, soit : $\frac{Cin}{360}$; la valeur actuelle est alors :

$$A = C - \frac{Cin}{360} = C\left(1 - \frac{in}{360}\right).$$

Le calcul de l'escompte est simplement celui de l'intérêt ordinaire, et les méthodes indiquées précédemment s'appliquent sans difficulté.

Exemple. — *Calculer l'escompte en dedans et l'escompte en dehors d'un billet de* 3.200 fr. *escompté pour* 52 *jours à* 4 °/₀ :

1° Escompte en dedans :

$$e_1 = \frac{3.200 \times 0{,}04 \times 52}{360 + 0{,}04 \times 52} = 18{,}38.$$

2° Escompte en dehors :

Pour 90 jours l'intérêt est de. . .	32 fr.
45	16
10 ($^1/_9$ de 90)	3, 555
— 3 ($^1/_{30}$ de 90).	— 1, 066
net. .	18, 489

25. **Remarques sur les escomptes.** — Quelle que soit la manière dont l'escompte est calculé, on a toujours l'égalité fondamentale :

Valeur nominale = Valeur actuelle
+ Escompte correspondant.

l'escompte étant l'intérêt de la valeur actuelle, ou l'intérêt de la valeur nominale, suivant que l'escompte est *en dedans* ou *en dehors*.

L'escompte en dedans étant l'intérêt d'une somme inférieure à la valeur nominale est inférieur à l'escompte en dehors.

L'escompte en dedans $\frac{Cin}{360 + in}$ tend vers la valeur nominale si n augmente indéfiniment, mais il reste toujours inférieur à cette valeur.

Au contraire, l'escompte en dehors $\frac{Cin}{360}$ devient égal à C quand $in = 360$, c'est-à-dire quand n est égal au diviseur $\frac{360}{i}$.

Pour $n > \frac{360}{i}$, l'escompte en dehors est supérieur au capital nominal, et la valeur actuelle devient négative.

Cette remarque montre l'absurdité de la formule de l'escompte en dehors, qui ne peut s'appliquer pour des durées trop longues ; mais, en pratique, son emploi est limité à des durées de 2 à 3 mois au plus, et, dans ce cas, son application, bien qu'avantageuse pour le banquier escompteur, est adoptée d'une manière générale.

L'égalité fondamentale donne :

Valeur nominale = Valeur actuelle en dedans
+ Escompte en dedans

L'intérêt simple des deux membres de cette égalité est le même pour le taux et la durée convenus ; donc :

Intérêt de valeur nominale = Intérêt de valeur actuelle en dedans + Intérêt d'escompte en dedans, ou par définition :

Escompte en dehors = Escompte en dedans
+ Intérêt d'escompte en dedans

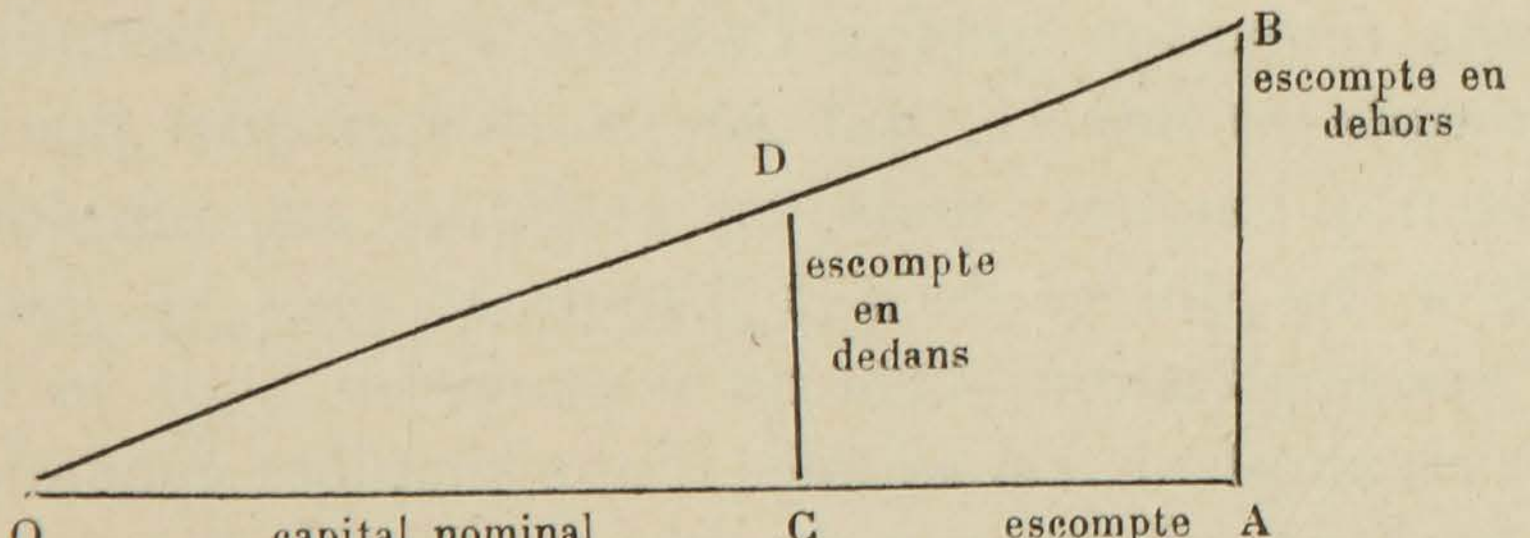
Ainsi la différence entre l'escompte en dehors et l'escompte en dedans est égale à l'intérêt de l'escompte en dedans.

On arriverait à cette conclusion en comparant les deux formules indiquées plus haut :

$$\Delta = \frac{Cin}{360} - \frac{Cin}{360 + in} = \frac{Cin}{360 + in} \times \frac{in}{360}.$$

c'est-à-dire l'intérêt pendant n jours au taux i de la somme $\frac{Cin}{360 + in}$, représentant l'escompte en dedans. Cette différence croît avec n et augmente indéfiniment.

L'escompte en dedans et l'escompte en dehors peuvent être représentés graphiquement d'une manière très simple comme l'indique la figure ci-après.



On a en effet :

$$\frac{\text{escompte en dehors}}{\text{escompte en dedans}} = \frac{AB}{CD} = \frac{\frac{Cin}{360}}{\frac{Cin}{360 + in}} = \frac{360 + in}{360}$$

$$= \frac{1 + \frac{in}{360}}{1} = \frac{C + \frac{Cin}{360}}{C} = \frac{OA}{OC}.$$

Exemple. — *Quelle est la valeur nominale d'un billet sachant que la différence de ses escomptes en dehors et en dedans est* 3 fr. 75 *pour* 45 *jours au taux de* 3 %?

3 fr. 75 représente l'intérêt de l'escompte en dedans à 3 % pour 45 jours :

or	100 fr.	rapportent	1 fr.	en 120 jours
	100	»	0, 50	» 60 »
	100	»	0, 125	» 15 »
d'où	100	»	0, 375	» 45 jours.

donc l'escompte en dedans est : $\frac{3,75 \times 100}{0,375} = 1.000$ fr.

et l'escompte en dehors : $1.000 + 3,75 = 1.003,75$.

La valeur nominale sera donc d'après le même raisonnement que précédemment : $\frac{1003,75 \times 100}{0,375} = 267.666,67$.

26. **Taux réel de l'escompte dans le cas de l'escompte en dehors.** — Le banquier qui escompte en dehors fait rapporter à son capital un taux supérieur au taux d'escompte.

Ce taux réel x est tel que l'intérêt de la valeur actuelle en dehors est égal à l'escompte en dehors, soit :

$$C\left(1 - \frac{in}{360}\right)\frac{x.n}{360} = \frac{Cin}{360},$$

d'où : $$x = \frac{360i}{360 - in} = i\,\frac{360}{360 - in} > i,$$

La différence

$$x - i = \frac{360i}{360 - in} - i = i\,\frac{in}{360 - in} = i\left(\frac{in}{360} + \frac{(in)^2}{360}\right);$$

soit, en négligeant le terme en i^3 :

$$i \cdot \frac{in}{360}$$

représente l'intérêt pour 1 an de l'intérêt du capital de 1 fr. pour la période donnée. Cette différence croît avec le temps n.

EXEMPLE. — *Un effet à 4 mois est escompté à 4 % avec une commission de 3/8 % et un change de 5/16 %.*

La somme remise par le banquier est 856.793 fr. 45.

Quelle est la valeur nominale de l'effet et quel est le taux auquel le banquier place son argent ?

Si l'effet était de 100 fr. il serait retenu :

pour escompte : $100 \times 0{,}04 \times \frac{4}{12} = \frac{4}{3}$ de franc,

pour commission : « $\frac{3}{8}$ de franc,

pour change : « $\frac{5}{16}$ de franc.

Soit au total : $\frac{4}{3} + \frac{3}{8} + \frac{5}{16} = \frac{97}{48}$,

et la somme reçue ne serait que : $100 - \frac{97}{48} = \frac{4.703}{48}$.

Autant de fois cette somme sera contenue dans 856.793 fr. 45 autant de fois il y aura 100 fr. dans le capital nominal du billet soit :

$$100 \times 856.793{,}45 : \frac{4.703}{48} = 874.464 \text{ fr. } 92.$$

Le banquier avançant $\frac{4.703}{48}$ touche après 4 mois $\frac{97}{48}$ d'intérêts, etc., soit pour un an $\frac{291}{48}$; le taux réel sera donc :

$$\frac{291}{48} - \frac{4.703}{48} = \frac{291}{4.703} = 0{,}06187.$$

27. **Effets de commerce.** — L'escompte a pour but de remplacer un billet, constatant une dette payable à une date fixée, par une somme payable immèdiatement en espèces ou par une incrisption au crédit d'un compte courant pour faciliter les transactions commerciales.

Ces billets sont soumis à diverses prescriptions indiquées aux articles 110 à 189 du Code de commerce; ils peuvent être endossés, c'est-à-dire passés à l'ordre d'une tierce personne. Ces endos successifs ajoutent une garantie de payement à l'échéance, chaque endosseur étant responsable individuellement en cas de non-payement; certains banquiers demandent deux ou trois signatures avant de consentir à l'escompte.

On appelle « effets bancables » ceux qui peuvent être escomptés par la Banque de France et qui doivent satisfaire aux conditions suivantes :

1° Être signés par 3 personnes ;

2° Avoir 5 jours au moins à courir pour Paris et 8 jours pour la province;

3° Ne pas porter la mention « sans frais » ;

4° Être payables dans une localité dans laquelle la Banque fait des encaissements.

Les banquiers escompteurs prennent une commission sur chaque opération variant de 0 fr. 125 ($^1/_8$) à 0 fr. 50 ($^1/_2$) $^0/_0$ de la valeur nominale; si, de plus, l'effet est payable dans une autre ville, ils font payer un *change de place* variant de 0 fr. 25 ($^1/_4$) à 0 fr. 50 ($^1/_2$) $^0/_0$ de la valeur nominale.

Le plus souvent, on spécifie un minimum de change ou un minimum d'intérêts, quand les effets sont de très faible importance (broches).

Les banques qui escomptent à un taux inférieur à celui de la Banque de France, demandent en général un minimum d'intérêts de 5 jours calculés au taux de la Banque.

On compte aussi des frais d'encaissement, d'acceptation, etc., qui augmentent singulièrement le taux réel d'escompte, surtout s'il s'agit d'effets de faible valeur.

Effets — F

VILLES	ÉCHÉANCES	SOMMES	INTÉRÊTS			CHANGES		FRAIS D'ACCEPTATION	TIMBRES	OBSERVATIONS
			NOMBRE DE JOURS	TAUX	PRODUIT	TAUX	PRODUIT			

Voir page 46 un modèle de bordereau des effets remis à l'escompte dans une grande banque.

Quand les bordereaux d'effets contiennent un grand nombre de titres, on a avantage à calculer l'escompte par la méthode de Thoyer.

28. **Échéance commune d'effets.** — On peut remplacer divers effets de valeurs nominales C_1, C_2, ... C_p, payables dans n_1, ... n_p jours, par un billet de valeur unique C, payable dans n jours, à la condition que les valeurs actuelles des billets soient égales.

On aura :

$$C_1 - \frac{C_1 in_1}{360} + C_2 - \frac{C_2 in_2}{360} + \ldots = C - \frac{Cin}{360},$$

en supposant que les calculs soient effectués avec l'escompte en dehors,

$$\text{ou :} \quad \frac{C_1 \times 360}{360 + in_1} + \frac{C_2 \times 360}{360 + in_2} + \ldots = \frac{C \times 360}{360 + in},$$

si les calculs sont effectués avec l'escompte en dedans.

Ces équations permettront de calculer C ou n suivant que l'une ou l'autre de ces quantités sera donnée.

Exemple. — *Quelle est l'échéance commune de* 3 *effets de :*

5.000 fr. *payables dans* 20 *jours* ;
8.000 « 40 «
6.000 « 42 *jours*,

que l'on remplace par un billet unique de 19.100 fr. *taux d'escompte* 3 %.

1° Escompte en dehors :

La valeur de n sera donnée par la formule :

$$5.000+8.000+6.000-\frac{0{,}03(5.000\times 20+8.000\times 40+6.000\times 42)}{360}=$$

$$19{,}100-\frac{0{,}03\times n\times 19.100}{360}.$$

d'où : $n = 98$ jours,

2° Escompte en dedans :

La formule indiquée précédemment donnera :

$$\frac{5.000}{360+0{,}03\times 20}+\frac{8.000}{360+0{,}03\times 40}+$$
$$\frac{6.000}{360+0{,}03\times 42}=\frac{19.100}{360+0{,}03\,n},$$

d'où $n = 99$ jours.

29. **Échéance moyenne d'effets.** — Si la valeur nominale de l'effet unique est égale à la somme des valeurs nominales des billets à remplacer, la formule se simplifie quand l'escompte pratiqué est l'escompte en dehors.

On a, en effet :

$$C_1+C_2+\ldots-\frac{C_1in_1}{360}-\frac{C_2in_2}{360}-\ldots=C-\frac{Cin}{360}.$$

En supprimant $C_1+C_2+\ldots$ et C, il vient

$$\frac{C_1in_1}{360}+\frac{C_2in_2}{360}+\ldots=\frac{Cin}{360},$$
$$C_1n_1+C_2n_2+\ldots=Cn.$$

Cette formule que l'on a déjà rencontrée, à propos de l'échéance commune d'intérêts (p. 21), est indépendante du taux d'escompte, et elle exprime que la somme des *Nombres* relatifs aux effets est égale au *Nombre* unique relatif à l'effet qui les remplace.

Dans le cas de l'escompte en dedans, la formule ne se simplifie pas.

EXEMPLE. — *Remplacer les 3 effets suivants par un effet unique de* 19.000 fr. :

5.000 fr.	payable dans	20	jours ;
8 000 fr.	«	40	«
6.000 fr.	«	42	jours.

On aura :

$$5.000 \times 20 + 8.000 \times 40 + 6.000 \times 42 = 19.000 \times n,$$

d'où $n = 35$ jours $^7/_{19}$.

Pratiquement on prendra 35 jours.

CHAPITRE IV

REMBOURSEMENT D'UN EMPRUNT PAR ANNUITÉS A INTÉRÊTS SIMPLES

30. **Définition du remboursement à intérêts simples.** — On dit qu'il y a eu remboursement à intérêts simples lorsque les intérêts produits ont été payés en même temps que le capital à époque déterminée.

Cette stipulation est actuellement la seule *normalement* légale, le paiement annuel des intérêts constituant une capitalisation que seules des *conventions* ou des *demandes judiciaires* peuvent autoriser.

Il est à peine besoin d'insister sur l'absurdité du maintien de la conception des intérêts simples pour de longues périodes ; le développement considérable des emprunts à long terme avec intérêts annuels ne s'est produit que dans le milieu du XIX[e] siècle, et la législation relative aux intérêts, datant du commencement du même siècle, n'a jamais été révisée ; il est vrai que les questions relatives à la capitalisation sont encore mal connues et que bien peu de personnes se rendent compte de la différence entre l'intérêt simple et l'intérêt composé :

Si l'on emprunte 100 francs à 5 $^0/_0$ pour 10 ans et que, au bout de 10 ans, on paie en une fois le capital 100 francs et les intérêts 50 francs on aura fait un emprunt à *intérêts simples*.

Si, au contraire, on paie chaque année 5 francs, — que le prêteur pourra placer et faire produire intérêts, —

et que l'on rembourse 100 francs au bout de 10 ans ; on aura procédé *par intérêts composés.*

31. **Imputations d'annuités à intérêts simples en remboursement d'un capital.** — Proposons-nous d'abord de calculer la valeur définitive totale B d'une série de n placements a effectués à la fin de chaque année, en tenant compte des intérêts simples produits par ces annuités.

On aura :

$$\begin{aligned} B &= [a + a(n-1)i] + \dots + (a + 2ai) + (a + ai) + a \\ &= na + a[i + 2i + \dots + (n-1)i] \\ &= na + a\frac{n(n-1)}{2}i = \frac{an}{2}[2 + (n-1)i] \end{aligned}$$

Supposons qu'une somme A ait été empruntée, elle serait devenue après n années : $A(1 + ni)$ et si n remboursements successifs a ont été opérés, il restera dû, après le n^e remboursement :

$$S = A(1 + ni) - \frac{an}{2}[2 + (n-1)i].$$

Pour que le remboursement soit complet, il faut que : $S = 0$, et la valeur de l'annuité qui rembourse le capital A est donnée par la formule :

$$a = \frac{2A(1 + ni)}{n[2 + (n-1)i]}$$

et

$$A = \frac{an[2 + (n-1)i]}{2(1 + ni)}.$$

On peut remarquer que :

$$a > \frac{A}{n}$$

32. **Formules diverses relatives au remboursement avec intérêts simples.** — On tire de la formule :

$$A(1 + ni) = \frac{an}{2}[2 + (n - 1)i]$$

$$i = \frac{2an - 2A}{n[2A - a(n - 1)]}.$$

La valeur de i étant nécessairement positive, on conclut de l'égalité précédente :

$$2A - a(n - 1) > 0$$

ou :

$$a < \frac{2A}{n - 1}$$

ainsi on a :

$$\frac{A}{n} < a < \frac{2A}{n - 1}.$$

On retrouvera des inégalités analogues lors de l'étude des limites de la valeur de l'annuité remboursant un capital en tenant compte des intérêts composés.

Le nombre d'annuités n est la racine d'une équation du second degré :

$$n^2 . ai + n(2a - ai - 2Ai) - 2A = 0.$$

L'une des racines est négative et correspond à un problème d'escompte, la valeur à adopter est la suivante :

$$n = \frac{-(2a - ai - 2Ai) + \sqrt{(2a - ai - 2Ai)^2 + 8\,Aai}}{2ai}$$

DEUXIÈME PARTIE

CHANGE

CHAPITRE PREMIER

GÉNÉRALITÉS

33. **Règlement de dettes.** — Le règlement de dettes contractées par des particuliers envers des tiers n'habitant pas la même ville donne lieu à des opérations dites de *change*.

Dans un même pays, les frais relatifs à ces opérations sont peu importants dans la plupart des cas, et se réduisent aux commissions spéciales appelées *frais de change de place* par les banquiers ; ils représentent le remboursement des frais généraux, des frais d'envoi, etc., et ne constituent pas un véritable change.

Cependant, dans certains pays, ces frais ont une importance réelle et prennent le nom de *change intérieur ;* en Chine, par exemple, le nombre de sapèques donné en *échange* d'un taël d'argent est variable. En Turquie, le change d'une livre ou d'un medjidjé, contre des pièces de moindre valeur donne lieu à une retenue. Il s'agit bien là d'un véritable *change* de monnaies.

Quand un particulier de nationalité A doit à un individu de nationalité B, il y a lieu de distinguer deux cas :

La dette de A est exprimée en sa propre monnaie : il ne doit évidemment payer, quel que soit le mode de règlement imaginé, que la somme effectivement indiquée dans le contrat de dette ; mais le national B pourra rechercher le moyen de toucher le plus possible de sa monnaie propre.

Exemple. — Si Paris doit 1.000 fr. à Londres (on a l'habitude de remplacer les noms des individus par les noms des villes qu'ils habitent ; ces villes s'appellent d'une manière générale « *devises* ») , le débours effectué par Paris sera 1.000 fr., ni plus, ni moins ; mais Londres, créancier, touchera plus ou moins de livres sterling suivant les conditions d'échange des monnaies ou *du change* entre les *deux* pays.

Si, au contraire, la dette de A est exprimée en monnaie de B, ce dernier recevra exactement son compte, mais A cherchera à débourser le moins possible de sa propre monnaie.

Exemple. — Si Paris doit 1.000 £ à Londres, ce dernier recevra exactement 1.000 £, mais Paris déboursera, pour solder sa dette, plus ou moins de francs, suivant les conditions *du change* entre les deux pays.

34. **Modes de règlement.** — Le règlement des dettes peut être opéré comme suit, en admettant qu'une compensation directe ne puisse s'établir :

1° En cas d'exigibilité immédiate ou presque immédiate, par de l'or ou de l'argent en monnaies du pays débiteur, du pays créancier, d'un autre pays ou en lingots, par de la monnaie fiduciaire (billon, billet de banque), ou enfin par un chèque sur une société de crédit ou un virement sur la Banque.

2° En cas de délai accordé au débiteur, par une reconnaissance de dette (billet à ordre) émise par le débiteur, ou une lettre de change (traite) émise par le créancier.

35. **Payement en numéraire.** — L'envoi pur et simple du montant de la dette en monnaie d'or ou d'argent dans laquelle elle est exprimée est évidemment le moyen qui se présente le premier à l'esprit ; mais on conçoit que la réception d'une autre monnaie ou de lingots puisse libérer un débiteur en considérant comme possible la transformation de ces valeurs en monnaie exprimant la dette.

Tout envoi est grevé de frais de transport et d'assurance contre la destruction et contre le vol ; de plus, il peut être difficile de se procurer le numéraire ; aussi ce mode de libération n'est-il employé que dans certains cas indiqués plus loin (61).

La monnaie de *billon*, dont la valeur réelle est inférieure à la valeur légale conventionnelle, ne peut évidemment libérer une dette que grâce à des stipulations entre pays ou à des lois monétaires spéciales.

Le *billet de banque* est l'engagement pris par cette banque de payer en monnaie métallique et à toute réquisition, la somme indiquée sur le billet.

Cette monnaie n'a de valeur que si elle est représentée par une encaisse métallique égale au total des billets émis ; cependant, dans la pratique, tous les porteurs ne se faisant pas rembourser immédiatement en cas de crise, l'encaisse métallique peut être de la moitié ou même du tiers de l'émission.

Ainsi le bilan de la Banque de France indique au 2 octobre 1913, 5.461.327.135 francs de billets de banque contre 4.094.594.549 d'or et d'argent en caisse (3.459.809.049 francs d'or).

Le rapport de la valeur de l'or à celle des billets est de 63 % à la Banque de France. En tenant compte de ce fait que l'argent (en écus) a force libératoire en France, la masse métallique détenue par la Banque de France est de 75 % de la valeur nominale des billets ; mais, en prenant l'argent au prix actuel (105 francs le kilogramme), le rapport n'est que 69 %, à peu près.

La force libératoire des billets est distincte, suivant qu'ils sont :

Au cours ordinaire : leur acceptation n'est pas forcée ;

Au cours légal : leur acceptation est forcée, mais ils peuvent être échangés immédiatement contre des espèces ;

Au cours forcé : leur acceptation est forcée, mais leur échange contre des espèces ne peut être opéré.

La *monnaie de papier* est celle émise par un Etat sous sa seule garantie et sans qu'elle soit représentée, comme pour le billet de banque, par des espèces métalliques ; sa valeur dépend essentiellement de la confiance accordée au pays, de son stock métallique, de sa prospérité commerciale ou des prévisions de son développement économique futur.

36. **Chèque.** — Le *chèque* est un ordre de payer donné à un tiers par un particulier qui possède chez le premier un compte et une provision d'espèces au moins égale au montant du chèque.

En France, le chèque est payable à présentation, dans un délai maximum de 5 jours à partir de sa date s'il est payable dans la place d'émission ; le délai est porté à

8 jours s'il est payable dans une autre place. Il est soumis au timbre de 0 fr. 10, quel que soit son montant, s'il est payable sur sa place d'émission; ce droit est de 0 fr. 20 s'il est payable dans une autre ville.

Il doit être daté en toutes lettres.

On appelle chèque *barré* ou *croisé* celui qui ne peut être payé qu'à un banquier : on barre le chèque en traçant deux lignes droites parallèles en travers et en inscrivant le nom du banquier entre ces lignes : c'est une garantie contre le paiement à tort, en cas de vol.

37. **Virement.** — Quand un débiteur et son créancier possèdent chacun un compte courant dans une banque, le règlement de la dette peut s'opérer par une simple écriture de cette banque, qui débitera le débiteur par le crédit du créancier.

L'ordre de passer cette écriture s'appelle *virement.*

Les ordres de virement sont soumis en vertu de la loi du 31 juillet 1913, à un droit de 0,10 pour les virements sur une même place, et 0,20 pour les virements d'une place sur une autre.

Exemple. — Paris le 1er janvier 1914, Virement pour 116.875 fr. 40.

La Banque de France est priée de porter au crédit du compte de M. X... la somme de cent seize mille huit cent soixante-quinze francs quarante centimes dont elle débitera le compte de :

B., 88, rue Saint-Lazare.

38. **Billet à ordre.** — Le *billet à ordre* est un engagement de payer, à une date déterminée, une somme con-

venue à une personne nommée ou à une autre personne au nom (*à l'ordre*) de laquelle le billet aura été passé.

EXEMPLE. — Paris, le 1[er] janvier 1914. — B. P. F. (bon pour francs).

Au douze mai prochain, je payerai à M. X..., où à son ordre, la somme de....., valeur reçue en (espèces, marchandises....).

B., 88, rue Saint-Lazare

M. X pourra donner ce billet en paiement d'une dette qu'il aura contractée envers Y en le passant à son ordre par l'inscription au verso de la mention suivante, appelée *endos* ou *endossement* :

Payez à l'ordre de M. Y...,

Valeur reçue.....

le 10 janvier 1914.
X..., rue... à...

Y passera lui-même le billet Z, et ainsi de suite jusqu'à l'échéance, époque à laquelle le signataire du billet B paiera la somme convenue. L'effet lui sera remis acquitté ; cet acquit peut ne pas être daté, et il n'est pas soumis à l'apposition d'un timbre quittance de 0 fr.. 10.

Le billet à ordre est soumis à un timbre proportionnel de 0 fr., 05 par 100 francs ou fraction de 100 francs (Lois du 5 juin 1850 et du 19 février 1874) ; il est donc préférable d'employer le billet à ordre plutôt que le chèque pour tout payement inférieur à 100 francs.

39. **Lettre de change.** — La *lettre de change* ou *traite* est un ordre de paiement donné par un créancier appelé

tireur, à un débiteur appelé *tiré* au profit d'une troisième personne appelée *bénéficiaire* ou *preneur* ou au profit du *tireur* lui-même.

Paris, le 1er janvier 1914 B. P. F...

Au douze mai prochain, veuillez payer à M. Y..., (*bénéficiaire*) ou à son ordre, la somme de..... valeur reçue en.....

X., rue .....
(*tireur*)

à M. B..., 88, rue Saint-Lazare, Paris
(*tiré*).

Cette lettre peut être passée à l'ordre de Z par Y, et ainsi de suite, par simple endossement, comme pour le billet à ordre.

Dans le cas de lettre tirée sur un pays étranger, on la dresse à plusieurs exemplaires numérotés, qui sont valables pour payement, tant que l'un d'eux n'a pas été effectivement payé.

Au douze mai prochain, veuillez payer par cette (première, ou seconde, ou troisième...) de change, les autres ne l'étant, (sous-entendu : pas payées)..... etc.....

La traite est soumise au droit de timbre de 0,05 $^0/_0$ si elle est créée ou payable en France ; si elle est seulement endossée en France, elle est soumise à un timbre de 0,50 par 2.000 francs. Quand le tiré inscrit sur la lettre de change les mots « accepté pour la somme de ... francs » suivis de la date et de la signature, il prend l'engagement ferme de payer la traite à échéance. Les lettres de change prennent alors le nom d'acceptations de tel ou tel (nom du tiré).

40. **Traite et remise**. — Quand le créancier crée une lettre de change sur l'étranger, on dit qu'il *tire* une traite ; cette opération a nécessairement pour but de fournir des disponibilités immédiates car il n'y aurait évidemment aucune nécessité de créer la lettre si le créancier ne désirait pas la négocier et le tireur *vend* cette traite.

Ainsi *tirer* une lettre de change implique nécessairement l'idée de *vente* postérieure.

Quand le débiteur, pour se libérer, *achète* une traite tirée sur le pays créancier et qu'il la remet en paiement, on dit qu'il fait une *remise*.

Ainsi *remettre* une lettre de change (faire une *remise*) correspond nécessairement à l'idée d'*achat* préalable.

Exemple. — Paris doit à Amsterdam 100.000 florins : il doit payer cette somme en déboursant plus ou moins de francs par l'un des deux procédés suivants :

Acheter une lettre de change de 100.000 florins tirée de Paris sur Amsterdam et l'envoyer à son créancier : il fera une *remise*.

Payer une *traite* tirée en francs sur Paris par le créancier de telle sorte que la négociation de cette traite à Amsterdam fournisse 100.000 florins au créancier.

Nous verrons plus loin les calculs relatifs à ces achats et à la détermination des prix à payer effectivement dans chaque opération.

CHAPITRE II

CHANGE DES MONNAIES ET LINGOTS

41. **Valeurs diverses des monnaies.** — Tous les pays possédant une monnaie d'or parfaitement définie ; cette monnaie, considérée comme simple lingot, a une valeur libératoire dans tous les autres pays qui peuvent la recevoir pour une somme tenant compte du poids réel, du titre réel, des frais de transport et de monnayage.

La valeur de la monnaie obtenue en tenant compte simplement de sa composition et de son poids s'appelle *valeur intrinsèque* ou *pair*.

La valeur obtenue en tenant compte des frais accessoires (transport, monnayage, frai) s'appelle *valeur au tarif*.

Cette dernière valeur est celle pour laquelle les monnaies des différents pays sont acceptées par les établissements d'État chargés du monnayage.

En France, l'Administration des monnaies et médailles publie la valeur au pair et la valeur au tarif dans l'*Annuaire du Bureau des longitudes*.

Il existe enfin une troisième valeur appelée *valeur commerciale* ; c'est le prix au cours de la Bourse arrêté par la Chambre syndicale des Agents de change.

42. **Valeur intrinsèque ou pair.** — En France, la monnaie d'or légale est taillée à raison de 155 pièces de

20 francs dans 1 kilogramme d'or au titre de 0,9, c'est-à-dire contenant 9 parties d'or et 1 de cuivre.

La valeur *au pair* du kilogramme d'or monnayé est donc :

$$155 \times 20 = 3.100 \text{ francs}$$

En négligeant le prix assez faible du cuivre et sans tenir compte des frais de fabrication, le prix du kilogramme d'or pur sera, en francs :

$$\frac{3.100}{0,9} = 3.444 \text{ fr. } 44\ldots$$

Il sera facile d'exprimer de la même manière le prix du kilogramme d'or pur en unité monétaire d'un pays quelconque, connaissant le poids et le titre de cette monnaie.

Exemple. — *Le poids de la £ (livre sterling) étant* $7^{gr},988$ *et son titre* $\frac{11}{12}$ *(standard), combien peut-on fabriquer de £ avec un kilogramme d'or pur ?*

Ces problèmes se résolvent toujours par l'application de la règle conjointe, c'est-à-dire d'une suite de règles de trois dont nous allons indiquer le mécanisme très simple.

Il consiste à poser une suite d'équivalences de valeurs en partant du nombre à chercher que l'on rapporte à une des données convenablement choisie.

On dira ainsi dans le problème posé ;

x£ sont fabriquées avec 1.000 grammes *d'or pur*; on cherche ensuite dans les données une équivalence à l'or pur et l'on dit :

11 grammes *d'or pur* correspondent à 12 grammes *d'or monnayé* ; on introduit ainsi la donnée d'or monnayé que l'on transforme en une nouvelle équivalence :

$7^{gr},988$ d'or monnayé (à $^{11}/_{12}$) représentent le poids d'1 £

L'opération est terminée quand, ayant épuisé toutes les données utiles, on retrouve la valeur qui a servi de point de départ(ici la £).

En pratique on écrit simplement :

x£ . . . . , . .	1.000 gr. d'or pur,
11 gr. d'or pur . .	12 gr. d'or monnayé à $^{11}/_{12}$,
7 gr. 988 or monnayé.	poids d'1 £.

Pour dégager l'inconnue x, il suffit de multiplier les nombres de la colonne de droite et de diviser ce produit par celui de tous les nombres de la colonne de gauche, autres que l'inconnue.

$$x = \frac{1.000 \times 12 \times 1}{11 \times 7{,}988} = 136 \text{ £}, 568...$$

On trouverait de même que le kilogramme d'or pur équivaut à : 2.790 reichmarks, 1.653,44 florins de Hollande, 1.377,77 florins d'Autriche ; 1.291,66 roubles, etc., etc.

On peut donc écrire :

francs 3.444,44 = £ 136,568 = Rm 2.790
= 1.653,44 flor. P. B.

Ces égalités permettent d'exprimer une monnaie en fonction d'une autre : les valeurs corrélatives de deux monnaies ainsi calculées sont appelées le *pair*.

Exemple. — *Quelle est la valeur d'un florin de Hollande en fonction de la livre sterling ?*

1 florin P, B. pèse 0 gr. 672 et est au titre de 900/1.000 ;
1 £ pèse 7 gr. 988 et est au titre de 916,66.../1.000 ou 11/12.

On aura donc :

1 florin P. B. = x Livres sterling :

1 £ pèse 7,988 d'or monnayé anglais :
12 gr. or monnayé anglais contiennent 11 gr. or fin ;
9 gr. or fin représentent 10 gr. or monnayé hollandais ;
0,672 or monnayé sont le poids de 1 fl. P. B. ;

$$\text{d'où : } x = \frac{1 \times 1 \times 12 \times 9 \times 0{,}672}{7{,}988 \times 11 \times 10 \times 1} = 0 \text{ £ } 08259.$$

Le tableau suivant indique, pour quatre pays, l'équivalence de l'unité monétaire de chacun d'eux en fonction des unités des trois autres, c'est-à-dire le *pair*.

	PAIR OU VALEUR DE L'UNITÉ MONÉTAIRE INDIQUÉE DANS LA PREMIÈRE COLONNE EN			
	FRANCS	LIVRES STERLING	REICHMARKS	FLORINS DES PAYS-BAS
1 franc vaut. . . .	1 f.	£ 0,03965	Rm 0,81	Fl. 0,48
1 livre sterling vaut .	25 f. 221	£ 1	Rm 20,43	Fl. 7,108
1 reichmark vaut . .	1 f. 2346	£ 0,04895	Rm 1	Fl. 0,593
1 florin des P.-B. vaut.	2 f. 083	£ 0,08259	Rm 1,687	Fl. 1

43. **Certain et incertain.** — Ces deux termes sont employés constamment dans le langage du change relatif à la valeur du papier de commerce ou de Banque ; ils le sont un peu moins dans le change des matières précieuses, mais on doit les définir dès maintenant.

Si, dans un pays A, on exprime la valeur de *une* unité monétaire indigène en fonction des unités monétaires des autres pays, on dit que A donne le *certain ;* le *certain* correspond donc à une quantité *fixe*, *certaine* (*une* unité de monnaie de A) et à une quantité variable, incertaine de monnaie étrangère.

Ainsi, dire à Londres que 1 £ vaut 25 fr. 221 ou 20,43 reichmarks est, à Londres, donner le *certain* à Paris, à Berlin.

Si deux pays A et B donnent réciproquement le *certain*, le produit de la valeur de leurs unités monétaires en fonction de l'autre est 1, puisque cette valeur résulte de l'égalité fondamentale du pair :

1 kilogr. d'or pur $= a$ unités A $= b$ unités B $= \ldots$

A donnant le certain dira 1 unité A vaut $\frac{b}{a}$ unités B.

A — — — 1 unité B — $\frac{a}{b}$ unités A.

Le produit $\frac{b}{a} \times \frac{a}{b}$ est bien égal à l'unité.

Exemple. — Londres donnant le certain à Berlin dira 1 £ vaut Rm 20,43 ; si Berlin donnait le certain à Londres (ce qui n'est pas), il dirait :

1 Rm vaut £ 0,04895 ;

On vérifie que $20{,}43 \times 0{,}04895 = 1$, sauf légère différence due aux décimales négligées.

Si, dans un pays A, on exprime chaque unité de monnaie étrangère par un nombre d'unités de monnaie de A, on dit que ce pays donne l'*incertain* aux autres pays ; l'*incertain* correspond ainsi à une quantité *incertaine*, *variable* de monnaie de A et à *une* unité de monnaie étrangère.

Ainsi, à Paris, on cote *une* livre sterling 25 fr., 221, *un* reichmark 1 fr., 2346, etc. ; Paris donne l'*incertain* à Londres, à Berlin.

Quand deux pays se donnent réciproquement l'*incertain*, le produit de la valeur de leurs unités monétaires en fonction de l'autre est 1 ; on le démontrerait comme ci-dessus.

Exemple. — Paris et Berlin se donnant réciproquement l'incertain on a : $1,2346 \times 0,81 = 1$ sauf légère différence due aux décimales négligées.

Cette remarque est générale, et si l'on considère plusieurs pays successivement, le produit des valeurs intrinsèques de chaque unité monétaire en fonction de l'unité du pays qui le suit sur la liste, le dernier facteur étant la valeur intrinsèque de l'unité du dernier pays en fonction de l'unité du premier, est égal à 1.

Ainsi la valeur intrinsèque du Rm en France est 1 fr. 2346.

La valeur intrinsèque du franc en Hollande est 0,48 (fl. P.-B.).

La valeur intrinsèque du florin P.-B. en Autriche est 0,833... (fl. Autr.).

La valeur intrinsèque du florin Autr. en Allemagne est 2,025.

On a :

$$1,2346 \times 0,48 \times 0,8333... \times 2,025 = 1,000.026$$

la différence est due aux décimales négligées.

Quand deux places A et B se donnent réciproquement, A le certain à B, B l'incertain à A, l'expression de l'unité monétaire de A est la même dans les deux pays quand ils sont au pair intrinsèque.

On dira, par exemple : à Londres (qui donne le *certain* à Paris), 1 £ vaut 25 fr. 221 ; et à Paris (qui donne l'*incertain* à Londres), 1 £ vaut 25 fr. 221.

Il semble que, logiquement, l'*incertain* devrait être employé par tous les pays : on exprimerait ainsi la valeur de l'*unité* de monnaie étrangère en monnaie indigène, comme on a l'habitude d'exprimer l'*unité* d'une marchandise quelconque en cette monnaie.

Cependant quelques places d'Europe (Londres entre autres) et toutes les places d'Amérique donnent le *certain*, probablement à cause de la valeur relativement élevée de leur unité monétaire.

44. **Valeur au tarif.** — La valeur au pair résulte simplement de la quantité de matière précieuse contenue dans l'unité monétaire de chaque pays, en supposant qu'elle remplisse exactement les conditions de poids et de titre imposées par les lois existantes.

En réalité, les monnaies ne sont pas exactement du poids et du titre légaux ; de plus, la circulation en altère le poids, et il en résulte un *frai* plus ou moins considérable.

Ces diverses conditions altèrent sensiblement la valeur des monnaies ; aussi les administrations des monnaies des divers pays font, en général, subir aux monnaies étrangères une diminution de titre et comptent des frais de monnayage : la valeur obtenue après toute réduction est appelée *valeur au tarif*.

45. **Diminution de titre.** — Le tableau ci-après donne, pour les quatre places : Paris, Londres, Berlin,

Amsterdam, les réductions de titre admises par les Administrations des monnaies.

	FRANCE	ANGLETERRE	ALLEMAGNE	HOLLANDE
TITRES LÉGAUX	900/1000	11/12 = 916,66/000	900/1000	900/1000
Titres réduits en millièmes admis par :				
Paris.	»	916	899,5	899,5
Londres.	899,5	»	899,2	899,5
Berlin.	899,5	916,5	»	899,5
Amsterdam.	899	916	899	»

46. **Frais de monnayage.** — A Paris, ces frais sont de 6 fr. 70 par kilogramme d'or monnayé à $^{900}/_{1000}$ valant 3.100 francs ; soit $\frac{6,7}{3,1} = 2,16...\,^{0}/_{00}$; les frais sont, par suite, de 7 fr. 44 ... par kilogramme d'or pur valant 3.444 fr. 44 ... dont la valeur est ainsi réduite à 3.437 francs.

A Londres, il n'y a pas de frais de fabrication, mais, comme il est peu commode, à cause de la perte d'intérêts due au retard de payement, de passer par l'intermédiaire de la Monnaie, on s'adresse à la Banque d'Angleterre, qui achète les pièces au titre standard $^{11}/_{12}$ au prix de 77 sh. 9 d. l'once standard (troy) pesant 31 gr., 1035, tandis que le prix au pair (valeur intrinsèque) est 77 sh. 10 d. $^{1}/_{2}$. La réduction de 1 d. 5 peut donc être considérée comme frais de monnayage, lesquels s'élèvent alors à :

$$1.000 \times \frac{1,5}{77 \text{ sh. } 10 \text{ d. } 5} = 1.000 \times \frac{1,5 \text{ d.}}{934,5 \text{ d.}} = 1,61\ ^{0}/_{00}.$$

Berlin fait payer 6 Rm par kilogramme d'or fin, qui vaut 2.790 Rm ; les frais sont donc de :

$$1.000 \times \frac{6}{2.790} = 2,15\ {}^0/_{00}.$$

Amsterdam retient 5 fl. par kilogramme d'or monnayé au titre de 0,9, soit 5,55 par kilogramme d'or pur valant 1.563 fl. 44. Les frais s'élèvent donc à :

$$1.000 \times \frac{5,55}{1.563,44} = 3,33\ {}^0/_{00}.$$

Exemple. — *Quelle est, au tarif de l'administration des monnaies et médailles de France, la valeur de la £ ?*

Cette administration réduit le titre de la £ à 0,916 au lieu de 0,91666, soit une diminution de 0,66... $^0/_{00}$, qui, s'ajoutant aux frais de monnayage 2,16... $^0/_{00}$, donne une réduction totale de :

$$2,16 + 0,66 \ldots = 2,82\ {}^0/_{00}.$$

Le pair de la £ est 25 fr. 221 ; la valeur au tarif sera cette valeur diminuée de 2,82 $^0/_{00}$, soit :

$$25 \text{ fr. } 221 - 25 \text{ fr. } 221 \times 0,00282 = 25 \text{ fr. } 15.$$

47. **Valeur commerciale.** — Le prix au tarif ne représente que très rarement la valeur cotée sur le marché et inscrite à la cote officielle, parce qu'il ne tient pas compte des frais de transport et d'assurance et de la loi générale de l'offre et de la demande.

Les frais de transport et d'assurance varient entre 1,5 $^0/_{00}$ et 3 $^0/_{00}$ suivant la distance ; on peut, en général, les prendre égaux à 2 $^0/_{00}$ sans commettre une erreur importante.

Quant à la loi de l'offre et de la demande, elle se manifeste par une hausse ou une baisse du prix du kilogramme de matière précieuse, sans qu'on puisse, le plus souvent, préciser les causes de la variation ; on verra plus loin que la variation du prix est fonction de la valeur du papier court ; mais réciproquement, la valeur de ce dernier dépend du prix de l'or : il y a donc une oscillation perpétuelle des cours dont, seuls, les changeurs et les cambistes peuvent apprécier les raisons avec plus ou moins d'exactitude.

Ce qui précède explique que des banquiers, très au courant des variations de cours des monnaies et lingots, puissent, par des achats sur une place et une vente sur une autre, réaliser des bénéfices provenant de la différence existant entre les valeurs de l'or sur ces places.

48. **Parité**. — Quand les cours sont tels que le prix de l'or est exactement le même sur deux places, on dit qu'elles sont *à la parité*.

Dans ce cas, on a l'égalité :

1 kilogramme d'or pur vaut dans telles conditions α unités monétaires de A, et β unités monétaires de B.

Une unité monétaire de A vaut donc $\frac{\beta}{\alpha}$ unités de B, et une unité monétaire de B vaut $\frac{\alpha}{\beta}$ unités de A.

Le produit

$$\frac{\beta}{\alpha} \times \frac{\alpha}{\beta} = 1.$$

A et B sont en *parité directe*.

On peut également considérer 3, 4 places afin d'obtenir une parité entre elles : on dit alors que la *parité est indirecte*.

On voit que la parité joue, pour des monnaies ou des lingots quelconques dont le prix dépend de nombreuses variables, exactement le rôle du *pair* pour les valeurs *intrinsèques* des monnaies.

49. **Cotes officielles.** — A Paris, la cote officielle est disposée comme il suit :

Matières d'Or, d'Argent, etc.

Or en barre, à 1 000/1 000. Le kilogr. 3,437 fr.	Pair à	1 0/00 prime
Argent en barre, à 1 000/1 000. Le kilogr.	104 50 à	106 50
Quadruples Espagnols	79 50 à	81 50
— Colombiens et Mexicains .	80 50 à	. . . .
Piastres Mexicaines	2 58 à	. . . .
Souverains Anglais	25 25 à	. . . .
Banknotes.	25 235 à	25 26
Aigles des Etats-Unis	51 50 à	51 60
Guillaume (20 marks)	24 55 à	24 60
Impériales (Russie), titre 910 millièmes.	20 55 à	20 60
— nouveau titre 900 millièmes	40 . . à	. . . .
— — 1/2 Impér., titre 908 millièmes.	20 . . à	. . . .
Couronnes de Suède.	27 50 à	. . . .

(A titre de renseignement, cette cote est celle du jeudi 25 septembre 1913).

Elle donne le prix du kilogramme d'or fin tel que l'achète la Banque de France, c'est-à-dire 3.437 francs, à augmenter ou diminuer d'une prime exprimée en $^0/_{00}$ du prix de base 3.437.

Si la cote indique 1$^0/_{00}$ prime, la valeur de l'or sera :

$$3.437 + 3{,}437 = 3.440 \text{ fr., } 437 \text{ au kilogramme d'or fin.}$$

Si la cote indique 1 $^0/_{00}$ perte, la valeur de l'or sera :

$$3.437 - 3,437 = 3.433 \text{ fr. } 563.$$

Il semble impossible que l'or soit coté à prime ou à perte, puisqu'il est la base même de la valeur de la monnaie ; il ne faut pas perdre de vue cependant qu'il s'agit d'or en barres, qui peut être demandé par certaines industries : il n'en reste pas moins ce singulier résultat que, pour acquérir un lingot, il faut donner plus ou moins de pièces d'or qu'on ne pourrait en tirer du kilogramme d'or, en tenant compte du monnayage.

Dans le cas de paiement par un billet de la Banque de France, la prime ne peut également s'expliquer que par la rareté de l'or en barre, car il serait incompréhensible que le billet de banque ne puisse acheter ce qu'il est censé devoir représenter.

Voici la cote officielle de Berlin :

Gold, Silber und Banknoten.

Munz Duc. p. St.	— —	Engl. . . . Bankn.	20.455 b.
Rand- » » »	— —	Franz. . . do.	81.30 b.
Sovereigns.	20.43 b.	Holländ . . do.	169.45 b.
20 francs-St. . .	16.25 b.	Italien. . . do.	81.20 B.
8 Gulden-St. . . .	— —	Norweg. . do.	— —
Dollars	— —	Oesterr. . . do.	84.95 b.
Imperials	— —	do. 1000 K.	84.90 b. G.
alte p. 500 Gr. . .	— —	Russ. . . Bankn.	214.40 b.
100 Ro. Gold. . .	215.30 b	do. . . . 500 r.	214.35 b.
Amer.Not.1000b.5D.	4.205 b.	do. . . . . kl.	214.05 b.
» 2 u 1 Doll.	4.22 b.	do. Zollcoup.	321.80 b.
» Coup.zb.N.Y.	— —	do. do. kl.	321.80 b.
Belg. Noten. . . .	81.25 b.	Schwed. . . Not.	112.10 et b. G.
Dän. Noten. . . .	112.15 b.	Schweiz. . . do.	81.20 b.

On a : G = geld = offert,
B = brief = demande,
b = bezahlt = traité à.

Elle exprime en marks la valeur de l'unité choisie de monnaie étrangère,

La cote officielle d'Amsterdam était, au 7 mai 1907, la suivante :

Livre sterling	f.	12.—	Florin d'Allemagne du Sud	f	1.—
Franc, lire ou lei	»	0.50	Reichsmark d'Allemagne	»	0.60
Rouble or	»	2.—	Couronne de Danemark	»	$0.66^2/_3$
Rouble	»	1.28	Milreis de Portugal	»	2.70
Rouble papier	»	0.36	Piaster	»	2.50
Florin d'Autriche	»	1.—	Peseta	»	0.50
Florin d'Autriche or	»	1.20	Dollar d'Amérique	»	2.50
Couronne de Hongrie	»	0.50	Dollar du Mexique	»	2.50

Elle exprime la valeur de 1 unité de monnaie étrangère en florins des Pays-Bas :

Exemple. — *Paris débiteur de Londres de* 100 £ *à vue désire se libérer par un envoi d'or. Quel est le procédé le moins onéreux sachant que les frais de transport et d'assurance sont de* 1,5 $^0/_{00}$ *de Paris à Londres ; que Paris cote la pièce de* 1 *livre sterling* 25 fr. 25 ; *qu'un lingot acheté à Paris est coté avec* 2 $^0/_{00}$ *de prime et que la Banque d'Angleterre achète les pièces de* 20 fr. *au cours de* 76 sh. 4 d. *l'once brute* (31 gr. 1035). *On supposera que le poids de la pièce de* 20 fr. *est réduit par le frai à* 6,451.

Enfin, à Paris, les impériales de Russie pesant 6 gr. 54 *peuvent être achetées à* 20 fr. 61 (*ces pièces sont au titre de* 11/12 *standard et achetées par la Banque à* 77 sh. 9 d. *l'once brute*).

1er Procédé. — Achat de livres sterling.

La dépense sera :

Achat proprement dit,	100 × 25,25 =	2.525 fr.
Frais de transport,	2,525 × 1,5 =	3, 79
	Ensemble =	2.528 fr. 79

2e PROCÉDÉ. — Envoi de pièces de 20 fr.

La conjointe ci-après donnera le prix réel :

Prix réel de la dette x francs à Paris	=	100 £,
1 £	=	20 shillings,
1 shilling	=	12 deniers.
76 sh. 4 deniers ou 916 deniers	=	1 once,
1 once équivaut à	=	31 gr. 1035 ;
6 gr. 451 est le poids de	=	20 fr. à Londres ;

1 fr. rendu à Londres coûte, y compris le transport, 1 fr. 0015 à Paris.

$$x = \frac{100 \times 20 \times 12 \times 1 \times 31,1035 \times 20 \times 1,0015}{1 \times 1 \times 916 \times 1 \times 6,451 \times 1} = 2.530 \text{ fr.} 34.$$

3e PROCÉDÉ. — Envoi d'impériales de Russie.

On aura (en réduisant un peu la conjointe indiquée plus haut) :

Prix réel de la dette x fr. à Paris	=	100 £.
1 £ équivaut à	=	240 d.
77 sh. 9 d. ou 933 d. représentent 1 once ou	=	31 gr., 1035
6 gr. 54 est le poids de l'impériale sans transport	=	20 fr. 61, à Paris
1 fr. sans frais de transport coûte	=	1 fr. 0015 avec frais de transport.

$$x = \frac{100 \times 240 \times 31,1035 \times 20,61 \times 1,0015}{1 \times 933 \times 6,54 \times 1} = 2.525 \text{ fr.} 16.$$

4e PROCÉDÉ. — Envoi de lingots au titre standard achetés a 3.437 et 2 $^0/_{00}$ prime.

Prix réel de la dette x fr. à Paris	=	100 £
1 £ équivaut	=	240 d.
933 d. est le prix de 1 once ou titre standard.	=	31 gr. 1035 au

12 gr. d'or monnayé à 11/12 contiennent = 11 gr. d'or fin.
1 000 gr. d'or fin coûtent = 3.437 fr. sans prime :
1 fr. sans prime vaut = 1 fr. 002 avec prime :
1 fr. sans frais de transport vaut = 1 fr. 0015 avec frais de transport.

$$x = \frac{100 \times 240 \times 31,1035 \times 11 \times 3.437 \times 1,002 \times 1,0015}{1 \times 933 \times 12 \times 1.000 \times 1 \times 1} = 2.529 \text{fr.} 58.$$

On pourrait imaginer d'autres combinaisons telles qu'un achat de Rm à Berlin que l'on ferait envoyer à Londres.

Ces problèmes ne présentent aucune difficulté pratique, mais comme ils doivent être résolus sur-le-champ, une très grande habitude est nécessaire pour indiquer de suite le procédé le plus avantageux.

Il existe d'ailleurs des tables de parité de change des principales monnaies et des cours d'achat se rencontrant dans la pratique.

On verra ces tables à propos des changes de papier.

CHAPITRE III

CHANGE DU PAPIER

50. **Compensation des dettes par les banquiers.** — Les échanges entre les pays créent nécessairement des dettes et des créances réciproques, et il est naturel que le débiteur d'un pays A recherche si sa dette pourrait être compensée par une dette de ce pays A envers celui du débiteur : le règlement se ferait par compensation dans chacun des pays A et B, ce qui éviterait un envoi de numéraire ; un simple écrit suffirait en effet à faire la preuve de cette affaire.

Ces échanges directs sont rares, et les particuliers s'adressent toujours à des banquiers qui centralisent les opérations et par suite facilitent les règlements.

De plus, toutes les dettes n'étant pas nécessairement exigibles à vue, il peut se faire qu'après avoir consenti un délai, le créancier désire, à un moment quelconque avant l'échéance, recevoir le montant de sa créance. Ne pouvant la toucher, il l'escomptera dans une banque, laquelle, ayant ainsi une créance sur l'étranger, pourra effectuer la compensation avec une dette à l'étranger.

Ces opérations pourront être facilitées par l'émission faite par le banquier de traites sur ses correspondants étrangers de montant égal aux dettes qu'il a à payer pour le compte de ses clients, ces traites se compensant, bien entendu, avec les créances qu'il a reçues sur l'étranger.

C'est donc un jeu perpétuel d'échanges de papier entre les banquiers des différents pays, compliqué par des mouvements réels d'espèces ou de lingots envoyés soit en payement de marchandises importées, soit, surtout, comme résultat de spéculations.

On voit que, si l'on considère l'ensemble des dettes et créances réciproques de deux pays, on tirera un solde qui sera rarement nul ; mais, débiteur pour l'un des pays et créditeur pour le second, ce solde doit théoriquement être envoyé en espèces, et le pays qui l'envoie est appelé débiteur de celui qui le reçoit.

Il ne faut d'ailleurs jamais perdre de vue qu'un pays est toujours à la fois débiteur et créancier d'un autre ; mais, dans la pratique et le langage courant, on n'opère que sur des soldes, et l'on dit que le pays A est débiteur du pays B si le montant des dettes de A à B est supérieur au total des créances de A sur B.

51. **Etablissement théorique du cours du change.** — Le cours du change, c'est-à-dire *la somme équivalente à une unité monétaire étrangère exprimée en monnaie indigène*, peut donc *théoriquement* s'établir par la considération des masses de dettes et créances réciproques des deux pays.

Ce calcul n'a d'ailleurs qu'un intérêt théorique, car il repose sur la connaissance de ces masses qui ne sont jamais intégralement et exactement déterminées. Il convient de faire remarquer que ces masses n'ont qu'un rapport assez vague avec ce que les économistes appellent « balance du commerce ».

En général, les dettes envers les étrangers sont exprimées en monnaies étrangères et les créances sur l'étranger en monnaie indigène : pour ne pas être embarrassé par cette différence, on ne considérera que les masses d'or équivalentes aux dettes et aux créances ; soient ainsi C et D les totaux des créances et des dettes exprimées en kilogrammes d'or d'un pays A relativement à un second B ; soit aussi f les frais de transport, monnayage, etc., d'un kilogramme d'or.

Si C est plus grand que D, le solde C — D à recevoir dans le pays A coûtera (C — D)f de frais de transport.

La masse C — (C — D)f représentera la valeur des créances diminuée des frais d'envoi de la masse d'or qui solderait la dette, de telle sorte que la dépréciation subie par la monnaie du pays B sera :

$$\pi = \frac{C - (C - D)f}{C}.$$

En multipliant le pair intrinsèque de la monnaie B par cette quantité, on aura la valeur réelle de cette monnaie, c'est-à-dire le cours du change.

Si $C > D$, le rapport est < 1, le cours du change est inférieur au pair intrinsèque : il est dit favorable au pays A — (on suppose bien entendu que les pays donnent l'incertain).

Comme cas particulier on voit que si $D = 0$:

$$\pi = 1 - f.$$

Le cours du change est égal à l'unité de monnaie diminuée des frais de transport ; cette valeur est appelée *le gold point d'entrée* de l'or dans le pays A.

Si $C = D$, $\pi = 1$; le change est au pair.

Si $C < D$, $\pi > 1$; le cours du change est supérieur au pair : il est dit défavorable au pays A.

Dans le cas particulier de $D = 2C$ on a :

$$\pi = \frac{C - (C - 2C)f}{C} = 1 + f.$$

C'est *le gold point de sortie* de l'or de A.

52. **Rapport des dettes et des créances d'un pays.** — Si les considérations précédentes étaient rigoureusement exactes, elles permettraient de déterminer, par réciprocité, le rapport des dettes aux créances d'un pays en connaissant le cours du change.

On a en effet :

$$\pi = 1 - \left(1 - \frac{D}{C}\right)f ;$$

π exprimant le rapport du cours réel au pair intrinsèque, d'où :

$$\frac{D}{C} = 1 - \frac{1 - \pi}{f}.$$

Si f est égal à 0,005 ou 5 $^0/_{00}$, on aura :

$$\frac{D}{C} = 1 - \frac{1 - \pi}{0{,}005} = 1 - 200\,(1 - \pi).$$

Le tableau suivant donne le rapport $\frac{D}{C}$ pour diverses valeurs de $1 - \pi$.

$1 - \pi$	$-0{,}005$	$-0{,}003$	$-0{,}001$	0	$+0{,}001$	$+0{,}003$	$+0{,}005$
$\frac{D}{C}$	2	1,60	1,20	1	0,80	0,40	0

Exemple. — *En supposant que la France doive 3.000.000 £ à l'Angleterre et que cette dernière soit débitrice de 80.000.000 francs, établir le cours théorique du change de la livre sterling en France.*

Les masses d'or pur représentant les valeurs précédentes seront :

$$\frac{3.000.000}{136{,}568} = 21.967 \text{ kilogrammes d'or};$$

et :

$$\frac{80.000.000}{3.444{,}44} = 23.226 \text{ kilogrammes d'or}.$$

On sait en effet que 1 kilogramme d'or équivaut à :

$$3.444 \text{ fr. } 44 = £\ 136{,}568.$$

Le prix de transport de la différence, soit : 1.259 kilogrammes d'or, coûtera :

$$1.259 \times 0,005 = 6 \text{ kg. } 295,$$

et la dépréciation sera :

$$\frac{23.226 - 6,295}{23.226} = 0,9997.$$

Le pair intrinsèque de la £ étant 25,221, le cours théorique du change sera donc favorable à la France et aura pour valeur :

$$25,221 \times 0,9997 = 25,21.$$

53. **Causes de variation des changes.** — La variation du cours du change ne dépend pas uniquement de cette sorte de balance entre les dettes et les créances, mais il faut retenir de ce qui précède que, le plus généralement pour les pays non producteurs d'or, l'importation de l'or est un fait favorable relativement à la situation générale économique d'un pays, et que l'exportation de l'or est, au contraire, un fait défavorable.

Les autres causes de variation du cours des changes sont le papier monnaie, l'offre et la demande, les causes politiques, la spéculation, la nature du papier.

54. **Influence du papier monnaie.** — Quand un pays endetté ne peut réagir contre l'émigration de son or à l'étranger pour le payement de ses dettes, il émet du papier monnaie qui, n'ayant pas une représentation effective, se déprécie de plus en plus ; pour obtenir 100 unités monétaires d'or, il faut alors donner 101, 102, 120, 150, 200 unités monétaires de papier monnaie.

On dit alors que le change ou que la prime sur l'or est de 1, 2, 20, 50, 100 %.

55. **Offre et demande.** — Le cours du change est naturellement soumis à la loi générale de l'offre et de la demande.

Les créanciers de la France à Londres possédant du papier payable en France l'offriront aux débiteurs de la France ; si les premiers sont plus nombreux que les seconds, l'achat se fera en donnant peu de livres sterling pour une libération en francs, et il arrivera même un moment où les créanciers auront avantage à faire venir à leurs frais l'or français qui les désintéressera ; le cours du change arrivera à un moment critique appelé *gold point d'entrée* pour l'Angleterre.

Si, au contraire, les créanciers de la France sont très peu nombreux, ils offriront peu de francs contre un nombre plus élevé de livres sterling, et les débiteurs de la France arriveront à trouver un avantage à envoyer leur or solder leurs dettes : le cours du change atteindra le *gold point de sortie* d'Angleterre.

Dans le premier cas on dit, comme on l'a indiqué précédemment, que le change est *favorable* à l'Angleterre, et dans le second, qu'il lui est *défavorable*.

D'une manière générale, le change est favorable à un pays envers un autre quand le cours du change devient tel que l'importation de l'or dans ce pays devient imminente ; il est défavorable lorsque l'or tend à sortir.

56. **Causes politiques.** — Les événements politiques ont une répercussion sur le cours du change. Dans un pays troublé, la monnaie se cache et sa raréfaction rend nécessaire une circulation plus active du papier dont la valeur représentative en monnaie devient par suite plus faible ; mais l'abondance de papier influe sur le taux d'es-

compte des banques qui veulent défendre leur encaisse métallique; l'élévation du taux d'escompte entraîne nécessairement un afflux de monnaie étrangère et, s'il n'y a pas de troubles continus, l'équilibre se rétablit peu à peu grâce à la spéculation.

57. **Spéculation.** — La spéculation joue un rôle très important dans le cas de différence du taux de l'escompte dans des pays voisins.

Si, par exemple, le taux d'escompte de la Banque de France est 3 °/₀ et celui de la Banque d'Angleterre 5 °/₀, les spéculateurs français vont réunir toutes leurs disponibilités ou s'en créer, en mettant en circulation du papier sur eux-mêmes, qu'ils escompteront ensuite à 3 °/₀ à la Banque ou dans les établissements financiers.

Ces disponibilités leur permettant d'acheter du papier anglais qu'ils escompteront à 5 °/₀, ils auront un bénéfice réel de 2 °/₀, sauf commissions et timbre sur effets.

Mais cet afflux de demandes de numéraire sur la place de Paris a pour effet de draîner l'or français, le change sur Londres est naturellement influencé, et la livre sterling augmente de prix en francs. Les banques françaises, obligées de défendre leur encaisse métallique, augmentent alors le taux de leur escompte et la spéculation n'ayant plus de gain possible arrête peu à peu ses opérations.

58. **Variation du cours du change suivant le papier.** — On a l'habitude de distinguer deux natures de papier : Le papier *court*, dont l'échéance est prochaine et au plus tard dans un mois.

Le papier *long*, dont l'échéance est plus éloignée qu'un mois et qui dépasse rarement trois mois (L'Allemagne a créé depuis son expansion industrielle des papiers à échéance plus éloignée).

Les cotes des changes indiquent toujours deux cours relatifs à chacun de ces papiers.

La différence entre les valeurs de ces papiers est due principalement au taux d'escompte du pays étranger : comme on l'a vu plus haut, si ce taux est élevé, les banquiers achèteront du papier étranger, et, de préférence, du papier *long*, pour profiter le plus possible de la différence des taux ; le papier long sera donc, en général, recherché et sera coté plus haut que le papier court.

Mais cependant, malgré l'élévation du taux permettant une spéculation, on peut remarquer que pour deux pays, Pétersbourg et Lisbonne, la cote du papier court de France sur ces pays est souvent plus élevée que celle du papier long. Cela prouve que les relations commerciales sont peu importantes ou qu'il y a une certaine défiance due vraisemblablement à la situation politique intérieure.

59. **Variation du cours du change dans les pays à monnaie dépréciée.** — Quand un pays ne possède plus assez d'espèces métalliques et qu'il est obligé d'émettre du papier monnaie, la valeur de ce dernier se déprécie, et son pouvoir d'acquisition de monnaie d'or diminue.

Ainsi, pour obtenir 100 milreis or à Buenos-Ayres, il faut donner 230 milreis papier, soit une prime de 130 %.

Dans ces pays, il se produit une lutte entre les importateurs, qui cherchent à améliorer le cours du change (à le faire baisser), et les exportateurs, qui trouvent avantage à la dépréciation.

En effet, les exportateurs achètent dans leur pays les matières premières avec la monnaie dépréciée et vendent les produits fabriqués à l'étranger. Ils touchent de l'or qui fait prime dans leur pays, et bénéficient ainsi de la dépréciation du change en transformant cet or en papier, dont la valeur est plus faible. Le change déprécié est ainsi une prime à l'exportation.

Ce serait donc, en somme, une bonne situation permettant le développement économique du pays et une amélioration de la situation monétaire, si elle pouvait durer assez longtemps, mais elle a pour résultat un développement presque toujours exagéré de la concurrence, une hausse considérable des salaires et des matières premières, l'amélioration est alors enrayée et le bénéfice se réduit peu à peu, jusqu'au moment où il devient insuffisant pour que l'exportation soit encore possible.

Relativement aux importateurs, on voit qu'ils ont avantage à faire baisser le change, afin de débourser moins de leur monnaie dépréciée pour acheter à l'étranger les objets qu'ils désirent.

60. **Calcul de la prime de l'or.** — Dans les pays à change déprécié, il y a une prime sur l'or qu'il est facile de calculer ainsi que le montre l'exemple ci-après :

Exemple. — *Quelle est la prime de l'or au Brésil si le change est de* 13 *d.* 5, *sachant qu'au pair* 1 *milreis* = 1 *sh.* 7 *d.* (19 *deniers*).

On aura :

x milreis papier = 100 milreis d'or,
1 milreis d'or = 19 deniers,
13,5 deniers = 1 milreis papier ;

$$x = \frac{100 \times 19 \times 1}{1 \times 13{,}5} = 140{,}74 \text{ milreis papier,}$$

soit une prime de = 40,74 %.

61. **Gold points.** — Le prix d'achat en papier d'une unité monétaire de monnaie étrangère est naturellement limité par le prix d'achat, majoré des frais accessoires de transport, monnayage, etc., de lingots de matière précieuse.

Quand ces deux prix sont égaux, on dit que l'on arrive au *gold point.*

Si, à partir de ce moment, le prix du change augmente encore, le débiteur achète des lingots, ou s'il peut, de la monnaie étrangère sur sa propre place, et se libère simplement par l'envoi de ces matières précieuses.

L'or tend à sortir du pays débiteur ; c'est le *gold point de sortie.* A cette valeur du change correspond nécessairement dans le pays étranger créancier un *gold point d'entrée de l'or.*

Chaque pays a donc deux *gold points* correspondant l'un à l'entrée, le second à la sortie de l'or.

On voit de suite que la valeur du papier *court* est directement influencée par la valeur des *gold points.*

Si, en effet, à Paris, les créanciers de Londres ne veulent pas céder leur papier et élèvent leurs prétentions de telle sorte que le *gold point* soit atteint, les débiteurs enverront des monnaies ou des lingots : la demande de créances diminuant, l'offre restant constante, le cours du change baissera nécessairement à des limites raisonnables.

Il ne faut d'ailleurs jamais perdre de vue que le papier est justement créé pour éviter des envois d'or, aussi le cours élevé du change ne peut-il exister longtemps, si les relations du débiteur avec le créancier sont normales ; mais ces considérations ne s'appliquent qu'à de la bonne monnaie et à du papier payable en or.

Il faut encore remarquer que le *gold point de sortie* de l'or d'un pays n'est pas unique.

Si, par exemple, Paris étant débiteur de Londres, le change s'élève, le débiteur pourra avoir avantage à acheter à Paris des livres anglaises et à les envoyer en payement.

Si le change s'élève encore et que l'achat de £ ait été rendu impossible, on enverra en payement des pièces d'or françaises.

Mais il pourrait être plus avantageux d'envoyer des lingots ; dans ce dernier cas, le *gold point de sortie* pourra s'élever, car l'or fera prime ; s'il n'y a pas de crise réelle, cette prime de l'or durera peu par suite des spéculations des banques étrangères qui, trouvant un débouché pour leurs lingots, feront bientôt des offres trop fortes pour la demande.

Exemple. — *Calculer les* gold points d'entrée *et* de sortie *à Paris des souverains anglais.*

Gold point d'entrée. — L'Administration des Monnaies de Paris achète la £ à 25 fr. 15, soit : 25,221 pair intrinsèque, moins 0,66 $^0/_{00}$ provenant de la diminution opérée sur le titre (0,916 au lieu de $11/12 = 0{,}91666...$) et 2,16 $^0/_{00}$ provenant des frais de fabrication, au total 2,82 $^0/_{00}$.

Les frais de transport et d'assurance étant de 1,5 $^0/_{00}$ s'élèveront à :

$$25{,}221 \times 0{,}0015 = 0{,}038.$$

La valeur libératoire de la £ déboursée à Londres ne sera donc que de :

$$25{,}15 - 0{,}0038 = 25{,}112.$$

On devrait aussi tenir compte des intérêts à courir pendant la période s'écoulant entre le dépôt à la Monnaie et le payement, mais on peut les éviter en vendant à la Banque de France qui accepte les £ au prix de 3.437 fr. et au titre de 0,916.

Le *gold point d'entrée* à Paris des £ est ainsi 25,112. Par suite, si le change de Londres sur Paris (Londres donne le *certain*) est au-dessous de 25,112, Londres aura avantage à envoyer des £ qui le libéreront en francs pour 25 fr. 112 par £.

Gold point de sortie. — A Paris, le cours de la £ (monnaie d'or) est fixé par les banquiers et les changeurs. Cette pièce vaut au pair 25 fr. 221, mais il est très rare que son prix de vente atteigne cette valeur.

Dans la cote Jordaan du 30 septembre 1913, reproduite page 88, le prix de la £ est 25,26 à Paris ; en ajoutant 1,5 $^0/_{00}$ de frais de transport on aura :

$$25,26 + 0,038 = 25,298,$$

qui indiquera le *gold point de sortie* de la France des livres sterling.

On peut remarquer que le *gold point* normal d'entrée à Londres de la £ est égal au pair 25,221 augmenté des frais de transport, soit, à raison de 1,5 $^0/_{00}$:

$$25,221 + 0,038 = 25,259.$$

Voici un extrait de la cote Jordaan, Cohen et Wenninck, du 30 septembre 1913 (p. 88).

62. **Cote du papier.** — Les diverses places indiquent chaque jour le cours des changes sur chacune des autres places avec lesquelles des échanges de papier se produisent. Le tableau résumé s'appelle *cote*.

Ces cotes présentent des dispositions matérielles spéciales et tiennent compte d'usages anciens qu'il faut connaître pour en faire la lecture.

MONNAIES	ACHAT FRANCO	VENTE FRANCO
Or		
Allemagne, 20 marks	24,67	24,71
Angleterre, souverains (7 gr. 97) . . .	25,24	25,26
— — demis	12,605	12,62
Argentine, 5 piastres	24,80	24,90
Autriche, 20 couronnes	20,80	20,95
— ducat.	11,60	12,—
Bulgarie	19,80	20,—
Brésil, 20 milreis	56,—	57,—
Chili, condor	46,75	47,25
— 5 pesos, nouveau	9,37	9,50
Colombie, 20 pesos, Médellin et Bogota .	99,05	—,—
— — Popayan	98,20	—,—
— — onces, Bogota. . .	80,—	—,—
Costa-Rica, 20 cols.	47,50	48,—
Egypte, livre	25,48	25,80
Equateur, 10 sucres	24,70	25,—
Espagne, alphonsines	24,80	25,—
— isabellines	25,50	25,70
— quadruples (27 gr.)	80,40	80,70
Etats-Unis	517,—	518,75
— 1 dollar, petit module . . .	10,—	15,—
Finlande, 20 markaa	19,80	20,—
France, 5 francs, intactes	6,50	7,15
Guatemala, 20 pesos	99,30	—,—
Hollande	20,77	20,84
Japon, 20 yens	102,50	—,—
Mexique, 10 pesos	25,50	25,80
— quadruples (27 gr)	80,30	80,70
Monténégro, 10 perpers	10,40	—,—
Pérou, 1 livre	24,70	24,90
Portugal, 10 milreis	55,40	55,65
Roumanie, 20 lei	19,80	20,—
Russie, 5 et 10 roubles	265,—	266,50
— impériales anciennes	20,40	20,60
Sardaigne, 100 lires	99,—	100,—
Scandinavie	137,25	138,75
Serbie.	19,80	20,—
Transvaal.	25,—	25,20
Tunisie	19,80	20,—
Turquie, livre (7 gr. 215)	22,50	23,—
Vénézuéla	19,80	20,—

63. **Cote de Paris.** — Voici, à titre d'exemple, la cote de Paris du 25 septembre 1913.

CHANGES	CHÈQUE-VERSEMENT PAPIER COURT	PAPIER A TROIS MOIS	ESCOMPTE A L'ÉTRANGER
Londres . .	25 235 à 25 26 1/2	25 25 à 25 28	4 1/2 o/o
Allemagne .	123 1/2 à 123 3/4	123 1/2 à 123 3/4	6 o/o
Belgique . .	99 1/4 à 99 3/8	99 1/4 à 99 3/8	5 o/o
Espagne . .	467 1/4 à 472 1/4	466 1/4 à 471 1/4	4 1/2 o/o
Hollande . .	208 3/16 à 208 11/16	208 5/16 à 208 13/16	5 o/o
Italie . . .	99 1/16 à 99 5/16	99 1/16 à 99 5/16	6 o/o
New-York .	517 1/2 à 520 1/2	516 1/2 à 519 1/2	5 o/o
Portugal . .	475 à 485	473 à 483	5 1/2 o/o
St-Pétersbrg	266 à 268	265 à 267	6 o/o
Scandinavie	138 1/2 à 139 1/2	138 1/2 à 139 1/2	5 1/2 o/o
Suisse . . .	99 3/4 à 99 7/8	99 13/16 à 99 15/16	4 1/2 o/o
Vienne . . .	104 1/2 à 104 3/4	104 1/2 à 104 3/4	6 o/o

Avant le 1er mai 1907, les places étaient cotées soit à trois mois, soit à vue, c'est-à-dire que les prix indiqués pour le cours du papier court ou du papier long étaient ceux d'effets payables dans trois mois pour les premières places et ceux d'effets payables à vue pour les secondes.

Depuis le 1er mai 1907, les cours sont ceux du papier à vue, et, suivant que l'échéance de l'effet sera prochaine (un mois au plus), ou lointaine (un mois et plus), on prendra le cours du « chèque-versement papier court » ou du « papier à trois mois ».

Dans l'ancienne cote on distinguait « papier court » et « papier long » sans indiquer cette échéance de trois mois, qui n'a aucun intérêt, puisque tout papier ayant plus de trente jours de date est évalué d'après le cours dit « papier à trois mois ».

Paris donnant l'*incertain*, il est nécessaire de connaître le nombre d'unités monétaires cotées en francs.

Le tableau suivant indique ces quantités, ainsi que la valeur au pair et la valeur au tarif de la même quantité *d'or*.

CHANGES	QUANTITÉ COTÉE	VALEUR EN FRANCS DE LA QUANTITÉ COTÉE EN MONNAIE D'OR		
		au pair	au tarif	au change (cote Jordaan)
Londres	1 livre sterling.	25,221	25,15	25,16
Allemagne. . . .	100 marks.	123,50	123,10	122,95
Belgique.	100 francs.	100 »	99,75	»
Espagne	500 pesetas.	500 »	498,90	»
Hollande.	100 florins P. B.	208,30	207,60	208,50
Italie.	100 lires.	100 »	99,78	»
New-York	100 dollars.	518,25	516,55	520 »
Portugal.	100 milreis.	560 »	559 »	546 »
Saint-Pétersbourg.	100 roubles.	266,60	266 »	266 »
Suisse	100 francs.	100 »	99,75	»
Vienne.	100 florins.	105 »	104,80	105

Le taux d'escompte indiqué dans la dernière colonne de la cote est celui en vigueur dans les places ; avant le 1er mai 1907, on ne tenait pas compte du taux réel pour les places cotées à trois mois et l'escompte était uniformément calculé à 4 %.

Chacune des deux colonnes papier court, papier à trois mois, contient deux cours. Le premier représente le plus bas cours de change ou plutôt celui qui est appliqué aux effets de maisons de premier ordre les plus appréciées sur la place. Le second est le plus haut cours appliqué aux autres maisons de banque ou de commerce.

Exemple. — *A quel prix peut-on se procurer un effet de 150 marks sur Berlin et à 13 jours de vue, et un second effet de même valeur à 33 jours ?*

L'effet à 13 jours sera coté comme papier court (2me colonne de la cote) ; l'effet à 33 jours sera coté comme papier long (3me colonne de la cote).

1° Effet à 13 jours. — Si la maison qui achète est de premier ordre, le cours sera voisin de 123 fr. 50, soit par exemple 123 fr. 55.

Cette somme représente le prix de 100 marks exigibles à vue ; le prix de 100 marks dans 13 jours est inférieur au prix à vue, et la différence est égale à 13 jours d'intérêts au taux de 6 % de Berlin, soit :

$$\frac{123,55 \times 13 \times 0,06}{360} = 0,268.$$

Le cours de 100 marks payables dans 13 jours est donc :

$$123,55 - 0,268 = 123,282.$$

L'opération qui consiste à ramener le cours des cotes à la valeur effective tenant compte de la date d'échéance s'appelle le *nivellement des cours*.

Le prix de l'effet de 150 marks sera :

$$1,50 \times 123,282 = 184 \text{ fr. } 92.$$

2° Effet à 33 jours. — On prendra le cours de 123,65 par exemple, intermédiaire entre le plus bas et le plus haut.

Le problème peut être résolu par une conjointe comme il suit :

x f. valent 150 marks à 33 jours ;

100 marks à 33 jours valent :

$$100 - \frac{6 \times 33}{360} \text{ marks à vue} = 99,45 ;$$

100 marks à vue coûtent 123 fr. 65 ;

$$x = \frac{150 \times 99,45 \times 123,65}{100 \times 100} = 184 \text{ fr. } 45.$$

64. **Cotes étrangères.** — La cote de Berlin rappelle le nombre d'unités étrangères cotées et indique leur équivalent en marks ; elle donne les valeurs à 8, 10 ou 14 jours pour les papiers courts et à 2 ou 3 mois pour les papiers longs ;

T = jours ;	Mt = mois ;	vista = vue ;
B = demande ;	G = offert ;	b = traité à.

Certains journaux financiers publient les cotes ou plutôt des résumés des cotes des diverses places : tel le *Moniteur des intérêts matériels* de Bruxelles qui donne les renseignements ci-après, dont la lecture est très facile :

CHANGE ET ESCOMPTE

Amsterdam (24 sept.)

Paris vue	47,96
— 2/m	47,60
Belgique vue	47,67
Italie vue	47,55
Vienne vue	50,25
Allemagne vue	59,33 1/2
— 3/m	58,37 1/2
Londres vue	12,11 1/4
— 2/m	12,00 3/4
Pétersbourg vue	128 1/8
Suisse vue	47,88
— 3/m	47,27 1/2
Monnaies	
Guillaume d'or	9,95
Livre anglaise	12,07 1/2
Pièce de 20 fr.	9,60
— de 20 mk.	11,85
Or en barres	1.650,00
Argent en barres	48,50
Escompte	
Officiel	5,00
Prolongation	5 1/2

Anvers (24 septembre)

Amsterd. c/j	209,82 1/2
Allemagne c/j	124,50
Londres vue	25,41 3/4
Paris c/j	100,65

Athènes (13 septembre)

Paris vue	99 7/8

Barcelone (24 sept.)

Paris	6,45

Berlin (24 septembre)

Belgique 8/j	80,25
— 2/m	0,00
Amsterdam 8/j	168,30
Londres vue	20,38
Paris vue	80,82
Vienne 8/j	84,60
Roubles comptant	216,10
Italie vue	79,95
Monnaies	
Livre anglaise	20,40 1/2
Pièce de 20 fr.	16,18 1/2
Escompte	
Officiel	6,00
Hors banque	5 3/4

Bombay-Calcutta (23 septembre)

Londres câble	0.1.4 3/32

Bruxelles (24 septembre)

Amsterdam vue	209,75
Allemag. vue	124,42 1/2
Londres vue	25,40 1/2
Paris vue	100,60
Vienne vue	105,40
Madrid vue	94,62 1/2
Pétersbourg vue	268,75
Coupons métall.	104,55
Escompte	
Officiel	5,00
Hors banque	4 9/16

Bucarest (22 septembre)

Londres vue	25,41 1/4
Paris vue	100,62 1/2
Vienne vue	105,20
Berlin vue	124,50
Belgique vue	99,90
Escompte officiel	6,00

Buenos-Aires (23 sept.)

Prime sur l'or	127,27

Constantinople (22 septembre)

Londres vue	110,02
Paris vue	22,92 5/8
Monnaies	
Livre sterling	109,32
Pièce de 20 fr.	87,12

Genève (23 septembre)

France vue	100,14
Belgique vue	99,54
Londres vue	25,28 3/4
Allemagne vue	123,89
Vienne vue	104,92

Hong-Kong (23 sept.)

Londres câble	0.2.0 1/4

CHANGE ET ESCOMPTE (*suite*)

Lisbonne (23 septembre)

Paris vue	630,00
Londres vue	45 1/4
Prime sur l'or	17,00

Londres (23 septembre)

Amsterdam c/j	12,02 1/4
Belgique 3/m	25,73 3/4
Allemagne 3/m	20,74
Paris c/j	25,25
Autriche 3/m	24,50
Pétersbourg 3/m	24 7/8
Italie 3/m	25,87 1/2
New-York 2/m	48 13/16
Espagne 3/m	43 15/16
Portugal 3/m	44 5/8
Argent en barres	28 5/16
Escompte	
Officiel	4 1/2
Hors banque	4 1/8

Madrid (23 septembre)

Londres vue	26,81
Paris vue	6,20
Escompte	4 1/2
Prime sur l'or	6,35

New-York (24 sept.)

Câbles trans.	4,86
Londres 2/m	4,82
Paris c/j	5,20
Berlin c/j	95 1/16

Paris (24 septembre)

Londres vue	25,25
— c/j	25,25
— 3/m	25,25
Suisse c/j	99 27/32
Vienne c/j	104 23/32
Italie c/j	99 1/4
Lisbonne c/j	475 1/2
Amsterdam c/j	208 1/2
Allemagne c/j	123 11/16
— 3/m	123 27/32
Belgique c/j	99 3/8
— 3/m	99 1/2
Madrid c/j	470 1/2
New-York (or) c/j	519,00
Roubles comptant	267,00
Escompte	
Officiel	4,00
Hors banque	3 5/8

Rio-de-Janeiro (23 septembre)

Londres	16 9/64

Rome (24 septembre)

Londres vue	25,45
France vue	100,80
Allemagne vue	124,65

Saint-Pétersbourg (24 septembre)

Londres vue	94,52
Berlin vue	46,30
Paris vue	37,42
Escompte officiel	6,00

Shanghaï (23 sept.)

Londres câble	0.2.9 3/8

Singapour (23 sept.)

Londres câble	0.2.4 1/16

Valparaiso (23 sept.)

Londres 4/m	9 5/8

Vienne (23 septembre)

Amsterdam vue	199,15
Allemag. vue	118,07 1/2
Londres vue	24,10
Italie vue	94,52 1/2
Paris vue	95,40
Suisse vue	95,32 1/2
Monnaies	
Napoléon	19,11
Livre sterling	24,11
Pièce de 20 mk.	23,65
Ducat	11,46 1/2
Escompte officiel	6,00

Yokohama (22 sept.)

Londres câble	0.2.0 1/2

65. **Arbitrage de change.** — On appelle *arbitrage de change*, l'opération qui consiste à rechercher le procédé le plus avantageux pour faire un paiement ou effectuer un encaissement exprimé en monnaie étrangère.

On a vu que les procédés usités étaient :

Mouvement de numéraire ;

Achat de lettre de change et remise de cette lettre au créancier.

Tirage de lettre de change et vente de cette lettre par le créancier.

Le premier cas a été étudié plus haut ; il reste à examiner le cas d'un débiteur et celui d'un créancier en monnaie étrangère.

66. **Position d'un débiteur à vue en monnaie étrangère.** — 1er Cas : *Places se donnant réciproquement le certain et l'incertain.* — Si les deux places se donnent réciproquement le certain et l'incertain (voir n° 43), la comparaison des deux cotes montrera immédiatement ce qu'il faut faire :

Si Paris doit à Londres 100 £ et que :

1° Paris cote Londres 25 fr. 21 pour 1 £,

2° Londres cote Paris 25 fr. 19 pour 1 £,

le débiteur parisien demandera à son créancier de tirer une traite de 2.519 fr. qui, négociée à Londres, payera exactement la dette de 100 £ ; l'achat d'une créance de 100 £ sur Londres aurait liquidé la dette, mais aurait coûté 2.521 fr.

2e Cas : *Places se donnant réciproquement l'incertain ou le certain.*

Si les deux places A et B se donnent réciproquement l'incertain (le raisonnement serait semblable si elles se donnaient le certain), soient :

a le cours à vue de l'unité monétaire de B en A, et b le cours à vue de l'unité monétaire de A en B.

A devant par exemple à B 1 unité monétaire de B déboursera a unités monétaires de A en achetant sur sa place une créance sur B et en la remettant.

Si, au contraire, il dit à B de tirer sur lui, B fera une traite égale à $\frac{1}{b}$ unités monétaires de A, et négociera cette traite, qui lui procurera bien :

$$\frac{1}{b} \times b = 1 \text{ unité de sa monnaie.}$$

Il y aura donc avantage à *remettre* (c'est-à-dire à acheter en A une créance sur B) si

$$a < \frac{1}{b} \quad \text{ou } ab < 1.$$

Au contraire, il y aura avantage à faire tirer le créancier si :

$$a > \frac{1}{b} \quad \text{ou } ab > 1.$$

Pratiquement, on ne considère que rarement *une* seule unité monétaire, mais le plus souvent 100 ou 500, ainsi que l'indique le tableau du n° 63 (page 89).

Il en résulte que a et b expriment les valeurs de 100 unités, et que si

$ab < 10.000$, il faut *remettre* ;
$ab > 10.000$, il faut faire *tirer*.

Ces inégalités sont connues sous le nom de *règle des 10.000* ; elles sont assez commodes pour permettre de se rendre compte du sens d'un arbitrage sans chercher les vraies valeurs de négociation.

Exemple. — *Paris doit à Berlin* 100 *marks à vue; que doit-il faire si Paris cote Berlin* 123 *à vue et Berlin cote Paris* 81 *à vue?*

Dire que Paris cote Berlin 123 veut dire qu'il faut 123 fr. pour obtenir 100 marks, et, dire que Berlin cote Paris 81 veut dire qu'il faut donner 81 marks pour obtenir 100 fr.

La règle des 10.000 donne :

$$123 \times 81 = 9.963 < 10.000.$$

Il faut donc *remettre*, c'est-à-dire acheter à Paris un effet de 100 marks sur Berlin ; il coûtera 123 fr.

Si l'on avait dit à Berlin de tirer sur Paris, la valeur de la traite en francs permettant par sa négociation à Berlin d'obtenir 100 marks aurait été de :

$$\frac{100 \times 100}{81} = 123 \text{ fr. } 44.$$

67. **Position d'un débiteur à terme en monnaie étrangère.** — Dans ce cas, il faut faire le *nivellement des cours*, c'est-à-dire amener les cours du change indiqués sur la cote, à la date fixée pour l'échéance de la dette, par un escompte au taux de la place sur laquelle l'effet est *tiré* ou à laquelle il est *remis*.

1er Cas : *Places se donnant réciproquement le certain et l'incertain.*

Le nivellement des cours n'étant pas fait au même taux, la comparaison n'est pas immédiate comme dans le cas d'un effet à vue.

Exemple. — *Paris doit à Londres* 100 £ *à* 17 *jours, que doit-il faire si d'après les cotes on a :*

Paris sur Londres 25,16 *taux* $3\frac{1}{2}$ % *et Londres sur Paris* 25,20 *taux* 4 %.

Dans la cote de Paris on prendra naturellement le papier court.

Le nivellement des cours ramenés à leur valeur payable dans 17 jours donnera :

Paris sur Londres :

$$25,16\left(1 - \frac{17 \times 0,035}{360}\right) = 25,16 - 0,042 = 25,118;$$

Londres sur Paris :

$$25,20\left(1 - \frac{17 \times 0,04}{360}\right) = 25,20 - 0,048 = 25,152.$$

Il faut donc *acheter* une créance à Paris et *remettre*.

2e Cas : *Places se donnant réciproquement le certain (ou l'incertain.)*

On prouvera, comme dans le cas du débiteur à vue, que si le produit des *valeurs nivelées* des unités monétaires est inférieur à 1, il faut *remettre*, et, dans le cas contraire, faire *tirer* le créancier.

Dans la pratique, les cours cotant en général 100 unités monétaires, la *remise* se fera si le produit des cours nivelés est inférieur à 10.000, et le *tirage* si le produit est supérieur à 10.000.

Exemple. — *Berlin doit* 100 *florins à Vienne à* 23 *jours* ; *les cotes sont :*

Berlin sur Vienne à 3 *mois* 169 *et* 5 %.

Vienne sur Berlin à vue 60 — *taux* 6 %.

Que doit faire Berlin pour régler au mieux ?

Les cotes ci-dessus indiquent que :

100 florins payables dans 3 mois valent 169 marks comptant à Berlin :

100 marks comptant valent 60 florins comptant à Vienne.

Il faut niveler les cours, c'est-à-dire les amener à la valeur réelle dans 23 jours ;

Si 100 florins payables dans 3 mois valent 169 marks comptant, ces 100 florins payables seulement dans 23 jours

6

vaudront plus ; la majoration sera due à 90 — 23 = 67 jours d'intérêts à 5 %.

Les 100 florins à 23 jours vaudront par suite :

$$169 + 169 \times \frac{67 \times 0{,}05}{360} = 169 + 1{,}572 = 170{,}572 \text{ marks à vue.}$$

De même si 100 marks comptant valent 60 florins comptant, 100 marks dans 23 jours coûteront en moins l'intérêt de 60 florins pendant ce temps, soit :

$$60 - 60 \times \frac{23 \times 0{,}06}{360} = 60 - 0{,}23 = 59{,}77 \text{ florins à vue.}$$

On a :

$$170{,}572 \times 59{,}77 = 10.195{,}08 \ldots > 10.000.$$

Berlin devra donc demander à Vienne de *tirer* sur lui une lettre de change d'un nombre de marks suffisant pour que Vienne puisse avoir 100 florins dans 23 jours.

La valeur de cette lettre sera :

$$\frac{100}{59{,}77} \times 100 = 167 \text{ marks } 308.$$

Si Berlin avait fait une remise il aurait déboursé :
170 marks 572

68. **Position d'un créancier à terme en monnaie étrangère.** — Comme le débiteur en monnaie étrangère, le créancier a le choix du règlement, et il choisit de telle sorte que son débiteur, quoique déboursant une somme fixe en monnaie étrangère, la somme touchée en monnaie indigène soit la plus élevée possible.

Les cas relatifs aux places se donnant réciproquement le certain et l'incertain se traiteront exactement comme il a été exposé ci-dessus. Il suffit donc de chercher une règle pour les places se donnant réciproquement l'incertain, ce qui est le cas général.

La place A est créancière de B de 1 unité monétaire de B.

Les cotes montrent que :

En A 1 unité monétaire B vaut a unités monétaires de A ;
En B 1 unité monétaire A vaut b unités monétaires de B.

Si A tire sur B une lettre de change de 1 unité monétaire B et qu'il la négocie, il touchera a unités de sa monnaie.

S'il dit à B d'acheter en B une créance sur A, qui sera nécessairement en unités monétaires de A, B déboursant 1 unité de sa monnaie achètera une créance valant $\frac{1}{b}$ unités de A.

Si donc $\frac{1}{b} > a$ ou $ab < 1$, A donnera l'ordre à B de faire une *remise*.

Si $a > \frac{1}{b}$ ou $ab > 1$, A fera traite sur B.

Ces règles sont identiques à celles qui ont été précédemment trouvées, et, dans la pratique, elles s'appliqueront en tenant compte du nombre d'unités monétaires prises comme terme de comparaison dans chaque place. Ce nombre étant en général 100 dans les deux places, on retrouvera la « règle des 10 000 » :

Remise, si le produit des cours est inférieur à 10 000.
Traite, si le produit des cours est supérieur à 10 000.

Exemple. — *Paris doit à Berlin* 100 *fr. à vue, que doit ordonner Berlin si Paris cote Berlin* 123 *et Berlin cote Paris* 81 ?

On a :

$$123 \times 81 = 9.963 < 10.000.$$

Berlin donnera à Paris l'ordre d'acheter une créance en marks sur Berlin et de la lui *remettre*.

Paris payant 100 fr. enverra à Berlin une traite de :

$$\frac{100 \times 100}{123} = 81,3 \text{ marks.}$$

Si Berlin avait tiré il n'aurait touché que 81 marks.

Si la créance est à terme, on nivellera les cours en tenant compte du taux de l'escompte pour la période à courir, et ce sont les cours nivelés qui serviront à faire les calculs.

69. **Change indirect.** — Il y a quelquefois avantage à se servir, pour les opérations de change, d'une ou de plusieurs places intermédiaires entre les deux places débitrice et créancière.

Si par exemple Paris doit des marks à Berlin, il peut pour débourser le moins de francs possible :

1° Acheter du papier en £ sur Londres à Paris, l'envoyer à son créancier qui, en le vendant, devra toucher sa créance intégralement :

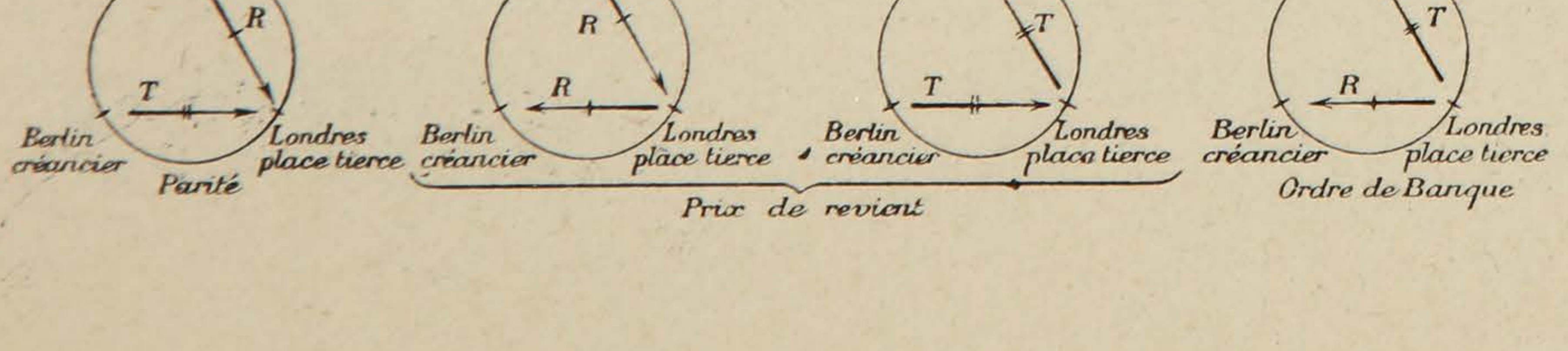
On appelle ce procédé : la *parité*.

2° Faire faire par Londres une *remise* en marks à Berlin et payer Londres par une *remise* (de £) achetée à Paris, ou inversement, faire tirer par Berlin sur Londres qui se couvrira sur Paris ; c'est le procédé du *prix de revient*.

3° Faire faire par Londres une remise en marks à Berlin et dire à *Londres* de tirer en francs sur Paris pour se couvrir.

Le débiteur n'intervient qu'au payement et Londres agit comme un banquier ; aussi ce procédé est-il appelé : l'*ordre de banque*.

M. Helfenbein, chef du Service des Finances à la Cie P.-L.-M. a représenté très heureusement ces opérations comme suit :



Ces trois méthodes de règlement s'appliqueront aussi dans le cas d'un créancier en monnaie étrangère.

Si Paris est créancier de marks sur Berlin, il pourra, pour toucher le plus de francs possible (son débiteur ne déboursant que la somme convenue en marks) :

1° Dire à Berlin d'acheter des £ à Berlin et de lui envoyer cette créance sur Londres qu'il négociera à Paris : c'est le procédé de la *parité*.

2° Dire à Londres de tirer sur Berlin en marks et tirer sur Londres une traite du montant en £ de la négociation de la première traite : c'est le *prix de vente*.

3° Dire à Londres de faire toute l'opération en tirant sur Berlin en marks et en remettant en francs : c'est l'*ordre de banque*.

On peut donc dire que :

La parité consiste en une remise de papier sur une place médiate.

Le prix de revient et le *prix de vente* nécessitent deux remises ou deux tirages successifs.

L'ordre de banque consiste en *une remise et un tirage* effectués successivement par la place médiate s'il s'agit d'une dette et d'un *tirage suivi d'une remise*, s'il s'agit d'une créance.

Pour déterminer le procédé le plus avantageux on peut appliquer la règle des « 10.000 » en combinant deux à deux les trois méthodes.

Soit par exemple : Paris débiteur de 1 mark à Berlin.

On peut désigner les cours de change en supposant que Paris, Londres et Berlin se donnent l'incertain, par :

f_L et f_B prix en francs à Paris de 1 £ et de 1 mark ;

l_B et l_P prix en livres à Londres de 1 mark et de 1 franc ;

m_P et m_L prix en marks à Berlin de 1 franc et de 1 livre.

La figure ci-dessous indique les permutations à opérer successivement pour écrire les valeurs précédentes.

En réalité Londres donne le certain sur sa cote, c'est-à-dire exprime le prix de 1 livre ; soit a ce prix en francs on aura :

x £ valent 1 fr.

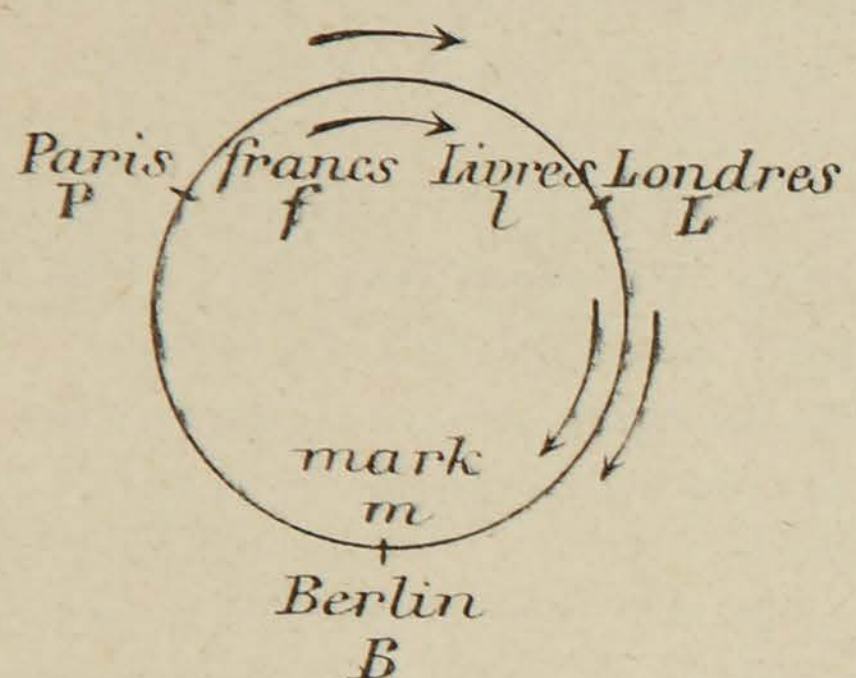
a fr. valent 1 £

d'où :

$$x = \frac{1}{a} = l_{\text{P}}.$$

1° Parité.

Soit x le nombre de francs à débourser ; ils permettront



d'acheter à Paris une traite sur Londres de $\frac{x}{f_{\text{L}}}$ livres sterling.

1 £ valant m_{L} marks, la traite libérera à Berlin :

$$\frac{x}{f_{\text{L}}} \times m_{\text{L}} \text{ marks} ;$$

la dette étant de 1 mark on aura :

$$\frac{x}{f_{\text{L}}} \times m_{\text{L}} = 1,$$

d'où :

$$x = \frac{f_{\text{L}}}{m_{\text{L}}}.$$

Le calcul par conjointe se ferait comme suit :

Achat de livres à Paris, f_{L} francs valent 1 £ ;

Vente de livres à Berlin, 1 £ vaut m_{L} marks ;

Règlement de la dette, 1 mark vaut x francs ;

d'où :

$$x = \frac{f_{\text{L}}}{m_{\text{L}}} ;$$

2° Prix de revient.

x francs achètent à Paris une remise de $\frac{x}{f_L}$ livres sterling, qui permettent d'acheter à Londres une remise de :

$$\frac{1}{f_L} \times \frac{1}{l_B} \text{ marks}$$

puisque l_B livres équivalent à 1 mark.

Si donc on a 1 mark à payer, l'égalité :

$$\frac{x}{f_L\, l_B} = 1$$

permettra de calculer $x = f_L\ l_B$;

Par conjointe on aurait :

Achat de livres à Paris,	f_L	francs valent	1 £ ;
Achat de marks à Londres,	l_B	livres valent	1 mark ;
Règlement de la dette,	1	mark vaut	x francs :

d'où :

$$x = f_L\ l_B ;$$

3° Ordre de banque :

x f. à Londres libèrent $x \times l_P$ livres sterling qui permettent d'acheter $\frac{x \times l_P}{l_B}$ marks ; la dette étant de 1 mark on aura :

$$\frac{x \times l_P}{l_B} = 1 ;$$

d'où :

$$x = \frac{l_B}{l_P}.$$

Par conjointe on aurait :

Achat de francs à Londres, 1 franc vaut l_P livres sterling ;
Achat de marks à Londres, l_B livres valent 1 mark
Règlement de la dette, 1 mark vaut x francs.

$$x = \frac{l_B}{l_P}.$$

Comparaison des trois procédés

1° Conditions pour que la parité soit le procédé le moins coûteux :

Il faut que l'on ait à la fois :

$$\frac{f_L}{m_L} < f_L \cdot l_B \quad \text{ou} \quad 1 < m_L \cdot l_B.$$

et

$$\frac{f_L}{m_L} < \frac{l_B}{l_P} \quad \text{ou} \quad f_L \cdot l_P < l_B \cdot m_L$$

2° Conditions pour que le prix de revient soit le procédé le moins coûteux.

Il faut que l'on ait à la fois :

$$f_L \cdot l_B < \frac{f_L}{m_L} \quad \text{ou} \quad 1 > m_L \cdot l_B,$$

et :

$$f_L \cdot l_B < \frac{l_B}{l_P} \quad \text{ou} \quad 1 > f_L \cdot l_P.$$

3° Conditions pour que l'ordre de banque soit le procédé le moins coûteux.

Il faut que : $\frac{l_B}{l_P} < \frac{f_L}{m_L}$ ou $l_B \cdot m_L < f_L \cdot l_P$.

et

$$\frac{l_B}{l_P} < f_L \cdot l_B \quad \text{ou} \quad 1 < l_P \cdot f_L.$$

On voit que la comparaison est très facile entre la parité et le prix de revient d'une part, ce prix de revient et l'ordre de banque d'autre part ; mais la comparaison de la parité et de l'ordre de banque est moins facile ; dans les deux premiers cas on emploiera la règle des 10.000 si les unités monétaires se cotent par 100.

Exemple. — *Paris doit à Amsterdam* 100.000 *florins payables fin juin et désire s'acquitter le* 17 *mai?*

Quel est le procédé le moins onéreux pour effectuer ce payement en employant Londres comme place médiate?

Les cotes donnent les chiffres suivants :

Paris s/ Londres vue (chèque) 25,135. Taux d'escompte à Paris 3,5 %;

Paris s/ Londres court, 25,15 ;

Paris s/ Londres long, 25,145 ;

Paris s/ Amsterdam court, 207 $^{31}/_{32}$;

Paris s/ Amsterdam long, 207 $^{31}/_{32}$ (le cours est le même pour le papier long lorsqu'il n'est pas indiqué) ;

Londres s/Paris court ou long, 25,1375, taux à Londres 4 %;

Londres s/ Amsterdam, court ou long, 12,1 7/8 ;

Amsterdam s/ Paris court, 48,10, taux à Amsterdam 5 %;

Amsterdam s/ Paris long (2 m.) 47,60 ;

Amsterdam s/ Londres court, 12,08 ;

Amsterdam s/ Londres long (2 m.) 11,98.

Dans cet exemple, nous avons à dessein indiqué trop de données : c'est le cas ordinaire des problèmes pratiques quand on se trouve en présence d'une cote à déchiffrer et à appliquer ; le choix est toujours facile, ainsi dans le cas actuel, du 17 mai au 30 juin, on compte 44 jours : on en conclut que seules les cotes du papier long sont utiles. On commencera par niveler les cours, et, pour donner des exemples variés, nous nivelerons tous les cours même ceux du papier court.

On aura ainsi :

Paris s/ Londres vue :

$$25{,}135\left(1 - \frac{0{,}04 \times 44}{360}\right) = 25{,}012\ ;$$

Paris s/ Londres court ;

$$25{,}15\left(1 - \frac{0{,}04 \times 44}{360}\right) = 25{,}028\ ;$$

Paris s/ Londres long :

$$25{,}145\left(1-\frac{0{,}04\times 44}{360}\right)=25{,}022\ ;$$

Paris s/ Amsterdam (c. ou l.) :

$$207\,{}^{31}/_{32}\left(1-\frac{0{,}05\times 44}{360}\right)=206{,}700\ ;$$

Londres s/ Paris (c. ou l.) :

$$25{,}1375\left(1+\frac{0{,}035\times 44}{360}\right)=25{,}245\ ;$$

Londres s/ Amsterdam (c. ou l.) :

$$12{,}1875\left(1+\frac{0{,}05\times 44}{360}\right)=12{,}262\ ;$$

Amsterdam s/ Paris court :

$$48{,}10\left(1-\frac{0{,}035\times 44}{360}\right)=47{,}894\ ;$$

Amsterdam s/ Paris (2 m.) :

$$47{,}60\left(1+\frac{0{,}035\times 16}{360}\right)=47{,}674\ ;$$

Amsterdam s/ Londres court :

$$12{,}08\left(1-\frac{0{,}04\times 44}{360}\right)=12{,}028\ ;$$

Amsterdam s/ Londres (2 m.) :

$$11{,}98\left(1+\frac{0{,}04\times 16}{360}\right)=12{,}001.$$

Dans ces opérations de nivellement il faut tenir compte des usages de place :

Ainsi Paris donne l'*incertain* et cote à vue la valeur de l'unité monétaire, donc il faudra toujours débourser moins de francs pour obtenir immédiatement cette unité supposée payable seulement dans 44 jours.

Londres donne le *certain* et cote à vue ; il exprime donc toujours l'équivalent de 1 £ : cette £ libérera plus de francs ou de florins payables dans 44 jours que de francs ou de florins à vue.

Amsterdam donne l'incertain mais cote à vue et à 2 mois : pour le premier cas on opère comme à Paris. Mais le cours à 2 mois exprime en florins payés de suite le prix de 1 unité étrangère payable dans 60 jours ; si donc le paiement a lieu dans 44 jours seulement, il faudra débourser plus de florins immédiatement pour se libérer.

L'envoi d'une remise de 100.000 florins coûterait à Paris 206.700 f.

Si Amsterdam tirait une traite, Paris payerait :

$$\frac{100 \times 100.000}{47{,}674} = 209.758 \text{ f.}$$

Par le change indirect avec Londres comme place médiate on trouverait :

Par la parité $\frac{100.000 \times 25{,}022}{12{,}001} = 208.499$ f.

Par le prix de revient $\frac{100.000 \times 25{,}022}{12{,}262} = 204.061$ f.

Par l'ordre de banque $\frac{100.000 \times 25{,}245}{12{,}262} = 205.880$ f.

C'est le prix de revient qui est le moins onéreux.

On fera faire par Londres une remise en florins sur Amsterdam et on payera Londres en lui remettant des £ achetées à Paris.

70. **Cotes chiffrées.** — On appelle cote chiffrée de la place A sur la place B un tableau qui fait connaître les divers prix de payement ou de recouvrement, dans la seconde place, de *une* unité de la 1re, en utilisant le change direct et le change indirect.

Ces tableaux devraient être établis par chacune des trois méthodes indiquées précédemment ; mais, en général, on ne les calcule que pour la *parité*. Ce mode de règlement ne nécessite, en effet, que la connaissance des changes des deux places A et B, sans faire intervenir la cote des changes de l'une des places médiates.

Voici, par exemple, la cote de Londres chiffrée à Paris :

PLACES (Devises)	COTE DE LONDRES			COTE DE PARIS			PARITÉS
	Taux d'escompte	Échéance	Cours	Taux d'escompte	Échéance	Cours	
Londres . .	3,5	»	»	3 1/2	vue	25,23	25,23
Paris. . . .	3	vue	25,20	3	»	»	25,20
Allemagne .	4	3 mois	20,55	4	vue	123,525	25,13
Amsterdam.	2 1/2	vue	12,10	2 1/2	vue	209 »	25,289
Bruxelles. .	3	vue	25,18	3	vue	100,18	25,225
Vienne. . .	4 1/2	3 mois	24,30	4 1/2	vue	104,75	25,242
Pétersbourg.	5	3 mois	25d 1/2	5	vue	265 »	25,254

On peut remarquer que Londres donne le certain à tous les pays, sauf à Pétersbourg.

Pour établir le chiffre 25,289 indiqué sur ce tableau, il suffit d'effectuer le calcul indiqué pour la *parité* n° 69 ; mais, comme Londres donne le certain, il faut avoir soin de remplacer le nombre de £ par l'inverse du chiffre de la cote de Londres.

On a d'ailleurs, par la conjointe :

x francs pour 1 £,
1 £ vaut 12,10 florins,
100 florins valent 209 francs ;

d'où :

$$x = \frac{12,10 \times 209}{100} = 25,289.$$

Soit encore à établir le chiffre de 25,13 relatif à l'Allemagne, qui présente la particularité d'être cotée à 3 mois.

La cote indique que Londres donne comptant 1 £ pour 20,55 marks payables dans 3 mois ; cette livre ne libérerait donc à vue (au comptant) que 20,55 moins l'intérêt de cette somme à 4 % (taux de Berlin) pendant 3 mois, soit :

$$20{,}55 - 20{,}55 \times \frac{0{,}04 \times 3}{12} = 20{,}3445.$$

La conjointe donne alors la parité par le calcul ci-après :

x francs pour 1 £ ;
1 £ pour 20,3445 marks ;
100 marks pour 123,525 francs.

Soit :

$$x = \frac{20{,}3445 \times 123{,}525}{100} = 25{,}13.$$

On pourrait de même chiffrer à Paris les cotes des autres pays afin de se rendre compte des procédés les plus avantageux pour régler ou pour encaisser.

Étant donnée la cote chiffrée indiquée plus haut, on voit que : si Paris est débiteur de Londres en £, il a avantage à acheter des marks à Berlin et à les envoyer à Londres ; si Paris est créancier de Londres en £, il fera acheter des marks par Londres et les négociera ; enfin le spéculateur adressera des marks à Londres et demandera à être payé en florins autrichiens.

71. **Agio**. — Au lieu de calculer les résultats du change à l'aide de conjointe, on peut se servir des *agios* ; on appelle agio le quotient par le pair de la différence entre le prix du cours à vue et ce pair.

Ainsi dans la cote précédente on a :

Paris cote Berlin 123,525 à vue ; le pair est 123,46, l'agio sera :

$$\frac{123,525 - 123,46}{123,46} = \frac{0,065}{123,46} = 0,53\ ^0/_{00}.$$

L'agio peut être positif ou négatif suivant que le cours est supérieur ou inférieur au pair ; la formule générale de l'agio est : $a = \frac{c - p}{p}$ en désignant par c le cours à vue et par p le pair.

On en déduit : $c = p(1 + a)$.

Soient deux places pour lesquelles les valeurs du cours du pair et de l'agio soient c, p, a et c', p', a'.

On aura : $c = p(1 + a)$, $c' = p'(1 + a')$.

Si les deux places sont en *parité* et se donnent réciproquement le certain et l'incertain $c = c'$;

ou : $$p(1 + a) = p'(1 + a').$$

Mais, dans ce cas, $p = p'$ (le pair est coté en même unité monétaire), donc $1 + a = 1 + a'$, $a = a'$; les agios sont identiques.

Si les deux places sont en *parité* et se donnent réciproquement le certain ou l'incertain on aura :

$$cc' = p(1 + a) \times p'(1 + a') = 1 \quad \text{avec} \quad pp' = 1 ;$$

d'où : $(1 + a)(1 + a') = 1$, soit enfin : $a + a' + aa' = 0$, ou approximativement $a + a' = 0$; la somme algébrique des agios est nulle.

Exemple :

Paris cote Berlin 123,525 *à vue* ;

Berlin cote Paris 80,955 à vue.

Calculer les agios :

1° Paris :

$$a = \frac{123,525 - 123,46}{123,46} = \frac{0,065}{123,46} = 0,53\ ^0/_{00}.$$

2° Berlin :

$$a' = \frac{80{,}955 - 81}{81} = \frac{-0{,}045}{81} = -0{,}55\ ^0/_{00},$$

$a + a' = 0{,}53 - 0{,}55 = -0{,}02$: les deux places sont à la parité, la différence $-0{,}02$ correspond à la quantité aa' négligée.

Si le produit $cc' < 1$ on a : $p(1 + a)\,p'(1 + a') < 1$,

et comme $pp' = 1$, $(1 + a)(1 + a') < 1$;

d'où : $1 + a + a' + aa' < 1$;

soit enfin approximativement $a + a' < 0$.

On a vu que si cc', produit des cours, était inférieur à 1, il fallait régler par traite, et que si cc' était supérieur à 1, il fallait faire une remise. On transformera cette règle en la suivante :

Si la somme algébrique des agios est négative, il faut faire *remettre* ; si la somme algébrique des agios est positive, il faut *tirer*.

On construit des tables d'agios analogues aux tables de parité dont il a été parlé précédemment et qu'elles remplacent avec avantage, car la somme algébrique des agios représente le bénéfice de l'opération tentée.

En effet, si l'on prend la différence entre les deux valeurs c et $\frac{1}{c'}$, qui expriment le prix de 1 unité monétaire de la seconde place, on aura la valeur du bénéfice réalisé soit :

$$b = c - \frac{1}{c'} = p(1 + a) - \frac{1}{p'(1 + a')}$$

$$= \frac{pp'(1 + a)(1 + a') - 1}{p'(1 + a')}\ ; \quad \text{or} \quad pp' = 1$$

Donc $$b = \frac{a + a' + aa'}{p'(1 + a')}.$$

Ce bénéfice est celui relatif à $\frac{1}{c'}$ unités monétaires de la première place ; donc pour une unité il sera :

$$bc' = \frac{a + a' + aa'}{p'(1 + a')} c' = \frac{a + a' + aa'}{p'(1 + a')} p'(1 + a')$$
$$= a + a' + aa',$$

ou approximativement $a + a'$, qui représente le bénéfice cherché.

Exemple. — *Quel bénéfice peut-on réaliser si Paris cote Berlin* 124 fr. 32 *à vue, et Berlin cote Paris* 80 fr. 90 ?

On a :
agio à Paris s/ Berlin :

$$= \frac{124,32 - 123,46 \text{ (pair)}}{123,46} = + 6,9 \text{ ‰} = a$$

agio à Berlin s/ Paris :

$$= \frac{80,90 - 81 \text{ (pair)}}{81} = - 1,2 \text{ ‰} = a',$$

$$a + a' = 6,9 \text{ ‰} - 1,2 \text{ ‰} = 5,7 \text{ ‰}.$$

Il y a donc lieu de régler par traite, et le bénéfice sera 5,7 ‰, mais les frais réduiront ce bénéfice de 1,5 à 2 ‰ environ.

LIVRE II
OPÉRATIONS FINANCIÈRES A LONG TERME

PREMIÈRE PARTIE
OPÉRATIONS RELATIVES A UN CAPITAL INDIVIS

CHAPITRE PREMIER
PRÊT A INTÉRÊTS COMPOSÉS

72. **Généralités.** — Les opérations à court terme examinées dans les deux premières parties ne nécessitent que des calculs d'intérêts simples ; cependant, pour quelques-unes des opérations à court terme, les comptes courants et d'intérêts, par exemple, les intérêts s'ajoutant aux capitaux dans le solde produisent à leur tour intérêt pendant la période suivante.

Cette addition des intérêts au capital s'appelle *capitalisation des intérêts*, et la production d'intérêt par ces premiers intérêts constitue l'*anatocisme*.

L'importance des opérations qui mettent en jeu la capitalisation n'a guère été réellement mise en évidence que vers le milieu du siècle dernier, au moment des grandes émissions d'obligations pour effectuer des travaux publics d'utilité générale, et dont l'amortissement, gagé sur les bénéfices provenant de la mise en exploitation de ces travaux, devait nécessairement s'étendre sur de longues périodes.

73. **Formule ordinaire.** — Dans le prêt à intérêt composé pour n périodes, l'intérêt acquis après la première période s'ajoute au capital ; l'ensemble produit intérêt pendant la seconde période, le nouvel intérêt s'ajoute au second capital, et ainsi de suite, sans que l'on distingue même à un moment quelconque le capital primitif des intérêts successivement acquis.

Si l'on désigne par a le capital, par i le taux d'intérêt correspondant à 1 franc de capital, la somme constituée à la fin de la première période sera :

$$a + ai = a(1 + i).$$

Elle s'obtient en multipliant le capital primitif par la quantité $(1 + i)$; cette règle est générale.

Si donc on considère la somme $a(1 + i)$ comme un nouveau capital, elle deviendra, après une nouvelle période :

$$[a(1 + i)]\,(1 + i) = a(1 + i)^2,$$

qui représente le capital produit par une somme a après deux périodes, si les intérêts se sont capitalisés.

Pendant la troisième période, le capital $a(1 + i)^2$ existant à la fin de la seconde période deviendra :

$$[a(1 + i)^2] \times (1 + i) = a(1 + i)^3.$$

On voit apparaître une loi générale de capitalisation facile à vérifier :

Soit $A_p = a(1 + i)^p$ le capital produit après p périodes ; le capital obtenu après $(p + 1)$ périodes sera :

$$A_{p+1} = A_p(1 + i) = a\,(1 + i)^p(1 + i) = a(1 + i)^{p+1}$$

La formule $A = a(1 + i)^n$ est donc générale et représente le capital produit par le placement primitif d'une somme a, à laquelle les intérêts se sont ajoutés successivement pendant n périodes de capitalisation.

A s'appelle la valeur *définitive* ;

a s'appelle la valeur *primitive* ou *actuelle*.

74. **Généralisation de la formule.** — On peut montrer qu'indépendamment de toute idée d'accumulation d'intérêts, le capital définitif doit être une fonction exponentielle du temps si la capitalisation s'effectue d'une manière continue.

La démonstration suivante a été donnée pour la première fois par M. Laurent.

Soit dA l'accroissement différentiel du capital A pendant le temps infiniment petit dn et au taux d'intérêt périodique i.

Si l'on suppose que l'intérêt élémentaire est proportionnel au temps élémentaire, au taux et au capital, *ce qui ne peut se produire que dans un régime idéal de libre concurrence*, on aura :

$$dA = i.A.dn\,;$$

d'où :

$$\frac{dA}{A} = i.dn = d(\text{L nep.}\,A),$$

$$A = e^{\alpha}.e^{\int idn} = ae^{\int idn},$$

e (base des logarithmes népériens) $= 2{,}718.281\text{-}828.459.045...$

Si enfin on admet que i est constant pendant toute la période de capitalisation, on a : $A = a.e^{in}$ formule qui suppose une capitalisation continue.

La formule $A = a(1 + i)^n$ se ramène d'ailleurs à une forme analogue en posant $1 + i = e^x$; d'où $x = \mathrm{L\,nep}\,(1 + i)$; x s'appelle le *taux continu ou népérien relatif* à i. Mais la forme de l'exponentielle n'a pas prévalu dans la pratique malgré les avantages qu'elle donnerait pour certaines formules.

La démonstration précédente montre que l'on peut s'abstenir de l'hypothèse de la constance du taux, qui peut être une fonction quelconque du temps n.

Il ne faut pas croire que cette idée soit une simple conséquence du calcul : pratiquement le taux i varie constamment, mais il est bien souvent difficile d'exprimer la fonction $i = f(n)$, d'une manière simple.

75. **Capitalisation presque indéfinie.** — Il est nécessaire d'insister sur ce point que la formule théorique $A = a(1 + i)^n$ néglige complètement la réalité des faits.

La capitalisation ne peut *pratiquement* s'exercer d'une manière indéfinie, et la formule générale est inapplicable pour des valeurs très grandes de n, i restant compris entre les limites normales 1 % à 6 %, par exemple.

En capitalisant 1 franc au taux de 4 % pendant 2.000 ans, on obtient :

$$(1{,}04)^{2000} = 11.659.367.763 \times 10^{24}.$$

Il est à peu près impossible de se représenter une pareille somme sans recourir au procédé suivant :

Une sphère en or pur du volume de la terre vaudrait environ 71.856×10^{24} francs. Le résultat de la capitalisation de 1 franc à 4 % jusqu'à la fin du présent siècle serait donc :

$$\frac{11.659.367.763 \times 10^{24}}{71.856 \times 10^{24}},$$

ou :

162.260 globes terrestres en or pur !

L'absurdité du résultat provient, non de la formule, mais de la supposition qui a été faite de la possibilité de placer les capitaux obtenus au même taux de 4 % pendant une période aussi longue.

On peut placer, non sans difficulté d'ailleurs, 1 milliard, 10 milliards même ; mais placer des millions de milliards ? Quel emploi pourrait-on faire de sommes aussi formidables ?

Cette conception d'une capitalisation indéfinie a hanté l'esprit de beaucoup de personnes. Pour ce qui est du passé, l'impossibilité d'un placement continu résulte de l'histoire : les biens considérables de mainmorte acquis par certaines communautés religieuses, par exemple, n'ont pas résisté aux cataclysmes des révolutions. En sera-t-il de même dans l'avenir et peut-on concevoir une capitalisation continue grâce à l'internationalisme des capitaux, grâce à la sécurité plus grande des placements. Si l'histoire recommence perpétuellement on peut répondre hardiment non — de grandes destructions de capitaux résultant de la rencontre de races ou de peuples sont à craindre encore. Mais, en admettant même que la guerre soit abolie, la constitution de ces fortunes immenses ne donnerait guère d'avantages à leurs possesseurs car il est à peu près certain que la fortune générale de l'humanité se serait développée dans les mêmes conditions et que le milliardaire futur ne serait pas plus riche au point de vue de ses relations extérieures que ne l'est le millionnaire actuel.

Les mathématiciens, constatant les résultats invraisemblables obtenus par l'application brutale de la formule $A = a(1 + i)^n$, ont eu l'idée de supposer que la capitalisation devrait s'effectuer dans des conditions telles que le capital définitif ne dépasse pas un maximum fixé arbitrairement. Quelques-uns ont même essayé de tirer parti de l'expérience en faisant appel à la variation du taux de capitalisation dans le passé.

76. **Formule de Catalan.** — Catalan est le premier, semble-t-il, qui ait donné une formule applicable dans certaines limites.

Remarquant que la durée de la plupart des contrats ordinaires ne dépasse pas cent ans, il a cherché à établir une formule dont les résultats ne diffèrent pas essentiellement de ceux donnés par la formule ordinaire pour n inférieur à 100.

De plus, il a imposé la condition que la valeur de A tende vers une limite raisonnable : 5 à 6 fois le capital primitif a, par exemple, quand n augmente indéfiniment.

La formule proposée par Catalan est la suivante :

$$A = a\left[1 + y\right] \quad \text{avec} \quad y = p\left[e - \left(1 + \frac{n}{100}\right)^{\frac{100}{n}}\right],$$

dans laquelle :

y est l'intérêt de 1 fr. pour n années ;

e est la base de logarithmes népériens 2,718.281.828.

p un nombre constant déterminé par la condition que pour $n = 1$, $y = i$, taux d'intérêt des contrats.

On aura donc : $p\left[e - \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100}\right] = i.$

Or, $(1{,}01)^{100} = 2{,}704.814$:

donc $e - \overline{1{,}01}^{100} = 2{,}718.282 - 2{,}704.814 = 0{,}013.468$;

par suite : $p = \frac{i}{0{,}013.468} = i \times 74{,}250.074.25\ldots$

Catalan prenait p entier, mais l'utilité de cette modification est contestable surtout s'il s'agit de comparer les résultats de la formule empirique avec ceux de la formule ordinaire.

Le calcul pratique des barêmes relatifs aux divers taux peut se faire facilement.

Soit :

$$z = \left(1 + \frac{n}{100}\right)^{\frac{100}{n}}; \quad \text{d'où} \quad \lg z = \frac{100}{n} \lg \left(1 + \frac{n}{100}\right),$$

et

$$y = i \times 74{,}25... \times (e - z).$$

Le tableau ci-après donne la marche du calcul pour les taux 3, 3 1/2 et 4 %. Catalan avait donné le barême relatif au taux de 5,887 %.

n	$\lg\left(1 + \frac{n}{100}\right)$	$e - z$ $2{,}71828 - z$	$y = p \times (e - z)$ 3 % $p = 2{,}2275$	 3 1/2 % $p = 2{,}59875$	 4 % $p = 2{,}97$
	0,	0,	0,	0,	0,
1	004 321 37	013 47	,03	,03 500	,04 000
2	008 600 17	026 69	,05 945	,06 936	,07 927
3	012 837 22	039 69	,08 841	,10 314	,11 788
4	017 033 34	052 45	,11 683	,13 630	,15 578
5	021 189 30	064 98	,14 474	,16 887	,19 299
6	025 305 87	077 31	,17 221	,20 091	,22 961
7	029 383 78	089 42	,19 918	,23 238	,26 558
8	033 423 76	101 32	,22 569	,26 331	,30 092
9	037 426 50	113 03	,25 177	,29 374	,33 570
10	041 392 69	124 54	,27 741	,32 365	,36 988
20	079 181 25	229 96	,51 224	,59 761	,68 298
30	113 943 35	320 49	,71 389	,83 287	,95 186
40	146 128 04	399 18	,88 917	1,03 737	1,18 556
50	176 091 26	468 28	1,04 309	1,21 694	1,39 079
60	204 119 98	529 51	1,17 948	1,37 606	1,57 264
70	230 448 92	584 19	1,30 128	1,51 816	1,73 504
80	255 272 51	633 35	1,41 079	1,64 592	1,88 105
90	278 753 60	677 83	1,50 987	1,76 151	2,01 316
100	301 030 00	718 28	1,59 997	1,86 663	2,13 329
500	778 151 25	1,287 31	2,86 748	3,34 540	3,82 331
1 000	1,041 392 69	1,447 30	3,22 386	3,76 117	4,29 848
∞	∞	1,718 28	3,82 747	4,47 038	5,10 329

Il est utile de remarquer que la formule indiquée par Catalan peut être modifiée de telle sorte que pour n très grand, elle donne telle quantité limite que l'on voudra : il suffit en effet de changer le dénominateur 100 employé précédemment. En l'augmentant, on diminuera la valeur limite, en le diminuant on augmentera cette valeur.

77. **Formule de Enrico de Montel.** — Partant de l'idée de limiter le capital acquis, on peut concevoir qu'une formule hyperbolique liant le temps et la valeur définitive A obtenue par la capitalisation de 1 fr., telle que :

$$n.A + \alpha n + \beta A + \gamma = 0,$$

puisse donner des résultats commodes à calculer.

Pour que cette formule puisse convenir il faut que :

pour $n = 0, \quad A = 1$ d'où : $\beta + \gamma = 0,$

pour $n = 1, \quad A = 1 + i,$

d'où : $(1 + i) + \alpha + \beta(1 + i) + \gamma = 0\,;$

et enfin pour $n = \infty, \quad A = M,$ d'où : $M + \alpha = 0.$

La formule deviendra donc :

$$nA - M.n - \frac{1 + i - M}{i} A + \frac{1 + i - M}{i} = 0,$$

et :

$$A = \frac{Mi.n + M - (1 + i)}{i.n + M - (1 + i)} = \frac{M(1 + in) - (1 + i)}{in + M - (1 + i)}.$$

Le tableau suivant donne les valeurs de A pour diverses valeurs de n et en admettant un maximum M égal à 10, pour $n = \infty$.

n	3 %	3 ½ %	4 %
2	1,0598	1,0697	1,0796
3	1,0894	1,1042	1,1189
4	1,1188	1,1384	1,1579
5	1,1480	1,1723	1,1965
6	1,1770	1,2060	1,2348
7	1,2059	1,2394	1,2727
8	1,2345	1,2726	1,3103
9	1,2630	1,3055	1,3476
10	1,29[illegible]3	1,3382	1,3846
20	1,5643	1,6518	1,7377
30	1,8207	1,9436	2,0630
40	2,0619	2,2156	2,3636
50	2,2894	2,4699	2,6423
60	2,5042	2,7081	2,9014
70	2,7073	2,9317	3,1429
80	2,8997	3,1419	3,3684
90	3,0823	3,3401	3,5796
100	3,2556	3,5271	3,7778
500	6,6320	6,9513	7,2155
1 000	7,9284	8,1648	8,3529
∞	10, »	10, »	10, »

78. **Formule de M. Gaillard.** — La formule ordinaire $A = a(1 + i)^n$ suppose que le taux reste constant pendant toute la durée de la capitalisation ; on a vu qu'elle n'était qu'un cas particulier de la formule générale :

$$A = e\int_0^n kidn,$$

dans laquelle i peut être une fonction quelconque de n et de l'époque considérée.

M. Gaillard a cherché à déterminer cette fonction en tenant compte de la variation du taux observée depuis une cinquantaine d'années et en supposant que la fonction était continue et passait par un maximum M.

Pour déterminer une valeur convenable du maximum M,

M. Gaillard considère les périodes pendant lesquelles s'est opérée la décroissance du taux de l'intérêt ; il admet que :

vers	1850-55 le taux était		5 % ;
vers	1860-65	»	4 % ;
vers	1885	»	3 % ;
et enfin vers	1900	»	2 1/2 %.

Ces valeurs sont discutables et le taux normal en 1913 est bien voisin de 4 1/4 % à cause des événements politiques divers qui troublent le marché financier, mais on doit admettre, dans des calculs comme ceux qui précèdent, une élasticité aussi grande que possible.

A l'aide des valeurs de n résultant de la différence des millésimes on peut calculer $\lg M$ dont la valeur moyenne est 2,5 correspondant à $M = 316$, nombre très élevé correspondant à n infini, et la formule proposée est :

$$A = (1 + i)^{\frac{2{,}5\, n}{n \lg(1+i) + 2{,}5}},$$

et, en posant $$\gamma = \frac{\lg(1+i)}{2{,}5},$$

$$A = (1 + i)^{\frac{n}{\gamma n + 1}}.$$

En définitive cette formule donne pour le capital A la valeur correspondant à une période plus petite que n car γ est positif.

Le tableau suivant donne les valeurs de A pour le taux de 4 %.

Quand le maximum M augmente, le dénominateur de la valeur de γ augmente et γ diminue, de telle sorte que pour $M = \infty$ on a $\gamma = 0$ et l'on retrouve la formule ordinaire : $A = (1 + i)^n$.

Les formules de Catalan et de Gaillard ne sont pas utilisées dans la pratique, mais on peut avoir quelque avantage à les connaître et à les appliquer dans certains cas particuliers.

n	$(1{,}04)^{\gamma n + 1}$ $\gamma = \frac{\lg 1{,}04}{2{,}5}$	POUR COMPARAISON $(1{,}04)^n$
1	1,0397	1,0400
2	1,0805	1,0816
3	1,1222	1,1249
4	1,1650	1,1699
5	1,2088	1,2167
6	1,2537	1,2653
7	1,2996	1,3159
8	1,3466	1,3686
9	1,3946	1,4233
10	1.4437	1,4802
20	1,9944	2,1911
30	2,6563	3,2434
40	3,4310	4,8010
50	4,3177	7,1067
60	5,3142	10,5196
70	6,4166	15,5716
80	7,6199	23,0498
90	8,9184	34,1193
100	10,3059	50,5049
500	85,6402	329×10^6
1000	151,3680	108×10^{15}
∞	316,	∞

79. **Taux variant en progression arithmétique.** — Dans le même ordre d'idées, nous avons calculé des tables donnant les produits $(1 + x)(1 + x + \alpha) \ldots\ldots [1 + x + (n - 1)\alpha]$ pour diverses valeurs.

Elles peuvent servir dans l'hypothèse d'une variation continue du taux, hypothèse qui n'a d'ailleurs jamais été réalisée, même pendant une période très limitée de temps ; mais ces tables peuvent donner des indications intéressantes sur l'influence de la variation du taux et elles indiquent en tout cas des limites de l'approximation que l'on peut espérer dans les calculs d'intérêts composés en supposant le taux fixe.

80. **Taux équivalents.** — Après avoir adopté un taux d'intérêt i correspondant à une période déterminée, on est quelquefois obligé de considérer des périodes moins longues, ce qui revient à supposer que n peut être fractionnaire.

Soit f la fraction de période ajoutée au nombre entier n ; la généralisation pure et simple de la formule conduit à considérer la quantité $(1 + i)^{n+f}$ comme équivalant au résultat de la capitalisation de 1 franc pendant un temps $n + f$, la capitalisation ne se produisant cependant entièrement qu'après un nombre entier de périodes.

La quantité $(1 + i)^{n+f}$ s'écrit $(1 + i)^n \times (1 + i)^f$, et l'on est amené à définir la valeur de $(1 + i)^f$.

Soit :

$$(1 + i)^f = 1 + i_f$$

i_f désignant un certain taux d'intérêt correspondant à une période f.

En élevant à la puissance $\frac{1}{f}$, on obtient :

$$(1 + i_f)^{\frac{1}{f}} = 1 + i.$$

Dans la pratique, $\frac{1}{f}$ est toujours un nombre entier, f représentant en général une fraction simple : $\frac{1}{2}$ (correspondant, par exemple, à une semestre, si la période complète est l'année), $\frac{1}{4}$ (trimestre), $\frac{1}{12}$ (mois), $\frac{1}{24}$ (quinzaine).

On voit donc que 1 franc, placé pendant une période complète, soit au taux i, soit au taux i_f, avec capitalisations successives pendant les $\frac{1}{f}$ périodes composant la période primitive, devient le même capital définitif. On dit alors que les deux taux i et i_f sont *équivalents*.

Exemple. — *Quel est le taux de quinzaine équivalent au taux de 4 % l'an ?*

On a ici : $$f = \frac{1}{24} \quad \text{et} \quad \frac{1}{f} = 24.$$

Le taux inconnu sera donné par l'égalité

$$1{,}04 = (1 + i_{24})^{24},$$

d'où : $$\lg(1{,}04) = 24 \lg(1 + i_{24}),$$

et $$i_{24} = 0{,}001636.$$

Remarque : $$\frac{i}{24} = \frac{0{,}04}{24} = \frac{0{,}01}{6} = 0{,}001666 \ldots > i_{24}.$$

81. **Comparaison du taux équivalent et du taux proportionnel.** — La formule $(1 + i_f) = (1 + i)^f$ s'écrit en développant par la formule du binôme :

$$1 + i_f = 1 + fi + \frac{f(f-1)}{1 \cdot 2} i^2 + \frac{f(f-1)(f-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} i^3 + \ldots$$

Cette suite est une série alternée à partir du troisième terme puisque f est une fraction ; l'erreur commise en s'arrêtant à un terme quelconque est inférieure en valeur absolue au premier terme négligé et elle est du signe de ce terme.

Par suite $$i_f - fi = \frac{f(f-1)}{1 \cdot 2} i^2 + \frac{f(f-1)(f-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} i^3 \ldots$$

est négatif, signe de $f(f-1)$, car $f < 1$;

Le taux équivalent correspondant à une certaine période fractionnaire est donc toujours inférieur au produit du taux primitif par la fraction de période, c'est-à-dire au taux proportionnel.

La différence entre les deux taux est assez faible et peut être négligeable quand il s'agit d'opérations de courte durée.

Si l'on place 1 fr. au taux $\frac{i}{K}$ pendant K périodes successives égales formant au total une période ordinaire, on obtient :

$$\left(1+\frac{i}{K}\right)^K = 1 + i + \frac{K(K-1)}{1 \cdot 2}\frac{i^2}{K^2} + \frac{K(K-1)(K-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\frac{i^3}{K^3} + \ldots$$

quantité supérieure à $1+i$ puisque $K > 1$.

Si le nombre de périodes fractionnaires augmente indéfiniment, la quantité $\left(1+\frac{i}{K}\right)^K$ tend vers le nombre e^i.

On retrouve ainsi la formule du n° 74 dans laquelle on a posé $n = 1$.

Dans la pratique des banques, on confond les taux équivalents et proportionnels ; c'est ainsi que l'on dit : obligations 500 fr. 4 % à coupons semestriels, tandis que l'on devrait dire pour être correct : obligations 500 fr. 2 % par semestre. Ces finesses n'ont d'ailleurs d'intérêt réel que s'il s'agit de calculs complets d'amortissement ou de parité.

82. **Comparaison de l'intérêt simple et de l'intérêt composé.** — Le capital produit après n périodes étant $a(1+i)^n$, la différence $a(1+i)^n - a = a[(1+i)^n - 1]$ représente l'accumulation des intérêts provenant tant du capital que des intérêts eux-mêmes.

On peut écrire :

$$a[(1+i)^n - 1] = ani + a\left[\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} i^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} i^3 + \ldots\right].$$

Le premier terme du second membre représente l'intérêt simple produit par le capital a placé pendant la période n et au taux i.

Par suite :

$$\Delta = a\left[\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} i^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} i^3 + \ldots\right].$$

représente la différence entre les intérêts de capitalisation et les intérêts simples ; on voit que :

si $n > 1$, $\Delta > 0$, les intérêts de capitalisation sont supérieurs aux intérêts simples ;

si $n = 1$, $\Delta = 0$, les intérêts de capitalisation sont égaux aux intérêts simples ;

si $n < 1$, $\Delta < 0$, les intérêts de capitalisation sont inférieurs aux intérêts simples ;

enfin, si $n = 0$, $\Delta = 0$, les intérêts de capitalisation sont égaux aux intérêts simples ;

en généralisant même, si $n < 0$, on trouve que $\Delta > 0$.

Ce dernier cas correspond à l'escompte que l'on verra plus loin.

83. **Tables financières**. — Il a été publié par Violeine, Pereire, Arnaudeau, des tables financières donnant les valeurs des quantités $(1 + i)^n$ pour différentes valeurs de i et de n.

La variation des valeurs de i est de $^1/_8$ %, $^1/_6$ % ou $^1/_{10}$ %, suivant les tables, et n varie depuis 1 jusqu'à 100, et même 400 pour les petits taux.

84. **Interpolation dans les tables**. — Ces tables financières sont dites à double entrée, correspondant aux deux variables ordinaires i et n ; elles servent constamment, aussi est-il nécessaire d'indiquer une fois pour toutes, le principe de l'interpolation et les limites des erreurs.

85. **Principe de l'interpolation.** — Considérons une quantité dont la grandeur dépend de celle d'une seconde quantité, et supposons qu'on en connaisse les expressions pour certaines valeurs de cette dernière ; on peut se proposer de déterminer la grandeur de la première pour une valeur quelconque de la seconde en se servant de résultats déjà obtenus ; le problème qui consiste à effectuer ce calcul s'appelle *interpolation* ou *extrapolation* suivant qu'il s'agit de faire des calculs entre les limites connues ou hors de ces limites.

Si l'on considère une fonction $f(x)$, on sait que la formule du développement différentiel de Newton donne, en représentant par $\Delta f(x_0)$, $\Delta^2 f(x_0)$ ..., les différences calculées en prenant les valeurs successives $f(x_0)$, $f(x_0+h)$, $f(x_0+2h)$, etc. :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{h}\Delta f(x_0)$$
$$+ \left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\frac{\Delta^2 f(x_0)}{1.2}$$
$$+ \left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-2\right)\frac{\Delta^3 f(x_0)}{1.2.3} + \dots$$

En général, on arrête ce développement au second terme :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{h}\Delta f(x_0).$$

Si l'on remarque que $\Delta f(x_0) = f(x_0+h) - f(x_0)$, on peut écrire
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Ainsi la formule de Newton limitée au second terme *exprime que les accroissements de la fonction sont proportionnels aux accroissements de la variable* ; en limitant ainsi le calcul on remplace la courbe représentative de la fonction $f(x)$ par une droite : cette approximation suffit souvent dans la pratique des calculs financiers comme on le verra dans les exemples qui suivront.

Si l'on prend un ou plusieurs termes de plus, l'interpolation est dite *parabolique*.

Dans le cas particulier de $\frac{x - x_0}{h} = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire si l'on doit calculer la valeur de la fonction pour une valeur de la variable, moyenne arithmétique entre deux valeurs de la table, la formule de Newton prend une forme particulièrement simple qu'il peut être bon de connaître :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2}\Delta f(x_0) - \frac{1}{8}\Delta^2 f(x_0) + \frac{1}{16}\Delta^3 f(x_0) \dots$$

Cette forme a été recommandée par M. Arnaudeau pour l'interpolation dans ses tables par dixièmes.

86. **Limite de l'erreur commise.**

1° *Interpolation proportionnelle.* — M. Vintéjoux a donné pour le calcul de la limite de l'erreur commise une méthode très élégante reposant sur la propriété suivante des fonctions :

Quand une fonction continue de x s'annule pour $x = x_0$ et $x = x_1$, on peut la représenter pour toute valeur de x comprise entre x_0 et x_1 par la formule :

$$f(x) = \frac{1}{2}(x - x_0)(x - x_1) f''(x'),$$

x' étant une valeur comprise entre x_0 et x_1.

Si l'on considère la fonction :

$$\varphi(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{h}\Delta f(x_0),$$

qui permet d'interpoler, par parties proportionnelles, la fonction $f(x)$ pour les valeurs comprises entre x_0 et x_1, on voit que l'erreur commise par ce calcul sera :

$$\varepsilon = f(x) - \varphi(x) = \theta(x).$$

Or cette fonction $\theta(x)$ s'annule pour $x = x_0$ et $x = x_1$,

car $$f(x_0) - f(x_0) - \frac{x_0 - x_0}{h}\Delta f(x_0) \equiv 0\ ;$$

et : $$f(x_1) - f(x_0) - \frac{x_1 - x_0}{h}[f(x_1) - f(x_0)] \equiv 0.$$

puisque $h = x_1 - x_0$.

Donc on peut écrire :

$$\theta(x) = \varepsilon = \frac{1}{2}(x - x_0)(x - x_1)[f''(x') - \varphi''(x')].$$

mais $\varphi(x)$ étant du premier degré en x, $\varphi''(x') = 0$, de telle sorte que l'erreur se réduit à :

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(x - x_0)(x - x_1)f''(x').$$

Le maximum de ε sera donné en remplaçant $f''(x')$ par son maximum M qui sera d'ailleurs le plus souvent $f''(x_1)$ ou $f''(x_0)$ dans les calculs financiers ordinaires.

Quant au maximum de $(x - x_0)(x - x_1)$, produit de deux facteurs dont la somme algébrique est constante et égale à h, il est égal à $\frac{h^2}{4}$; par suite le maximum de l'erreur commise dans l'interpolation proportionnelle est :

$$\frac{h^2}{8}\,\mathrm{M}.$$

Exemple. — *Quel est le maximum de l'erreur commise en interpolant dans les tables d'Arnaudeau pour un taux i compris entre 1,7 % et 1,6 %, si l'on calcule $(1 + i)^{120}$?*

La valeur de $\mathrm{M} = f''(x') = 120 \times 119 \times (1 + i)^{118}$, aura pour maximum : $\mathrm{M} = 120 \times 119 \times (1{,}017)^{118}$.

De plus h, différence entre 0,017 et 0,016, est égale à $\frac{1}{1000}$.

Donc :

$$\varepsilon < \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{(1000)^2} \times 120 \times 119 \times (1{,}017)^{118} < 0{,}013.$$

2° *Interpolation parabolique.* — Le théorème sur les fonctions indiqué plus haut peut être généralisé et la fonction qui représente l'erreur commise en s'arrêtant au troisième terme soit :

$$\varepsilon = f(x) - \left[f(x_0) + \frac{x - x_0}{h} \Delta f(x_0) + \left(\frac{x - x_0}{h}\right)\left(\frac{x - x_0}{h} - 1\right) \frac{\Delta^2 f x_0}{1 \cdot 2}\right],$$

peut être mise sous la forme :

$$\varepsilon = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} (x - x_0) (x - x_1) (x - x_2) f'''(x'),$$

x' étant compris entre x_0 et x_2.

En remplaçant x_1 par $x_0 + h$ et x_2 par $x_0 + 2h$, on a :

$$\varepsilon = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} (x - x_0) (x - x_0 - h) (x - x_0 - 2h) f'''(x').$$

Le maximum de $f'''(x')$ sera en général $f'''(x_0)$ ou $f'''(x_2)$; on le désignera par M.

Quant au maximum de

$$(x - x_0) (x - x_0 - h) (x - x_0 - 2h),$$

il s'obtient en prenant pour x l'une des racines de l'équation du second degré obtenue en égalant à zéro la dérivée de cette fonction, soit :

$$3(x - x_0)^2 - 6h(x - x_0) + 2h^2 = 0 ;$$

d'où :

$$x - x_0 = h\left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}}\right).$$

Les deux valeurs de x donnent la même valeur absolue à la fonction considérée, mais la plus petite seule correspond au maximum cherché :

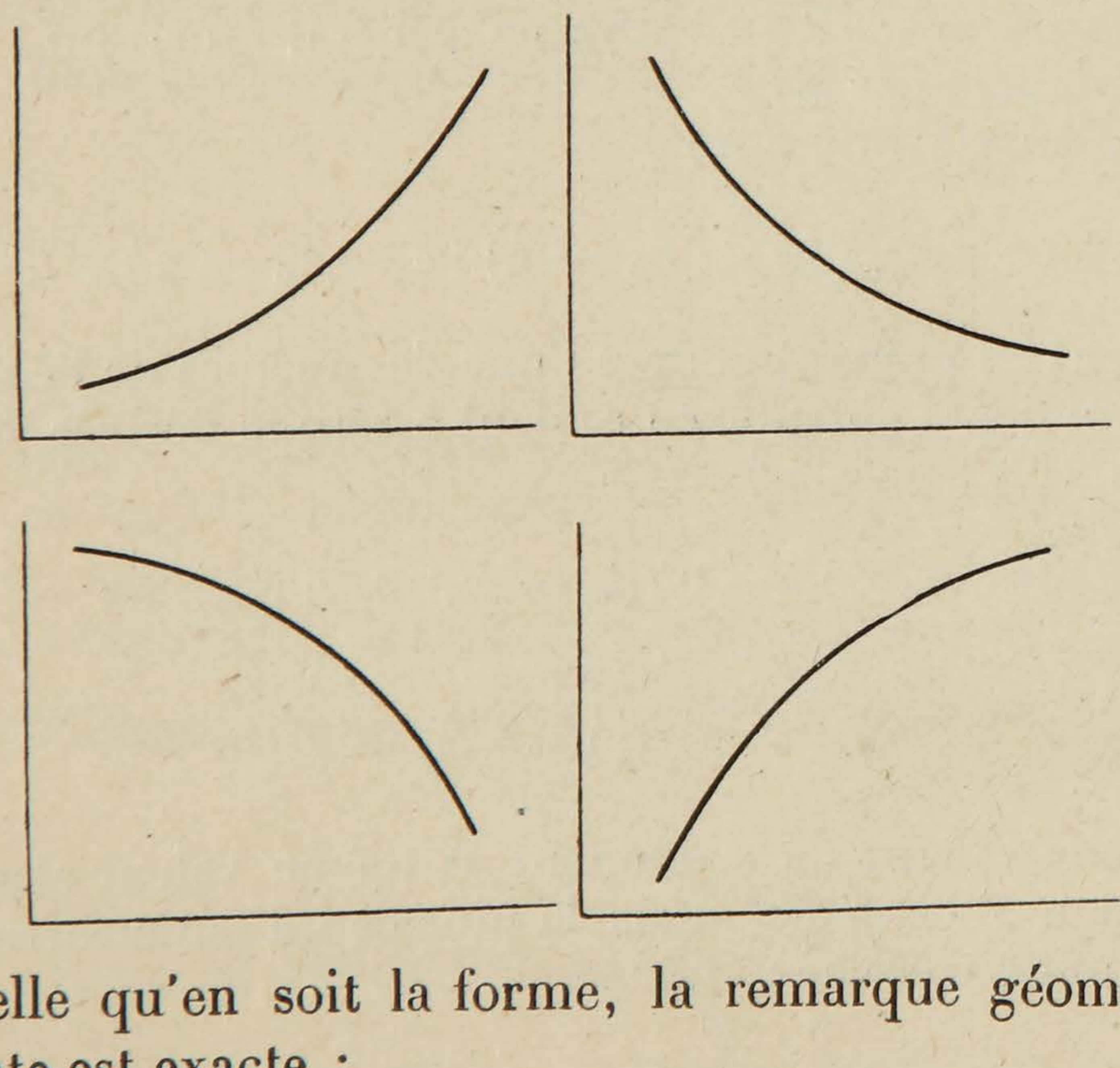
$$+ h^3\left(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}\right)\sqrt{\frac{1}{3}}\left(1 + \sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}} h^3 = \frac{2h^3\sqrt{3}}{9}.$$

Le maximum de l'erreur sera en définitive :

$$\varepsilon = \frac{1}{2\,.\,3}\,\frac{2h^3\sqrt{3}}{9}\,M = \frac{h^3\sqrt{3}}{27}\,M.$$

87. **Représentation géométrique de l'erreur. — Formule simplifiée.** — Les formules précédentes deviennent quelquefois un peu compliquées par suite de la fonction f'' qui intervient. M. Vintéjoux, remarquant que la plupart des fonctions employées en mathématiques financières affectent une forme régulière, a pu indiquer une limite de l'erreur très facile à calculer.

Toutes les fonctions que l'on étudiera par la suite se représentent graphiquement par des courbes dont les formes sont figurées ci-après :

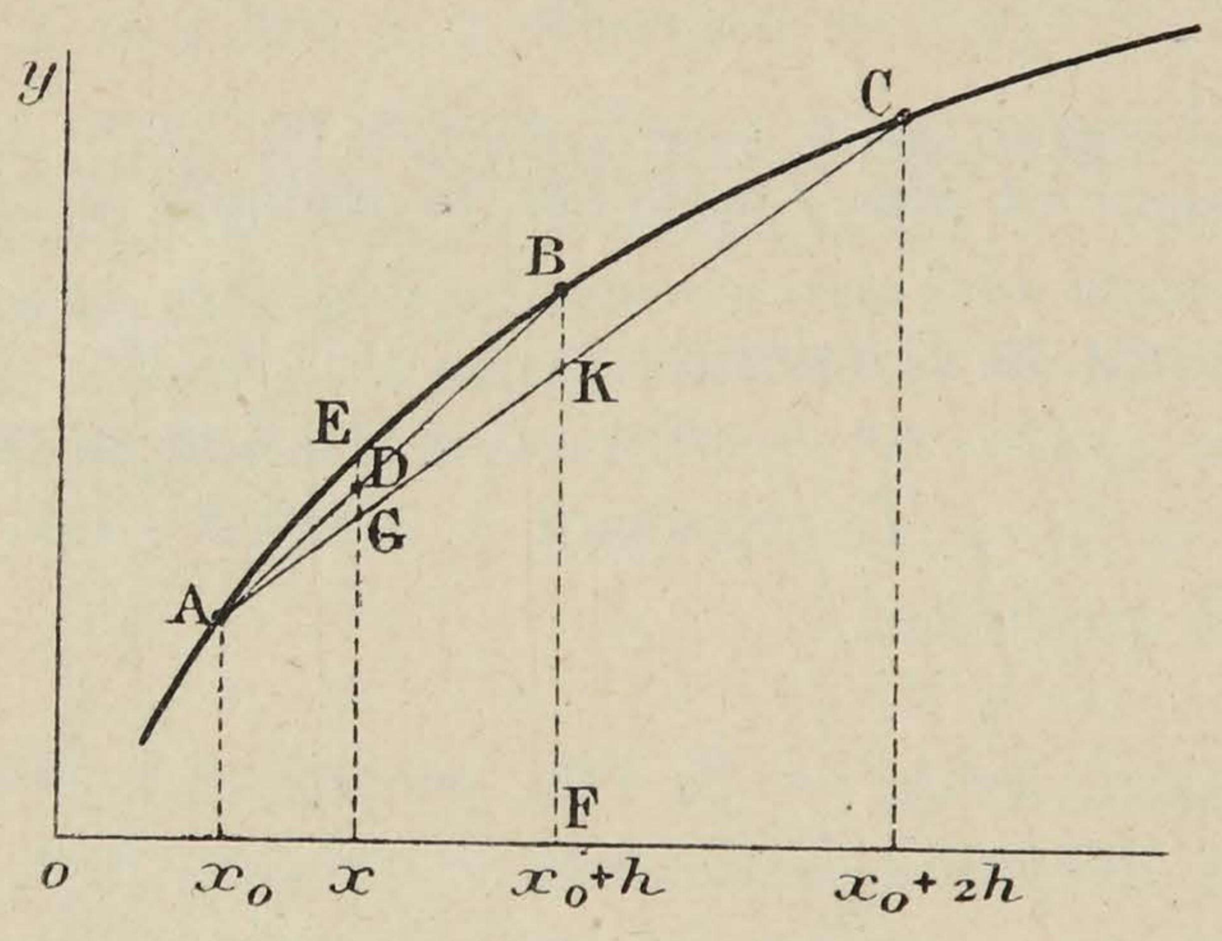


Quelle qu'en soit la forme, la remarque géométrique suivante est exacte :

Soient 3 abscisses x_0, $x_0 + h$, $x_0 + 2h$, correspondant aux points A,B,C ; l'interpolation proportionnelle entre x_0

et $x_0 + h$ conduirait à une valeur de la fonction figurée par le point D, et l'erreur serait ED.

La quantité h étant assez petite, la distance maximum entre un point de la courbe et la corde AC, comptée parallèlement à l'axe oy, sera celle correspondant au point médian B.



Il en résultera que : $BK > EG > ED$.

Or :

$$BK = BF - KF = f(x_0 + h) - \frac{f(x_0 + 2h) + f(x_0)}{2}.$$

En désignant par u_0, u_1, u_2 les quantités $f(x_0)$, $f(x_0 + h)$, $f(x_0 + 2h)$, on a donc en définitive en posant $ED = \varepsilon$:

$$\varepsilon < u_1 - \frac{u_2 + u_0}{2}.$$

Cette formule est toujours vraie *en valeur absolue*, quelle que soit la forme de la courbe.

Exemple. — *Quel est le maximum de l'erreur commise en cal-*

culant par interpolation $(1 + i)^{120}$ *dans les tables d'Arnaudeau pour un taux compris entre* 1,7 %, *et* 1,6 %?

Si l'on calcule : $(1 + i)^{120}$

On a :
$$(1{,}015)^{120} = 5{,}9693\ ;$$
$$(1{,}016)^{120} = 6{,}7181\ ;$$
$$(1{,}017)^{120} = 7{,}5599\ ;$$
$$\varepsilon < 6{,}7181 - \frac{7{,}5599 + 5{,}9693}{2} < 0{,}0465.$$

En fait l'erreur est < 0,013, comme on l'a vu plus haut, mais le calcul est plus simple par la méthode géométrique.

88. **Étude de la formule** $A = a(1 + i)^n$. — La formule $A = a(1 + i)^n$ constitue une relation entre 4 quantités, A, a, i, n. Connaissant 3 d'entre elles, on peut trouver la quatrième.

89. **Calcul de A.** — Si l'on possède une table financière, on calculera facilement le produit $a(1 + i)^n$, en supposant que i soit un des taux de cette table ; on pourrait, dans le cas contraire, interpoler par parties proportionnelles pour obtenir un résultat approché ; si, de plus, n n'est pas entier, il faudra recourir à la table donnant la capitalisation fractionnée : il est très rare que, pratiquement, on soit obligé de considérer une fraction d'année inférieure à une quinzaine ou un mois.

On pourrait aussi, dans ce dernier cas, interpoler entre les valeurs de n comprenant la valeur donnée.

Exemple I. — *Quelle est la valeur acquise par la capitalisation de* 4.382 fr. *placés pendant* 3 *ans* 3 *m. à* 4 %?

a. Calcul direct.

On trouve :
$$(1{,}04)^3 = 1{,}124864,$$
$$(1{,}04)^{3/12} = 1{,}00985341,$$

donc $A = 4382 \times 1{,}124864 \times 1{,}00985341 = 4.977{,}72.$

b. Calcul par interpolation.

$$(1{,}04)^3 = 1{,}124864,$$
$$(1{,}04)^4 = 1{,}16985856.$$

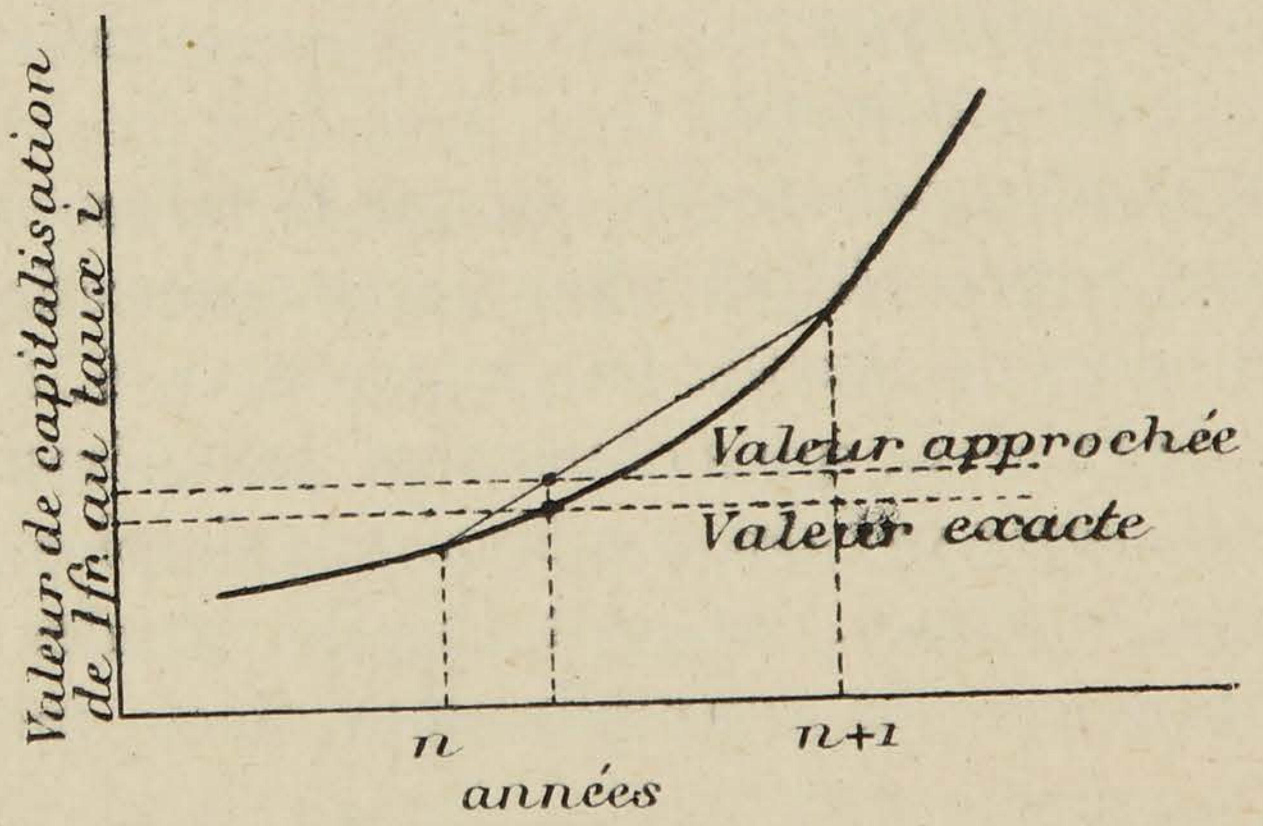
La valeur de capitalisation de 1 fr. après 3 ans 1/4 sera :

$$1{,}124864 + \frac{1}{4}(1{,}16985856 - 1{,}124864) = 1{,}13611264\,;$$

d'où $\quad A = 4.382 \times 1{,}13611264 = 4.978$ fr. 45.

On voit qu'il faut négliger les centimes qui sont inexacts et se contenter de prendre $A = 4.978$ fr.

Le résultat de l'interpolation est trop fort, comme le faisait prévoir la forme de la courbe indiquant la variation de la valeur de capitalisation de 1 fr. à un taux donné après n, $(n+1)$ ... années.



Exemple II. — *Quelle est la valeur acquise par la capitalisation de* 4.382 fr. *au taux de* 3,45 % *après* 13 *ans* 3 *m.* ?

Le taux n'est pas dans les tables : certaines d'entre elles donnent les taux variant par 0,1 %, c'est-à-dire, 3,4 % et 3,5 % mais elles sont moins répandues que celles de Violeine, Pereire, etc.

Ces dernières permettent de comprendre le taux 3,45 entre $3\,{}^3/_8$ et $3\,{}^4/_8$, c'est-à-dire 3,375 et 3,5.

On calcule d'abord :

$$(1{,}03375)^{13\ 1/4} = 1{,}55240729,$$

puis : $$(1{,}035)^{13 \text{ ans } 3 \text{ m.}} = 1{,}57746465.$$

En interpolant ensuite comme précédemment :

$$(1{,}0345)^{13\ 1/4} = (1{,}03375)^{13\ 1/4}$$
$$+ \frac{75 \times (1{,}57746465 - 1{,}55240729)}{125} = 1{,}5674417.$$

et enfin : $A = 4.382 \times 1{,}56744170 = 6.868$ fr. 53, valeur trop élevée.

Si l'on ne possède pas de tables financières, on procède, soit en calculant directement les puissances successives de $1 + i$, soit par logarithmes.

On peut faire les $(n - 1)$ multiplications qui permettent d'arriver à la $n^{\text{ème}}$ puissance de $(1 + i)$. Ce procédé est particulièrement commode dans le cas d'une valeur simple de i, telle que 1, 2, 3, 4, 5, 6 %.

Si le taux n'est pas simple, ou que la valeur de n soit très grande, le procédé précédent devient impraticable.

Il suffit alors de calculer les puissances 2, 4, 8, 16, 32, 64, etc., de $(1 + i)$, qui s'obtiennent par élévations successives au carré ; par des combinaisons simples des puissances ainsi obtenues, on peut ensuite calculer $(1 + i)^n$ par un nombre de multiplications bien inférieur à $n - 1$.

Exemple. — *Calculer* $(1{,}04)^{90}$.

On calcule successivement :

$$\begin{aligned}
(1{,}04)^2 &= (1{,}04) \times (1{,}04) = b,\\
(1{,}04)^4 &= b \times b = c,\\
(1{,}04)^8 &= c \times c = d,\\
(1{,}04)^{16} &= d \times d = e,\\
(1{,}04)^{32} &= e \times e = f.\\
(1{,}04)^{64} &= f \times f = g,
\end{aligned}$$

On remarque que $90 = 64 + 26$;

or $26 = 16 + 8 + 2$;

donc
$$(1{,}04)^{90} = (1{,}04)^{64} \times (1{,}04)^{16} \times (1{,}04)^{8} \times (1{,}04)^{2}$$
$$= g \times e \times d \times b.$$

On fait ainsi 9 multiplications au lieu de 89.

Quelle que soit la valeur de n, la décomposition est toujours très simple et il suffit de quelques exemples pour arriver à trouver rapidement le mode de calcul le plus pratique.

On doit négliger les décimales à partir de la 10^e, ainsi qu'il a été dit précédemment, sauf dans le cas de calculs très précis ; mais il est rare que l'on ait besoin de plus de 12 décimales dans la pratique.

L'emploi des tables de logarithmes facilite les calculs, mais malheureusement elles ne peuvent être employées que dans le cas de travaux ne nécessitant pas plus de 8 chiffres exacts. Si l'on désire obtenir plus d'exactitude, on doit recourir aux logarithmes de Fédor Thoman, qui se calculent directement à l'aide de tables données dans la plupart des tables de logarithmes ordinaires. (Voir, par exemple, Dupuis, tables à 5 décimales.) On peut également se servir des tables dressées par M. Trignart : elles donnent les valeurs successives de $(1{,}0001)^n$ et permettent d'encadrer très rapidement une puissance quelconque relative à un taux également quelconque.

La formule
$$A = a(1 + i)^n$$
s'écrit :
$$\lg A = \lg a + n \lg (1 + i),$$
et le calcul par logarithmes se fait sans difficulté.

EXEMPLE. — *Quelle est la valeur acquise par la capitalisation de 4.382 fr. au taux de 3,45 % après 13 ans 3 mois ?*

$$A = 4.382 \times (1,034.5)^{13\,\text{ans}\,3\,\text{mois}} = 4.382 \times (1,0345)^{13,25}$$

$$\lg A = \lg 4.382 + 13,25 \lg 1,034.5$$

$\lg 4.382 =$	3,641.672.37	$\lg 1,034.5 = 0,014.730.50$	
$13,25 \lg 1,034.5 =$	0,195.179.13		
	3,836.851.50		
pour	3,836.849.26	$A_1 = 6.868,3$	$\Delta = 632$
	2.24		
pour	1.89,6 —		0,03

$$A = 6.868,33.$$

90. **Calcul de n.** — De $A = a(1 + i)^n$ on déduit :

$$\frac{A}{a} = (1 + i)^n.$$

Il suffit donc de calculer $\frac{A}{a}$ et de chercher dans les tables à quelle valeur de n correspond la quantité trouvée dans la colonne du taux i.

En général, on trouvera que cette valeur n'est pas exacte et que $\frac{A}{a}$ est compris entre $(1 + i)^{n_1} = A_1$ et

$$(1 + i)^{n_1+1} = A_2.$$

On interpolera proportionnellement, ce qui revient à admettre que la variation du capital $\frac{A}{a}$ est proportionnelle à la variation de n.

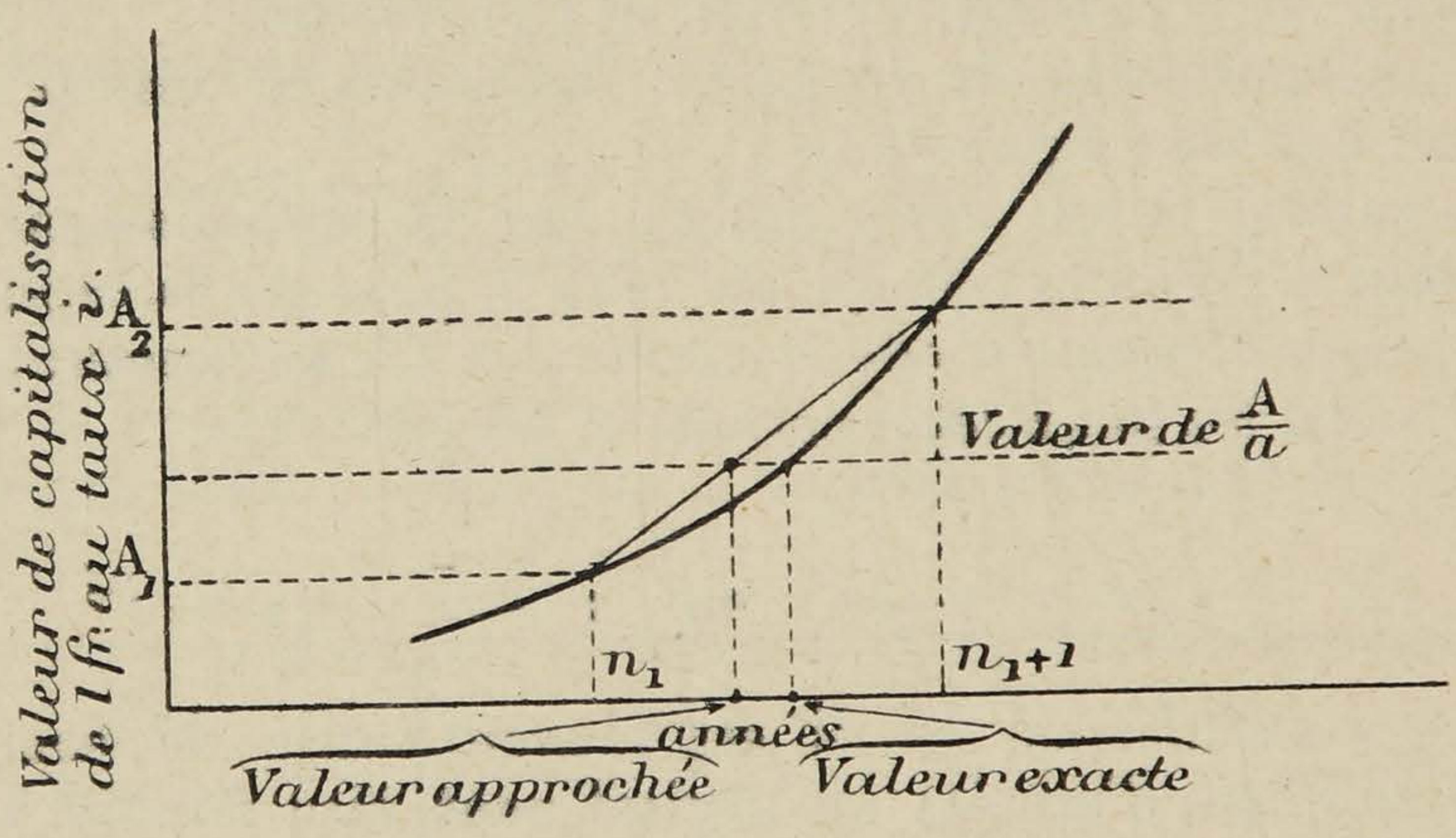
On écrira :

$$\frac{n - n_1}{n_1 + 1 - n_1} = \frac{\frac{A}{a} - A_1}{A_2 - A_1},$$

d'où

$$n = n_1 + \frac{\frac{A}{a} - A_1}{A_2 - A_1}.$$

La valeur obtenue sera nécessairement trop faible, comme le montre le graphique suivant, qui indique la forme de la courbe représentant la variation de la capitalisation de 1 franc au taux i, après n, $n + 1$ ... années.



EXEMPLE. — *Pendant combien de temps faut-il placer* 8.275 *fr. pour obtenir* 42.892 *fr. si le taux annuel de capitalisation est* 4 %?

On a : $\frac{A}{a} = \frac{42.892}{8.275} = 5{,}183.323.26.$

Dans Violeine on trouve au taux de 4 % que :

1 fr. placé pendant 41 ans devient 4,993.061.45 $= A_1$,
1 fr. » 42 ans » 5,192.783.91 $= A_2$,

l'application de la formule d'interpolation donnera :

$$n = 41 + \frac{5{,}183.323.26 - 4{,}993.061.45}{5{,}192.783.91 - 4{,}993.061.45} = 41 \text{ ans } 348 \text{ jours}.$$

Pratiquement, le calcul numérique de la fraction ne doit s'opérer qu'au millième près afin d'obtenir un nombre de jours exact à une unité près ; il est donc inutile de conserver tous les chiffres du numérateur et du dénominateur pour effectuer la division ; il suffit de garder 4 chiffres après la virgule :

$$\frac{0{,}190.3}{0{,}199{\cdot}7} = \frac{1.903}{1{\cdot}997} = 0{,}953 = 348 \text{ jours.}$$

Le nombre n se trouvera en général être fractionnaire de la forme $n + f$, n étant l'entier et f la fraction.

L'interprétation de la partie fractionnaire résulte de la notion des taux équivalents.

Le capital A est alors obtenu par la capitalisation de a pendant n périodes pleines au taux i, puis par la capitalisation pendant une période fractionnaire f à un certain taux x équivalent à i pour cette période et tel que

$$1 + i = (1 + x)^{\frac{1}{f}} \quad \text{ou} \quad 1 + x = (1 + i)^{f}.$$

Cas particuliers. — Il est souvent utile de connaître après combien d'années un capital peut être doublé, triplé.

Pratiquement, il suffit de connaître approximativement la valeur de n qui correspond à ces cas particuliers.

La formule logarithmique donne, en adoptant les logarithmes népériens :

$$\text{L nep.}\left(\frac{A}{a}\right) = n\text{L nep.}\ (1 + i),$$

d'où :

$$n = \frac{\text{L nep.}\left(\frac{A}{a}\right)}{\text{L nep.}(1 + i)}\ ; \quad \text{or} \quad \text{L nep.}(1 + i) = i - \frac{i^2}{2} + \frac{i^3}{3} - \ldots,$$

$$n = \frac{\text{L nep.}\left(\frac{A}{a}\right)}{i - \frac{i^2}{2} + \frac{i^3}{3} - \ldots} > \frac{\text{L nep.}\left(\frac{A}{a}\right)}{i}.$$

On aurait aussi

$$n < \frac{\text{L nep.} \frac{A}{a}}{i} \left(1 + \frac{i}{2}\right).$$

L'erreur commise par défaut est moindre que $\frac{\text{L nep.} \frac{A}{a}}{2}$.

Si l'on remplace $\frac{A}{a}$ par p, on aura donc $n = \frac{\text{L nep.} p}{i}$; le calcul de Lp peut se faire en partant du logarithme ordinaire lg p en remarquant que :

$$\begin{aligned} \text{L nep.}\, p &= \text{L nep.}\ 10 \times \lg p \\ &= 2{,}302.585.092.9 \dots \times \lg p. \end{aligned}$$

Exemple. — *Au bout de combien de temps un capital devient-il deux, trois, ... neuf, dix fois plus grand par la capitalisation ?*

p	3 %		4 %		5 %	
	MINIM. $\frac{Lp}{i}$	MAXIMUM $\frac{Lp}{i}\left(1+\frac{i}{2}\right)$	MINIM. $\frac{Lp}{i}$	MAXIMUM $\frac{Lp}{i}\left(1+\frac{i}{2}\right)$	MINIM. $\frac{Lp}{i}$	MAXIMUM $\frac{Lp}{i}\left(1+\frac{i}{2}\right)$
2	23,1	23,4	17,3	17,6	13,9	14,2
3	36,6	37,1	27,5	28,1	22	22,6
4	46,2	46,9	34,7	35,4	27,7	28,4
5	53,6	54,4	40,2	41	32,2	33
6	59,7	60,6	44,8	45,7	35,8	36,7
7	64,9	65,9	48,6	49,6	38,9	39,9
8	69,3	70,3	52	53	41,6	42,6
9	73,2	74,3	54,9	56	43,9	45
10	76,8	78	57,6	58,8	46,1	47,3

91. **Calcul de** i. — 1° *Par les tables financières.*

On calcule d'abord le quotient $\frac{A}{a}$, puis on cherche dans les tables, pour la période de capitalisation n, les deux valeurs $A_1 = (1 + i_1)^n$ et $A_2 = (1 + i_2)^n$, qui comprennent le quotient trouvé.

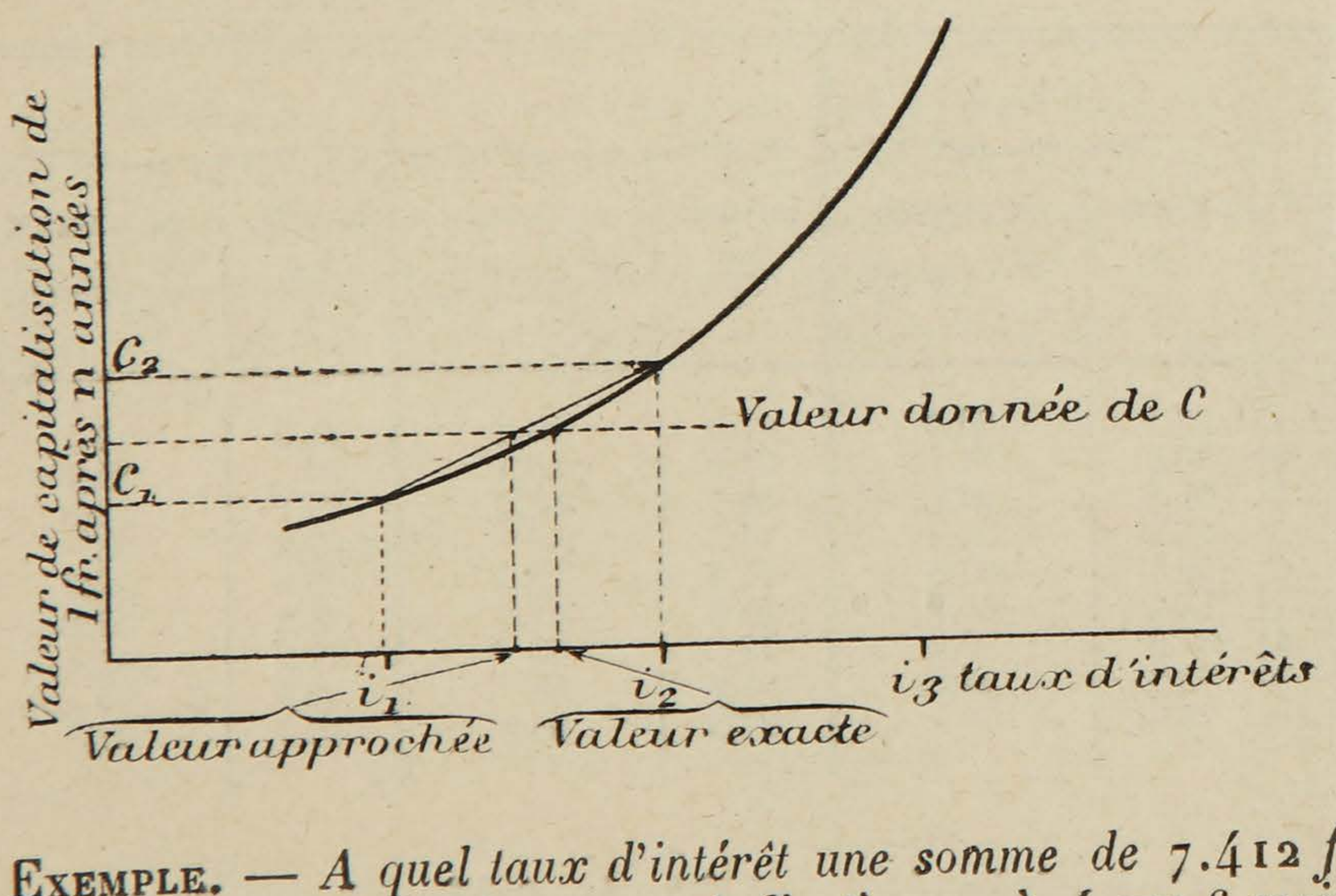
En admettant la proportionnalité de la variation des capitaux définitifs aux variations des taux, on obtient l'égalité :

$$\frac{i - i_1}{i_2 - i_1} = \frac{\frac{A}{a} - A_1}{A_2 - A_1},$$

qui permet d'avoir une valeur approchée de i :

$$i = i_1 + (i_2 - i_1)\,\frac{\frac{A}{a} - A_1}{A_2 - A_1}.$$

Le graphique suivant montre que la valeur trouvée est toujours trop faible.



Exemple. — *A quel taux d'intérêt une somme de 7.412 fr. deviendra-t-elle 8.913 fr. par capitalisation après 4 ans 6 mois ?*

On a :

$$\frac{A}{a} = \frac{8.913}{7.412} = 1{,}202.509.44.$$

Les tables permettent de dresser le tableau suivant donnant $(1 + i)^n$.

DURÉE	4 1/8	4 1/4	4 3/8
4 ans	1,175 493 03	1,181 147 83	1,186 823 00
5 ans	1,223 982 12	1,231 346 61	1,238 716 51

Par simple interpolation proportionnelle on constate de suite que la valeur de $(1 + i)^{4,5}$ sera inférieure à :

$$\frac{1{,}175 + 1{,}224}{2} = \frac{2{,}399}{2} = 1{,}199 \text{ pour } 4\ ^1/_8,$$

$$\frac{1{,}181 + 1{,}231}{2} = \frac{2{,}412}{2} = 1{,}206 \text{ pour } 4\ ^1/_4,$$

$$\frac{1{,}186 + 1{,}239}{2} = \frac{2{,}425}{2} = 1{,}212 \text{ pour } 4\ ^3/_8,$$

donc le taux x est compris entre 4 $^1/_8$ et 4 $^1/_4$.

On calcule ensuite les valeurs réelles de capitalisation après 4 ans 6 mois pour ces deux taux

4 $^1/_8$ $$(1{,}041.25)^4 \times (1{,}041.25)^{1/2} =$$
$$= 1{,}175.493.03 \times 1{,}020.416.58 = 1{,}199.492.58,$$

4 $^1/_4$ $$(1{,}042.5)^4 \times (1{,}042.5)^{1/2} =$$
$$= 1{,}181.147.83 \times 1{,}021.028.89 = 1{,}205.986.06,$$

d'où enfin par interpolation proportionnelle

$$i = 0{,}041.25 +$$
$$+ (0{,}042.50 - 0{,}041.25)\frac{1{,}202.509.44 - 1{,}199.492.58}{1.205.986.06 - 1{,}199.492.58}$$
$$i = 0{,}041.25 + 0{,}000.581 = 0{,}041.831.$$

Il est inutile de pousser le calcul plus loin que le 6ème chiffre décimal, car le résultat obtenu ne peut être plus exact à raison de l'interpolation proportionnelle effectuée : en général, ce résultat est suffisamment approché dans la pratique des calculs.

2° *Par les tables de logarithmes.*

On tire de la formule :

$$A = a(1 + i)^n$$

$$\lg A = \lg a + n \lg (1 + i),$$

d'où :

$$\lg (1 + i) = \frac{\lg A - \lg a}{n}.$$

Il est peut-être utile de rappeler que l'on a approximativement :

$$\lg 1{,}03 = 0{,}013,$$
$$\lg 1{,}035 = 0{,}015,$$
$$\lg 1{,}04 = 0{,}017,$$
$$\lg 1{,}045 = 0{,}019,$$
$$\lg 1{,}05 = 0{,}021,$$
$$\lg 1{,}055 = 0{,}023,$$
$$\lg 1{,}06 = 0{,}025.$$

Il est facile de se souvenir de la suite de ces termes : une variation de 0,5 % dans le taux correspond à une variation de 0,002 dans le logarithme correspondant, et le logarithme de 1,03 est représenté par 0,013, qui comprend les mêmes chiffres significatifs que 1,03.

CHAPITRE II

ESCOMPTE A INTÉRÊTS COMPOSÉS

92. **Calcul de a. Valeur actuelle.** — De la formule

$$A = a(1 + i)^n \quad \text{on tire :} \quad a = \frac{A}{(1 + i)^n}.$$

La quantité a s'appelle la *valeur actuelle* de la somme A, supposée payable dans n périodes, le taux d'intérêt de capitalisation étant i.

C'est la somme qu'il faut placer pendant ce temps au taux i pour obtenir A.

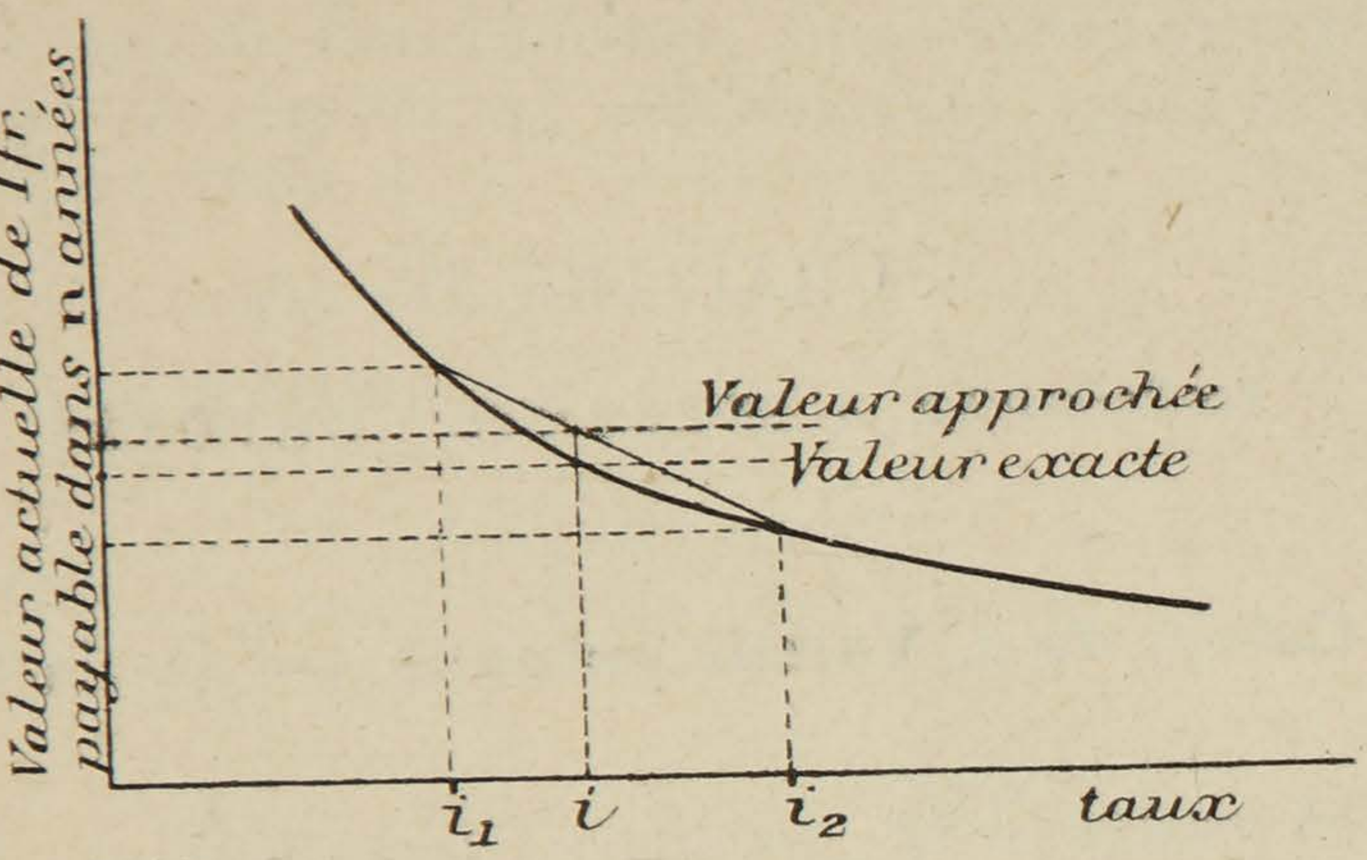
On écrit souvent :

$$a = \frac{A}{(1 + i)^n} = A(1 + i)^{-n},$$

mais cette expression simplifie rarement l'exposé — nous la notons seulement pour mémoire.

Il existe des tables financières donnant les inverses des valeurs $(1 + i)^n$ et permettant d'obtenir a par une multiplication au lieu d'une division.

Les calculs d'interpolation se font comme il a été indiqué précédemment ; la valeur obtenue par l'interpolation proportionnelle, quand le taux i n'est pas dans les tables, est trop forte, comme le montre le graphique ci-après qui donne la forme de la courbe des valeurs actuelles de 1 franc payable dans n années et à divers taux.



Par logarithmes, le calcul de a se ferait par la formule :

$$\lg a = \lg A - n \lg (1 + i).$$

93. **Escompte à intérêts composés.** — a étant la valeur actuelle de A, payable dans n périodes, l'escompte retenu, calculé à intérêts composés, sera :

$$e = A - a = A - \frac{A}{(1+i)^n} = A \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n}.$$

94. **Comparaison avec l'escompte à intérêts simples en dehors et en dedans.** — La formule précédente peut s'écrire :

$$\begin{aligned} e &= A - A(1+i)^{-n} \\ &= A - A\left(1 - ni + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} i^2 - \dots\right) \\ &= Ani - A \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} i^2 + \dots < Ani, \end{aligned}$$

quel que soit n ; l'escompte à intérêts composés est donc toujours inférieur à l'escompte en dehors Ani quel que soit n.

La formule peut aussi s'écrire :

$$e = A - \frac{A}{(1+i)^n} = A - \frac{A}{1 + ni + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} i^2 + \ldots}.$$

Si $n > 1$, on a $e > A - \frac{A}{1+ni}$, c'est-à-dire plus grand que l'escompte en dedans : $A - \frac{A}{1+ni}$.

Si $n = 1$, $e = A - \frac{A}{1+ni}$, c'est-à-dire égal à l'escompte en dedans.

Enfin si $n < 1$, $e < A - \frac{A}{1+ni}$, (car le troisième terme du dénominateur est négatif), c'est-à-dire plus petit que l'escompte en dedans.

En résumé, en représentant par e l'escompte à intérêts composés, et par a la valeur actuelle de A, et en désignant par e_1, e_2 les escomptes en dehors et en dedans, et a_1, a_2 les valeurs actuelles correspondantes, on peut dresser le tableau suivant :

$n < 1$	$e_1 > e_2 > e$	$a_1 < a_2 < a$
$n = 1$	$e_1 > e = e_2$	$a_1 < a = a_2$
$n > 1$	$e_1 > e > e_2$	$a_1 < a < a_2$

Exemple. — *Quelle est la valeur actuelle d'une somme de 8.792 fr., payable dans 3 ans 4 mois, si le taux est 4 %?*

Emploi des logarithmes.

$$\lg a = \lg 8.792 - \left(3 + \frac{1}{3}\right) \lg 1{,}04.$$

D'où : $a = 7.714$ fr. 54.

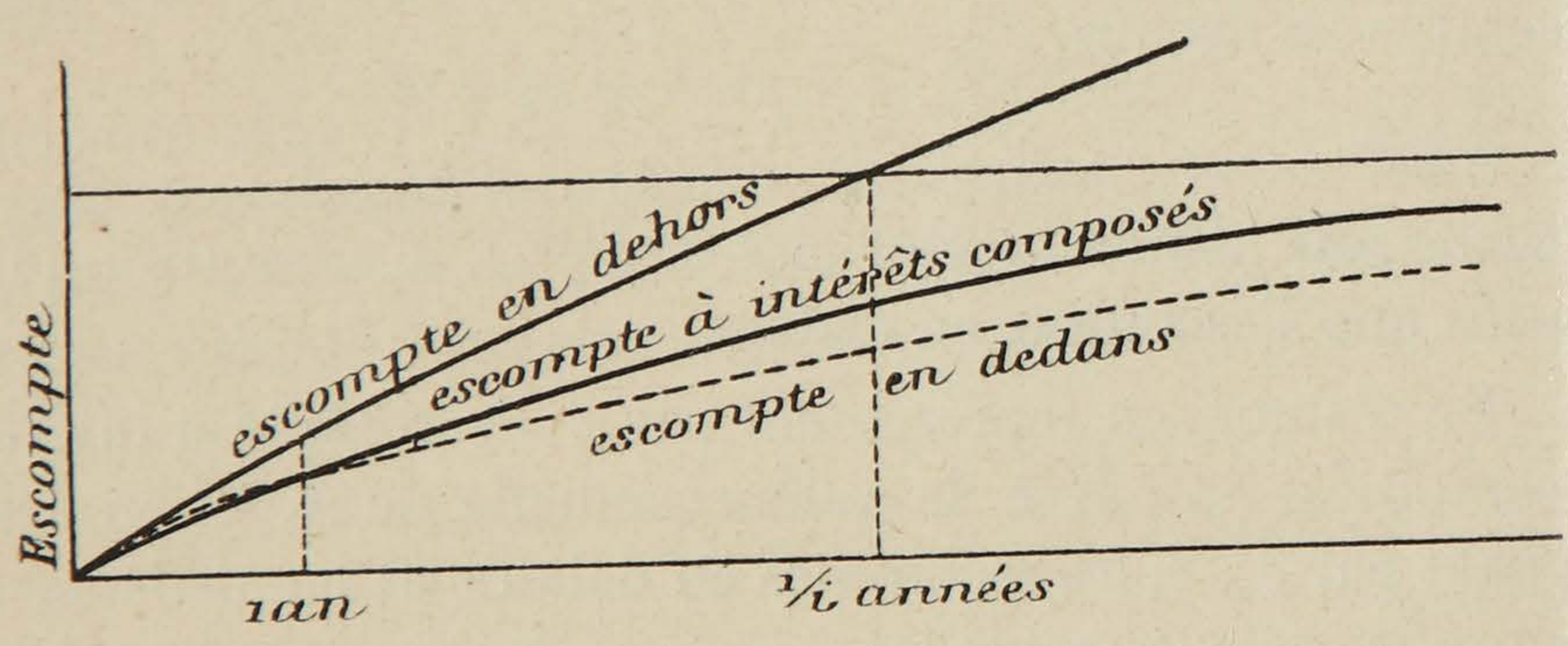
L'escompte en dehors donnerait :

$$a_1 = 8.792\,(1 - 3{,}333\ldots \times 0{,}04) = 7.619{,}73\,;$$

avec l'escompte en dedans on trouverait :

$$a_2 = \frac{8.792}{1+3{,}33\ldots \times 0{,}4} = 7.757{,}65.$$

Le graphique suivant montre la forme des courbes représentant les variations des trois escomptes pour un taux donné, d'après les périodes, et pour 1 franc de capital.



CHAPITRE III

COMPTE COURANT A INTÉRÊTS COMPOSÉS

95. **Capitalisation des intérêts.** — Dans l'exposé relatif aux comptes courants à courte période, on s'est arrêté à la fin d'une période, d'ailleurs quelconque, après l'imputation au débit ou au crédit des intérêts, sans se préoccuper de ce qui arrive si l'opération se continue sans interruption pendant plusieurs périodes.

On voit de suite que les intérêts, ayant été compris dans le solde, sont repris à nouveau et portent intérêts pendant la période suivante : *il y a donc capitalisation des intérêts pour tous comptes courants ordinaires.*

96. **Compte d'une dette et de ses remboursements.** — Soit une dette de valeur A portée au débit d'un compte courant au commencement d'une période ; à la fin de cette période, il sera dû $A(1+i)$, et si l'on rembourse une somme a, le solde sera : $A(1+i)-a$.

Ce solde rapportant intérêt au profit du créancier pendant un an deviendra :

$$[A(1+i)-a](1+i) = A(1+i)^2 - a(1+i).$$

Si l'on rembourse une somme b à la fin de la seconde période, le solde sera : $A(1+i)^2 - a(1+i) - b$, et ainsi de suite, de sorte que, après n remboursements supposés également espacés, $a, b, \dots k, l$, le solde sera :

$$S = A(1+i)^n - a(1+i)^{n-1} - b(1+i)^{n-2} \\ - c(1+i)^{n-3} \dots - k(1+i) - l.$$

97. **Cas particulier de remboursements égaux.** — Si $a = b = c \ldots = l$, on a :

$$S = A(1+i)^n - a[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \ldots + (1+i) + 1]$$

$$= A(1+i)^n - a\frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Ce solde comprend deux parties :

1° $A(1+i)^n$, qui représente le capital que possèderait le prêteur s'il avait conservé son numéraire placé au taux i pendant n années ;

2° $a\frac{(1+i)^n - 1}{i}$, somme des valeurs obtenues, avec intérêts composés par les remboursements successifs placés au taux i jusqu'à l'époque considérée depuis leur payement.

On peut établir cette dernière somme d'une manière très simple à l'aide d'un raisonnement purement arithmétique qui nous a été signalé par M. Kakosky :

Pour se libérer intégralement d'une somme de 1 franc empruntée pour n années, on peut : soit payer l'intérêt i tous les ans et le capital 1 franc à l'expiration de la période convenue, soit payer en une seule fois à la fin de cette période $(1+i)^n$. La différence $(1+i)^n - 1$ représente donc la valeur capitalisée des intérêts i payés chaque année; la valeur capitalisée d'un payement annuel de 1 franc sera $\frac{1}{i}$ fois plus grande, soit :

$$\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

on retrouve la formule indiquée.

98. **Annuités de placement.** — La quantité

$$a \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

s'appelle quelquefois *somme d'annuités de placement.*

Il faut bien faire attention qu'elle représente la somme de valeurs définitives d'annuités au moment même du payement de la dernière annuité.

Si le compte de placement n'est arrêté que p années après le dernier placement, la valeur acquise est alors :

$$a \frac{(1+i)^n - 1}{i} (1+i)^p.$$

Les tables financières en usage donnent généralement la valeur de

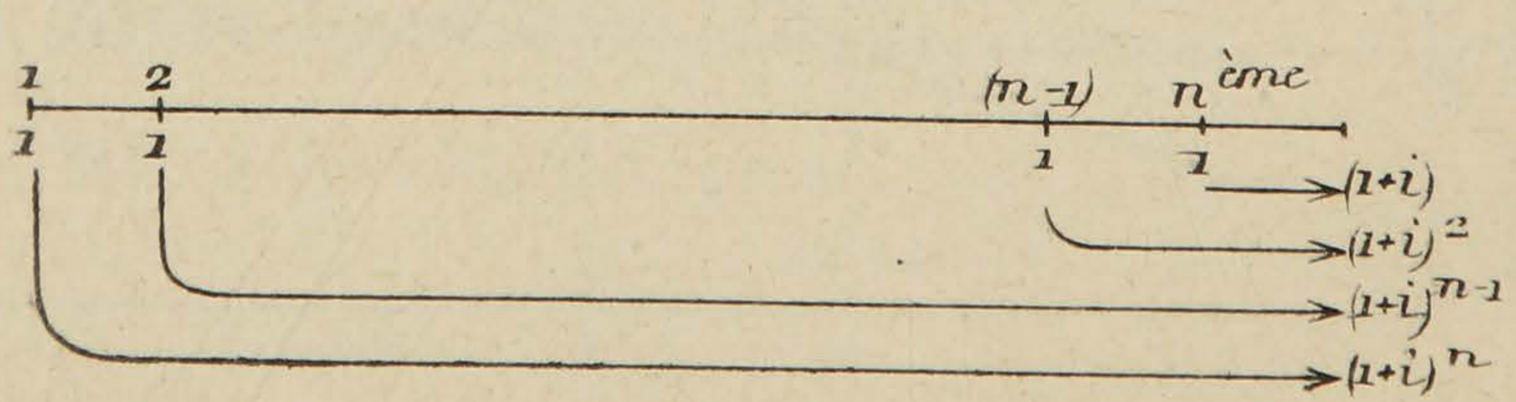
$$\frac{(1+i)^n - 1}{i} (1+i),$$

arrêtant ainsi le compte des intérêts un an après le dernier payement.

Ces tables s'établissent par le simple cumul des tables de puissances, puisque :

$$\frac{(1+i)^n - 1}{i} (1+i) = [(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \dots + 1](1+i) = (1+i)^n + (1+i)^{n-1} + \dots + (1+i).$$

L'échelle suivante montre le cumul des capitaux successifs :



Exemple. — *Quelle est la valeur acquise immédiatement après le dernier placement de 25 termes annuels de 3.464 fr. chacun, si le taux de capitalisation est 3,88 %?*

1° *Par les tables financières.*

Le taux de 3,88 % non indiqué dans les tables se trouve compris entre 3,875 % et 4 % ;

Pour 3,875 %, la valeur définitive de 25 payements de 1 fr. est 40,951.686.08

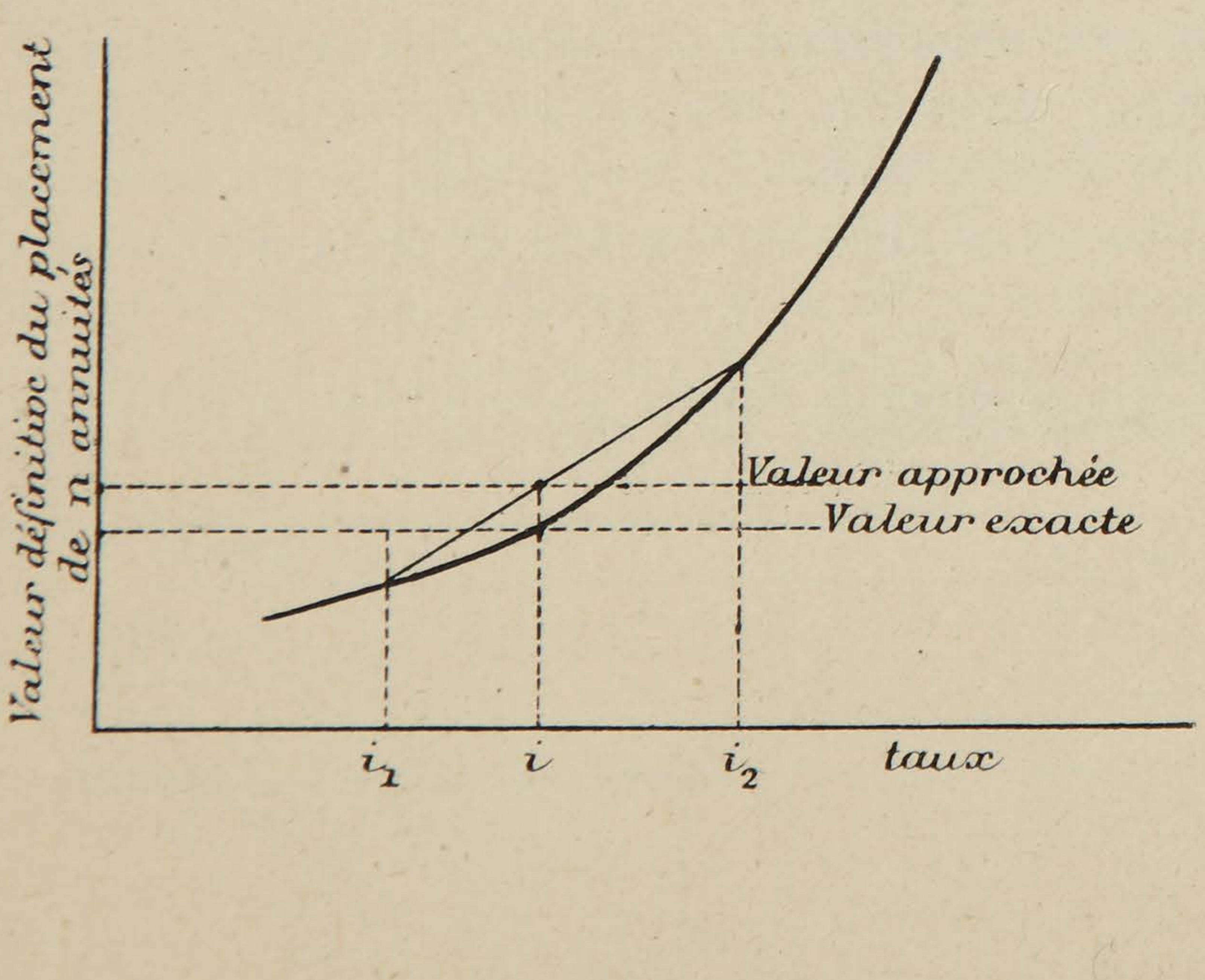
Pour 4 % 41,645.908.29

Par interpolation proportionnelle, on aura la valeur de capitalisation au taux 3,88 :

$$x = 40{,}979.454.97.$$

La valeur acquise par le placement annuel de 3.464 fr. sera par suite $3.464 \times 40{,}979.454.97 = 141.953$.

Ce résultat, obtenu par interpolation proportionnelle, est trop fort, comme le montre le graphique suivant qui donne la forme de la courbe représentant la variation de la valeur définitive de n placements égaux quand le taux varie.



2° *Par logarithmes.*

Par logarithmes, on aurait :

$$x = 3.464 \times \frac{\overline{1{,}0388}^{25} - 1}{0{,}0388};$$

d'où $\lg x = \lg 3.464 + \lg\left(\overline{1{,}0388}^{25} - 1\right) - \lg 0{,}0388.$

Pour effectuer ce calcul, on dispose les opérations comme il suit :

$$\begin{aligned}
\lg 1{,}0388 &= 0{,}016.531.94\\
25 \lg 1{,}0388 &= 0{,}413.298.5\\
(1{,}0388)^{25} &= 2{,}589.992\\
\overline{1{,}0388}^{25} - 1 &= 1{,}589.992\\
\lg\left[\overline{1{,}0388}^{25} - 1\right] &= 0{,}201.394.93.
\end{aligned}$$

On a par suite

$$\begin{array}{rll}
\lg 3.464 = & 3{,}539.577.88 = & 3{,}539.577.88\\
\lg\left[\overline{1{,}0388}^{25} - 1\right] = & 0{,}201.394.93 = & 0{,}201.394.93\\
-\lg 0{,}0388 = - & \bar{2}{,}588.831.73 = & 1{,}411.168.27\\
\hline
\lg x = & 5{,}152.141.08 = & 5{,}152.141.08\\
x = & 141.952 \text{ fr.} &
\end{array}$$

Le calcul de $\lg[(1+i)^n - 1]$ nécessite quelque attention ; comme on l'a vu précédemment, on doit d'abord calculer $\lg(1+i)$, puis $n \lg(1+i)$, dont on a besoin dans l'équation ci-dessus. On cherche ensuite le nombre $(1+i)^n$ dont on a le logarithme. On soustrait une unité et l'on calcule enfin le logarithme de ce nouveau nombre

$$(1+i)^n - 1.$$

99. **Étude du solde du compte courant.** — On a :

$$\begin{aligned}
S &= A(1+i)^n - a(1+i)^{n-1} - a(1+i)^{n-2} \dots - a\\
&= A(1+i)^n - a\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}.
\end{aligned}$$

Ce solde aurait pu être obtenu en considérant deux comptes séparés du crédit et du débit, et en capitalisant les sommes portées, savoir :

Au crédit : A à l'origine, qui serait devenu :

$$A(1 + i)^n.$$

Au débit : a à la fin de la première année et successivement a à la fin de chaque année ; le total de ces sommes et de leurs intérêts aurait bien donné :

$$a(1 + i)^{n-1} + \ldots + a = a\,\frac{(1 + i)^n - 1}{i}.$$

Trois cas peuvent se présenter relativement au solde :

S est positif : La somme A n'est pas entièrement remboursée, et il reste dû le solde S ; on examinera plus loin ce cas lors du calcul des amortissements : S représentera le capital restant à rembourser sur A.

S est nul : La somme A est intégralement remboursée par le payement d'une somme périodique a, qui prend le nom d'annuité, de semestrialité, mensualité, suivant la périodicité.

S est négatif : La somme A a été remboursée, et il s'est accumulé des capitaux au crédit du compte.

CHAPITRE IV

CALCULS RELATIFS AUX ANNUITÉS

100. **Formule de remboursement.** — Lorsque le compte courant se solde par zéro, la formule qui établit cette relation permet de résoudre la question suivante :

Quelle somme a faut-il payer à la fin de n périodes consécutives pour rembourser un capital A productif d'intérêts au taux i, prêté une période pleine avant le premier remboursement ?

L'égalité $A(1+i)^n = a\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$ donne immédiatement :

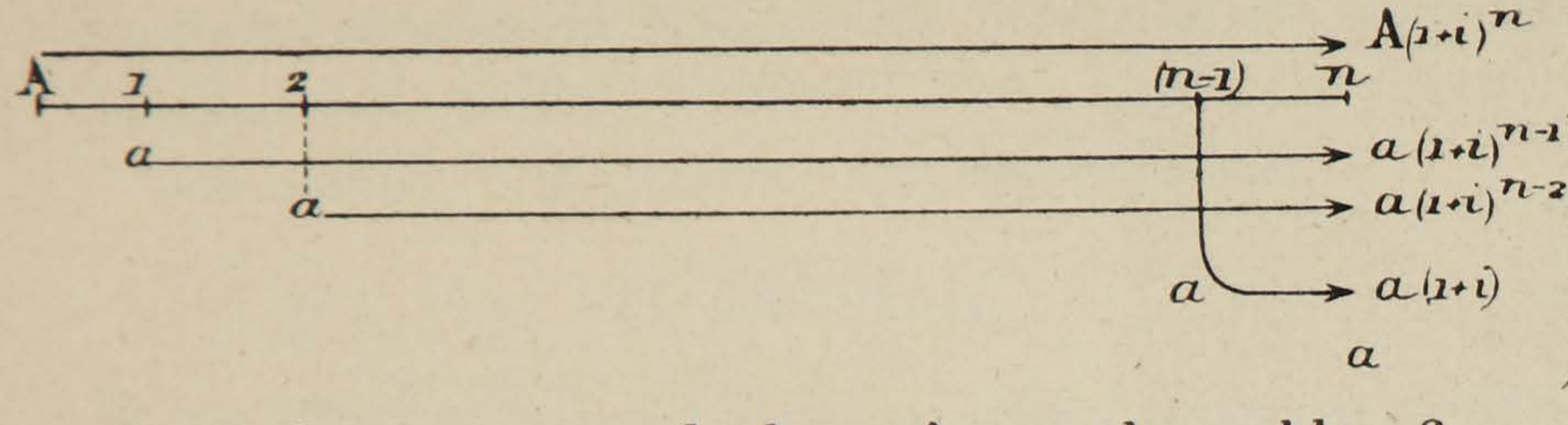
$$a = A\,\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}.$$

C'est la formule fondamentale de la théorie des annuités.

Elle donne une relation entre quatre quantités a, A, i, n. Elle permet de calculer l'une quelconque d'entre elles, connaissant les trois autres.

a représente l'annuité à payer à terme échu pour rembourser A ; c'est la somme qui, placée périodiquement et à intérêts composés à la fin de chaque période, reconstitue le capital $A(1+i)^n$ que l'on aurait obtenu si l'on avait conservé le capital A au lieu de le prêter.

Le schéma suivant indique le sens de cette égalité.



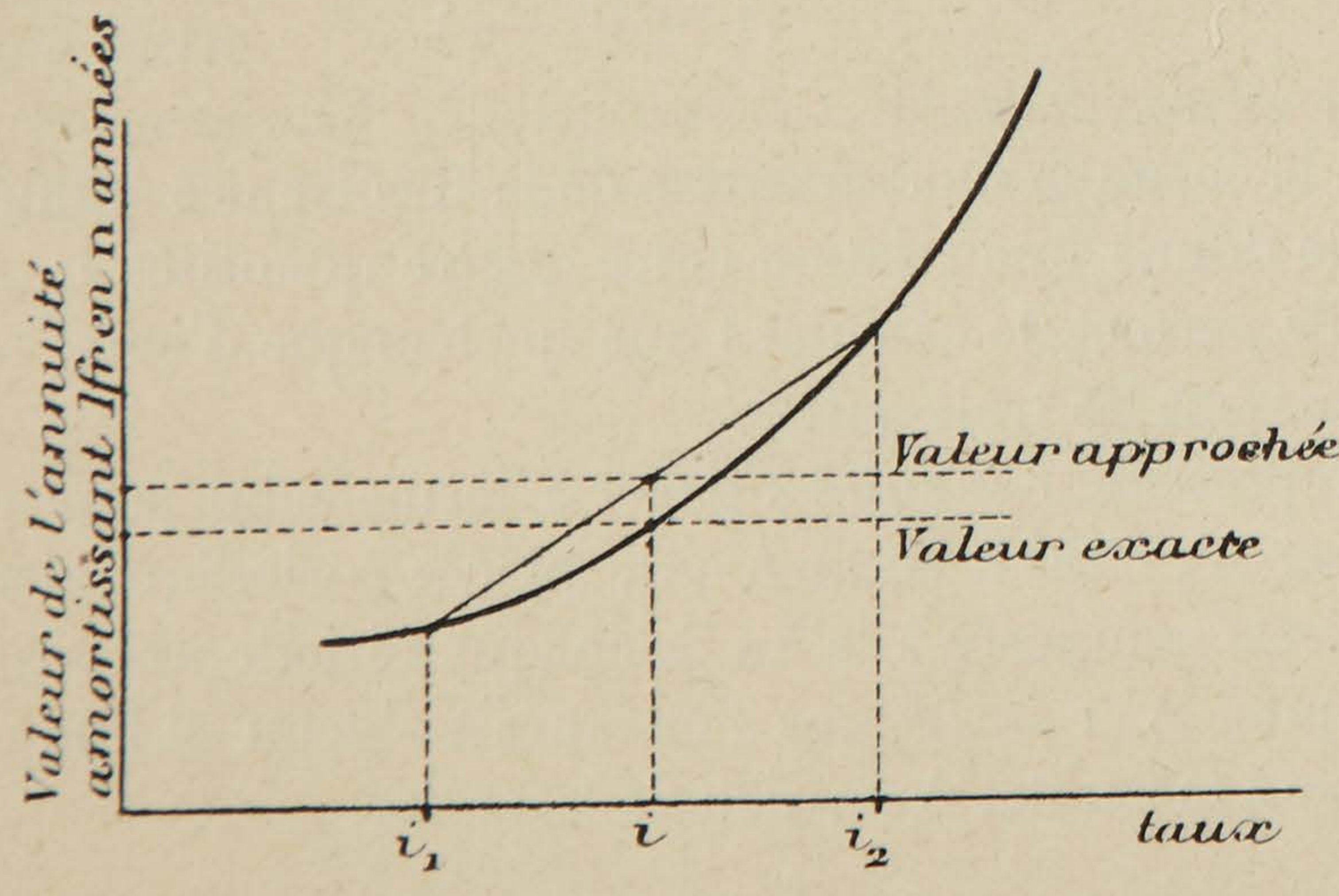
L'annuité peut se calculer soit par les tables financières, soit par logarithmes.

1° *Par les tables financières.*

On a établi des tables donnant pour les divers taux la valeur de l'annuité remboursant 1 franc en n périodes, c'est-à-dire la valeur de $\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$.

On lira le résultat dans les tables si le taux i est l'un de ceux pour lesquels les calculs ont été effectués ; sinon, on interpolera ainsi qu'on l'a déjà fait précédemment.

Les résultats obtenus seront toujours trop élevés, comme le montre le graphique suivant, qui figure la variation de la valeur de l'annuité amortissant 1 franc à divers taux.



Exemple. — *Quelle est l'annuité qui amortira un capital de 873.402 fr. en 23 ans au taux de 3,3 °/₀ ?*

Les tables d'Arnaudeau donneraient immédiatement la valeur de l'annuité amortissant 1 fr. à ce taux.

Avec les autres tables on devrait interpoler comme suit :

annuité amortissant 1 fr. à	3,25 °/₀	en 23 ans	0,062.405.55
»	3,375 °/₀	»	0,063.209.50
Différences	0,125		0,000.803.95

d'où

$$\text{annuité à } 3,30 = 0,062.405.55 + \frac{3,3 - 3,25}{0,125} \times 0,000.803.95$$
$$= 0,062.727.13,$$

soit $\quad a = 873.402 \times 0,062,727.13 = 54.786$ fr.,

valeur un peu trop élevée.

Le calcul exact par les tables d'Arnaudeau donnerait :

$$a = 873.402 \times 0,062,726.50 = 54.785 \text{ fr.}$$

2° *Par logarithmes.*

La formule $a = A \dfrac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$ se transforme comme suit :

$$\lg a = \lg A + \lg i + n \lg (1 + i) - \lg \left[(1 + i)^n - 1\right].$$

Exemple. — *Quelle est l'annuité qui amortira un capital de 873.402 fr. en 23 ans au taux de 3,3 °/₀ ?*

On a : $\quad \lg a = \lg 873.402 + \lg 0,033 + 23 \lg 1,033 - \lg \left[\overline{1,033}^{23} - 1\right]$

$$\begin{aligned}
\lg 873.402 &= \quad 5,941.214.18 \\
\lg 0,033 &= \quad \bar{2},518.513.94 \\
23 \lg 1,033 &= \quad 0,324.307.36 \\
-\lg\left[\overline{1,033}^{23} - 1\right] &= -0,045.370.31 \\
\hline
\lg a &= \quad 4,738.665.17 \\
a &= \quad 54.785 \text{ fr.}
\end{aligned}$$

On a dû faire le calcul auxiliaire suivant :

$$
\begin{aligned}
\lg 1{,}033 &= 0{,}014.100.32 \\
23 \lg 1{,}033 &= 0{,}324.307.36 \\
\overline{1{,}033}^{23} &= 2{,}110.121 \\
\overline{1{,}033}^{23} - 1 &= 1{,}110.121 \\
\lg 1{,}110.121 &= 0{,}045.370.31
\end{aligned}
$$

101. **Intérêts de retard dans le payement d'annuités.** — Lorsqu'un débiteur a fait une convention par laquelle il s'engage à rembourser une dette par une suite de payements annuels calculés d'après les formules d'annuités, les intérêts de retard afférents à l'un de ces payements doivent être calculés à intérêts composés au taux convenu pour le remboursement.

La transformation en annuités du capital de la dette, constitue en effet une convention formelle et, par suite, rentre dans le cas prévu à l'article 1154 du Code civil. Il semble presque inutile d'insister sur cette capitalisation qui est une conséquence évidente de la manière dont la valeur de l'annuité a été calculée ; on a, en effet, égalé le capital de la dette augmenté de ses intérêts composés pendant n années, à la somme des annuités successives augmentées de leurs intérêts *composés* pendant $(n - 1)$, $(n - 2)$ ... 1, 0 années.

Il est donc nécessaire pour que cette égalité subsiste, et que le prêteur ne soit pas lésé, que toute annuité non payée à son échéance soit capitalisée jusqu'à la date de son payement.

Signalons, en passant, la difficulté qui pourrait se présenter si le capital était remboursé par semestrialités, trimestrialités... L'art 1154 exige, pour que la capitalisation se produise, qu'il s'agisse d'intérêts dus pour une année entière ; cependant la jurisprudence admet la capitalisation des intérêts dans les arrêtés semestriels de comptes courants et, à notre avis, la convention particulière de remboursement par périodes inférieures à une année, entraine la capitalisation à la fin de chacune de ces périodes.

102. **Variations de $\frac{a}{A}$ quand i et n varient.** — De

$$a = \frac{Ai(1+i)^n}{(1+i)^n - 1},$$

on tire successivement :

$$\frac{a}{A} = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = \frac{1}{\dfrac{1}{(1+i)^n} \cdot \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{1}{(1+i)^n}} \cdot \frac{1}{(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \ldots + 1}$$

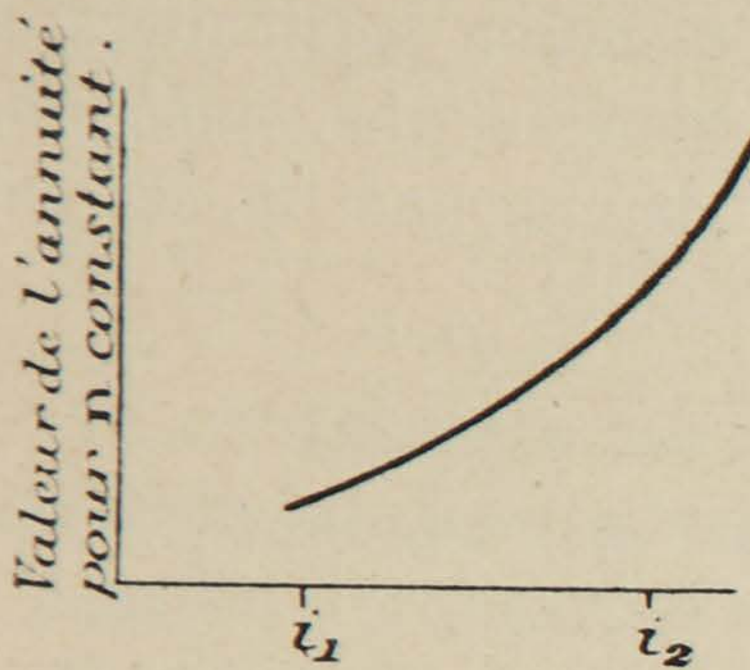
$$= \frac{1}{\dfrac{1}{1+i} + \dfrac{1}{(1+i)^2} + \ldots\ldots + \dfrac{1}{(1+i)^n}}.$$

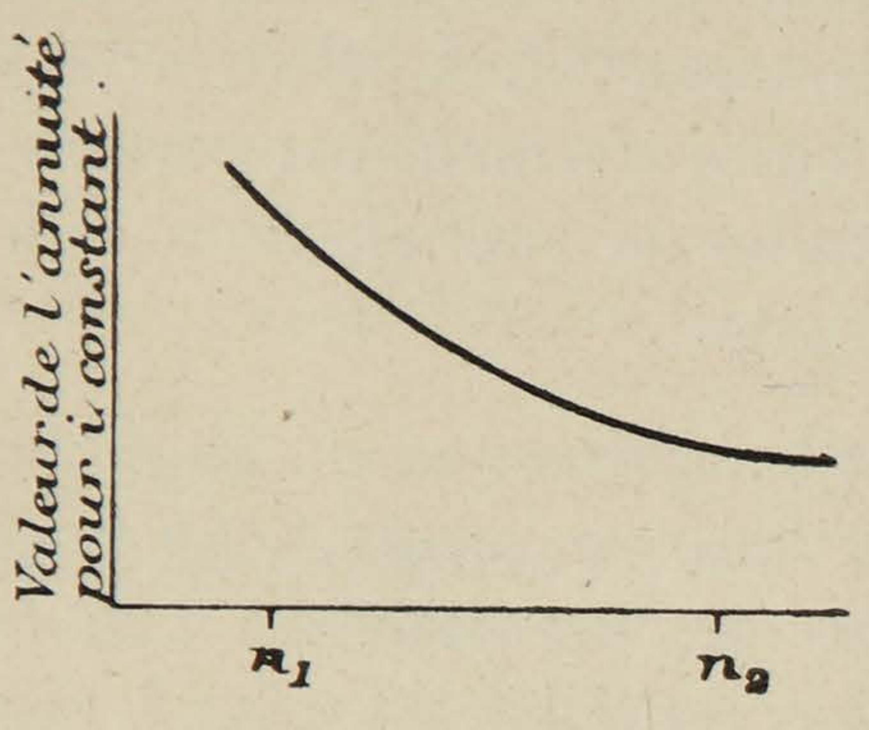
Sous cette forme, on voit que :

Si n reste constant, a varie dans le même sens que i, car le dénominateur varie en sens inverse du taux.

Si i reste constant, a varie en sens inverse de n, car le dénominateur varie dans le même sens que le nombre de périodes.

Les deux graphiques suivants indiquent la courbe représentative de la variation de l'annuité en supposant successivement n constant, puis i constant.





103. **Définition de la valeur actuelle d'une suite d'annuités.** — On a d'après l'égalité du numéro précédent

$$A = a\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} =$$

$$a\left[\frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \dots + \frac{1}{(1+i)^n}\right].$$

Sous la forme

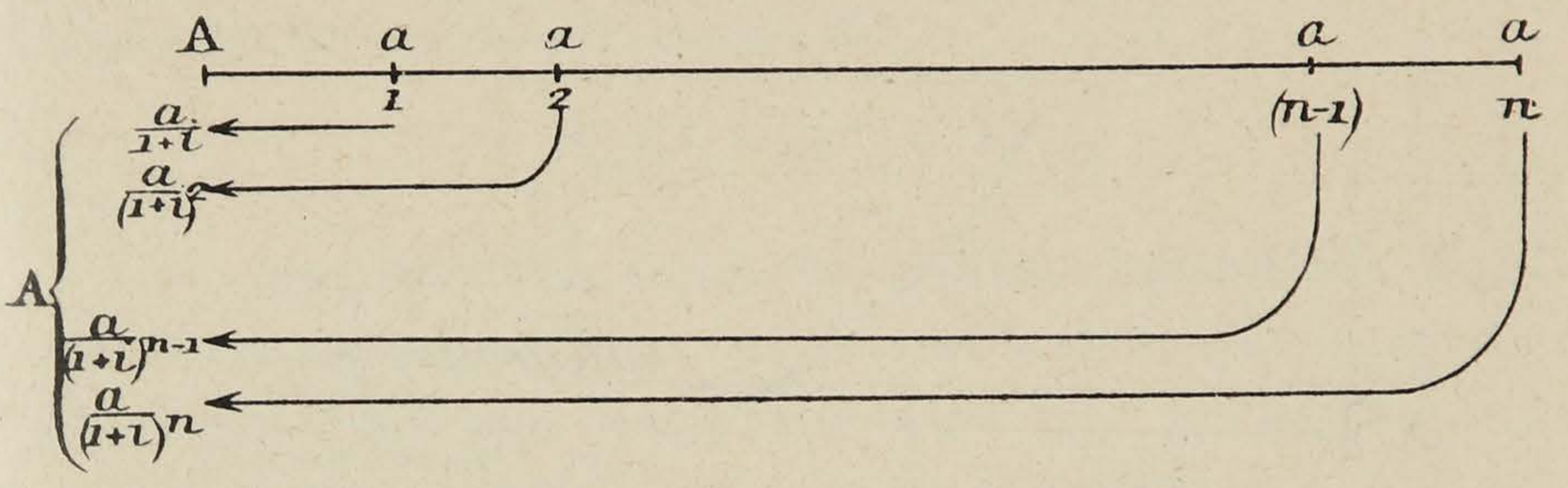
$$A = \frac{a}{1+i} + \frac{a}{(1+i)^2} + \dots + \frac{a}{(1+i)^n},$$

on voit que A représente la somme des valeurs actuelles des n payements périodiques égaux à a et escomptés au taux i.

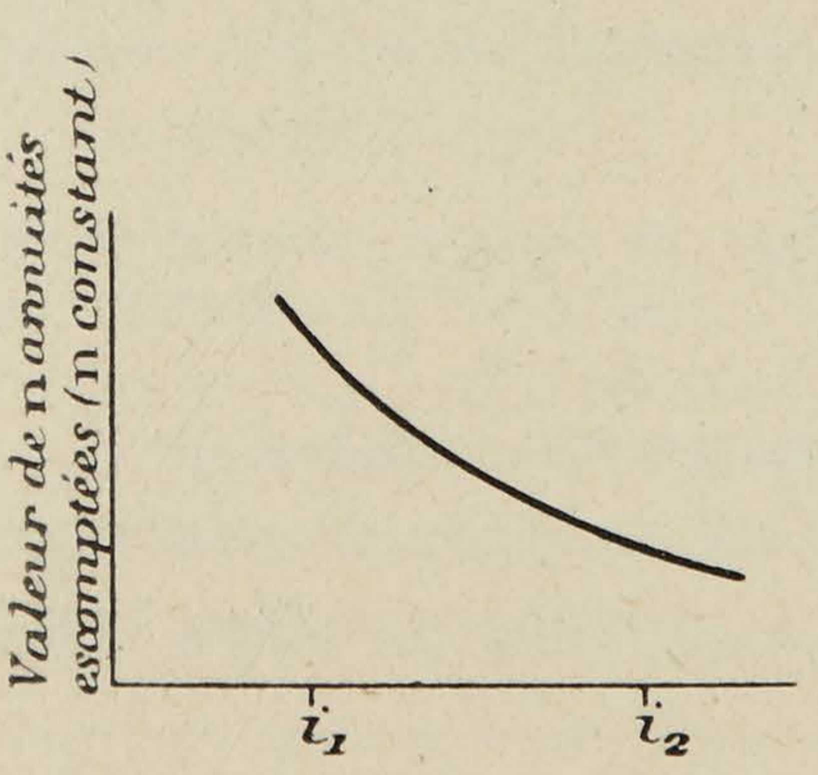
On constate que A varie en sens inverse de i si n reste constant et que A varie dans le même sens que n si i reste constant.

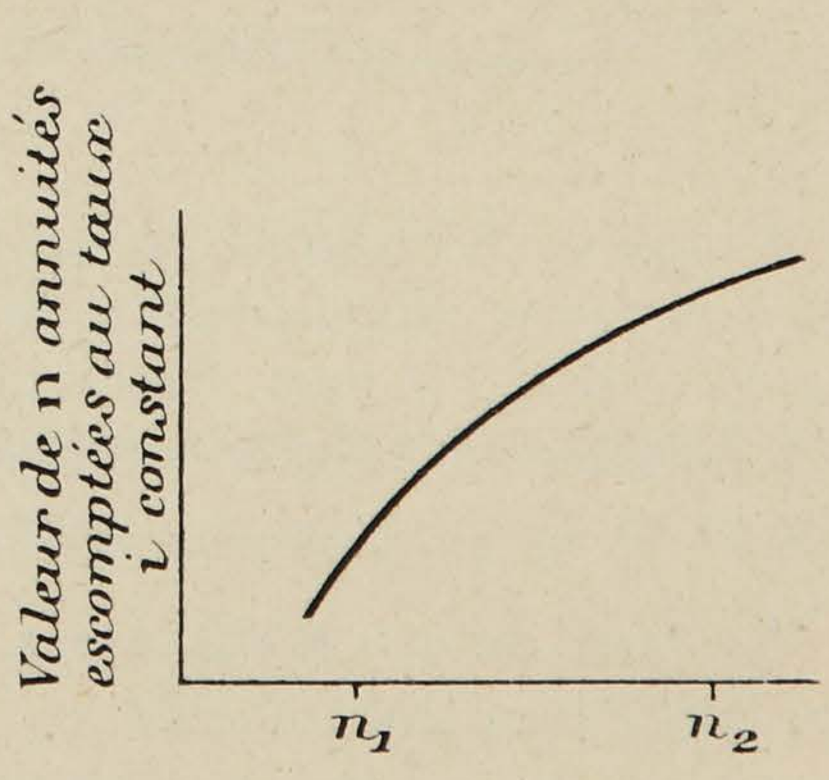
Cette formule est souvent désignée sous le nom de *formule des valeurs actuelles*. Elle exprime que si un capital A est remboursé exactement avec ses intérêts par n payements a périodiquement espacés, ce capital A est égal à la somme des valeurs actuelles de ces payements successifs, le premier payement étant supposé effectué une période entière après le prêt de A.

Le schéma suivant indique cette succession de payements :



Les deux graphiques suivants représentent la variation de la valeur actuelle de n annuités escomptées au taux i, en supposant successivement n et i constants.



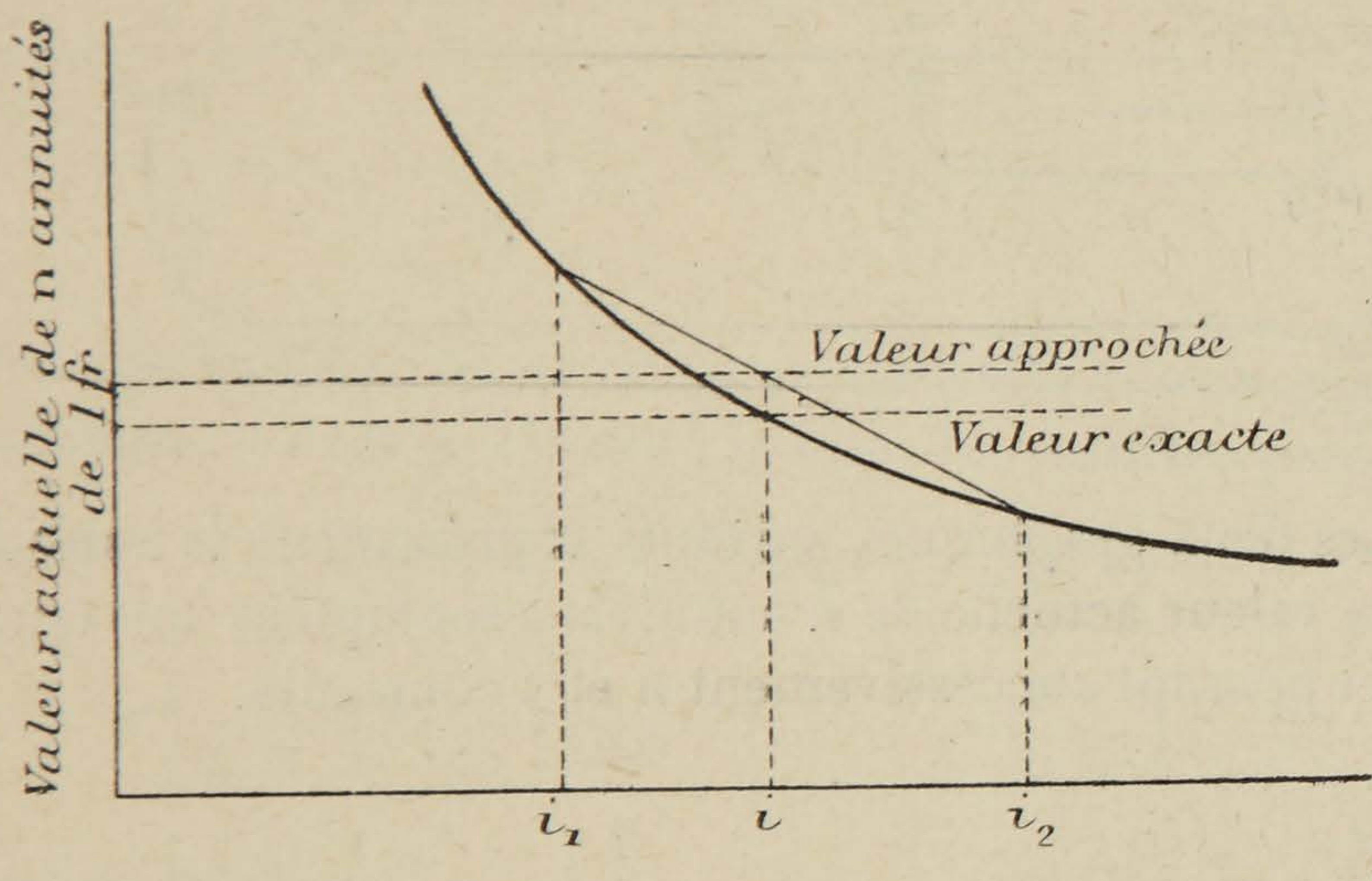


On peut calculer A par les méthodes suivantes :

1° *Calcul par les tables financières.*

La formule $A = \frac{a}{1+i} + \frac{a}{(1+i)^2} + \dots + \frac{a}{(1+i)^n}$ montre qu'il est facile de construire des tables financières donnant la valeur de n annuités de 1 franc en additionnant la table des valeurs actuelles de 1 franc payable dans 1, 2, 3, ... n années.

Les calculs se feront directement si le taux se trouve dans la table et par interpolation proportionnelle dans le cas contraire. Le résultat obtenu dans ce dernier cas sera trop élevé, comme le montre le graphique suivant :



EXEMPLE. — *Quelle est la valeur du capital remboursé par 44 payements annuels de* 9.381 *fr. dont le* 1^er^ *est effectué* 1 *an après le prêt; le taux d'escompte étant de* 2,70 $^0/_0$?

Les tables d'Arnaudeau donneraient immédiatement :

$$A = 9.381 \times 25,567.740 = 239.851 \text{ fr.}$$

Le taux de 2,7 n'étant pas indiqué dans les autres tables on procédera comme suit :

Val/actuelle de 44 annuités de 1 fr.	à 2,50 $^0/_0$	26,503.849.5
» »	à 2,75 $^0/_0$	25,341.475.1
Différences	0,25 $^0/_0$	1,162.374.4

donc la val/actuelle de 44 annuités de 1 fr. à 2,70 sera :

$$26,503.849.5 - \frac{2,7 - 2,5}{0,25}\ 1,162.374.4 = 25,573.949.98\ ;$$

d'où : $A = 9.381 \times 25,573.949.98 = 239.909$ fr.

2° *Par logarithmes.*

On tire de la formule : $A = a \dfrac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$ l'égalité :

$$\lg A = \lg a + \lg [(1+i)^n - 1] - \lg i - n \lg (1+i).$$

Il faut, comme précédemment dans le calcul de a, faire attention au calcul auxiliaire de

$$\lg [(1+i)^n - 1].$$

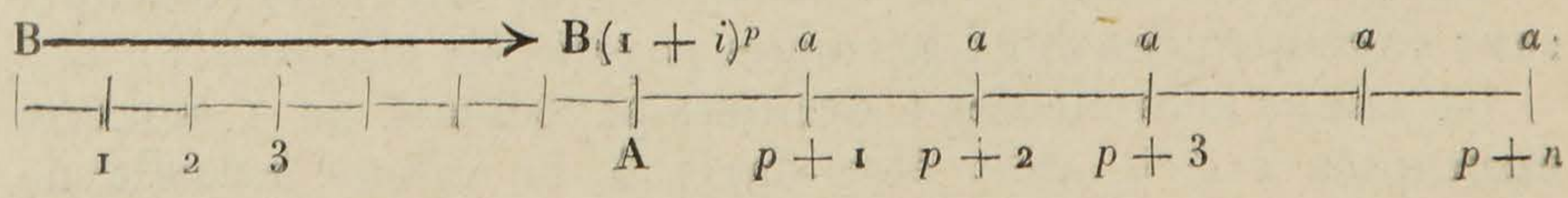
104. **Payements différés, suite d'annuités équivalentes, subventions.** — Il peut arriver que le premier payement n'ait pas lieu exactement une période entière après l'emprunt, mais après $(p+1)$ périodes.

Le capital emprunté B est alors devenu avec ses intérêts composés : $B(1+i)^p$, une période avant le premier payement ; c'est donc par cette valeur qu'il faudrait remplacer A dans les formules précédentes.

On aurait ainsi :

$$A = B(1+i)^p = a \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}.$$

Il est indispensable de compter avec le plus grand soin le nombre de périodes p s'écoulant entre le prêt et le premier remboursement a.



Annuités équivalentes. — On dit que deux suites d'annuités sont équivalentes lorsque leurs valeurs actuelles à une même époque sont égales.

On peut prendre dans les conventions deux taux différents pour l'évaluation des valeurs actuelles. Cette notion d'annuités équivalentes se rapporte surtout à celle des subventions, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple. — *Un gouvernement doit donner* 8.000.000 *en* 8 *ans, par payements égaux à terme échu ; après deux payements il demande à se libérer par* 60 *payements égaux. Calculer leur valeur si l'escompte des premiers termes est fait à* 4 % *et celui des seconds à* 3,5 %?

La valeur actuelle des 8 termes de 1.000.000 est, à 4 %.

$$6{,}732.744.87 \times 1.000.000 = 6.732.744{,}87.$$

Elle doit être égale à la valeur des deux termes de 1.000.000 escomptés à 4 % :

$$1{,}886.094.67 \times 1.000.000 = 1.886.094{,}67,$$

augmentée de la valeur escomptée à 4 % pour deux ans de la valeur actuelle à 3 1/2 % des nouveaux termes, soit :

$$0{,}924.556.21 \times 24{,}944.734.12 \times x;$$

d'où :

$$x = \frac{6.732.744{,}87 - 1.886.094{,}67}{0{,}924.556.21 \times 24{,}944.734.12} = 210.150{,}04.$$

Il importe surtout d'observer que l'escompte pendant les deux premières années des nouvelles annuités futures doit être effectué à 4 % et non à 3 1/2.

On pourrait raisonner autrement, et dire par exemple sans s'occuper des deux premiers payements effectués :

La valeur actuelle des 6 derniers payements de 1.000.000 escomptés à 4 % doit être égale à la valeur actuelle de 60 payements inconnus escomptés à 3 1/2 % d'où l'égalité :

$$1.000.000 \times 5{,}242.136.86 = x \times 24{,}944.734.12$$

et $$x = \frac{5.242.136{,}86}{24{,}944.734.12} = 210.150{,}04.$$

105. **Calcul de** n. — La formule générale

$$a = \frac{Ai(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

s'écrit successivement :

$$a(1+i)^n - a = Ai(1+i)^n,$$
$$(a - Ai)(1+i)^n = a.$$

et enfin : $$(1+i)^n = \frac{a}{a - Ai}.$$

Le calcul de n peut se faire par les tables financières ou par logarithmes.

1° *Par les tables financières.*

On calcule directement $\frac{a}{a - Ai}$, et on cherche, dans les tables financières relatives au taux i, après combien de périodes 1 franc capitalisé deviendra $\frac{a}{a - Ai}$; si l'on ne trouve pas de valeur entière de n, on interpole comme il a été dit précédemment ; le résultat obtenu est toujours trop faible, comme le montre le graphique du n° 90, qui figure la variation de $(1+i)^n$ quand n varie, i restant constant.

On peut également se servir des tables financières donnant $\frac{a}{A} = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$, ou de celles donnant

$$\frac{A}{a} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}.$$

Les calculs sont à peu près identiques et, suivant les résultats acquis, on se servira de l'une ou de l'autre méthode.

Exemple. — *Pendant combien de temps doit-on payer* 10.394 *francs pour amortir* 122.643 *fr. au taux de* 3,4 %?

On a :

$$\frac{a}{a - Ai} = \frac{10.394}{10.394 - 122.643 \times 0{,}034} = 1{,}669.950.120.$$

On trouverait directement dans les tables d'Arnaudeau

$$(1{,}034)^{15} = 1{,}651.231.942.8$$
$$(1{,}034)^{16} = 1{,}707.373.828.8\,;$$

d'où :

$$n = 15 + \frac{1{,}669.950.120.0 - 1{,}651.231.942.8}{1{,}707\ 373.828.8 - 1{,}651.231.942.8} = 15{,}333.$$

2° *Par logarithmes.*

La formule $(1 + i)^n = \dfrac{a}{a - Ai}$ donne :

$$n \lg (1 + i) = \lg a - \lg (a - Ai),$$

$$n = \frac{\lg a - \lg (a - Ai)}{\lg (1 + i)}.$$

Exemple. — *Pendant combien de temps doit-on payer* 10.394 *fr. pour amortir* 122.643 *fr. au taux de* 3,4 %?

$$n = \frac{\lg 10.394 - \lg [10.394 - 122.643 \times 0{,}034]}{\lg 1.034} = 15{,}337.$$

106. **Interprétation des résultats fractionnaires.** — Il est très rare que l'on trouve pour n une valeur entière ; or, dans l'exposé du compte courant on a essentiellement supposé que la capitalisation s'effectuait par périodes complètes ; il y a donc lieu d'interpréter la valeur fractionnaire trouvée pour n dans la généralité des cas.

Soit $n = n' + f$ n' étant entier.

On aura :

$$A(1+i)^{n'+f} = a\,\frac{(1+i)^{n'+f}-1}{i}$$

$$= a\,\frac{(1+i)^{n'+f}-(1+i)^f+(1+i)^f-1}{i}$$

$$= a\,\frac{(1+i)^{n'}-1}{i}(1+i)^f + a\,\frac{(1+i)^f-1}{i}$$

L'égalité des sommes portées au débit et au crédit du compte courant s'établit donc comme suit :

Au débit, A a subi la capitalisation pendant n' périodes pleines, puis pendant une période fractionnaire f durant laquelle les intérêts de capitalisation ont été calculés à un certain taux y tel que $(1+y)=(1+i)^f$; ce taux y est le taux équivalent au taux i pour la période f.

Au crédit : 1° n' sommes a payées périodiquement pendant n' périodes ont produit un capital $a\,\frac{(1+i)^{n'}-1}{i}$ qui est resté placé pendant une période complémentaire f (comme A) au taux y calculé ci-dessus.

2° un payement complémentaire $b = a\,\frac{(1+i)^f-1}{i}$.

En posant :

$$1+y=(1+i)^f, \quad \text{d'où :} \quad y=(1+i)^f-1$$

et :
$$1+i=(1+y)^{\frac{1}{f}}, \quad \text{d'où :} \quad i=(1+y)^{\frac{1}{f}}-1 \; :$$

$$b = a\,\frac{y}{(1+y)^{\frac{1}{f}}-1}.$$

Cette égalité, qui peut s'écrire $a = b\,\frac{(1+y)^{\frac{1}{f}}-1}{y}$, montre que b représente la somme périodique qu'il faut placer à la fin de chaque période fractionnaire f pour constituer a à la fin de la période complète.

Le payement complémentaire n'est donc autre chose que la partie de a qui est réellement acquise après la fraction f de la période.

Il est bon de remarquer que b est inférieur à la quantité af, c'est-à-dire à la fraction de a correspondant à la fraction de période résultant du calcul.

On a en effet :

$$b = a\frac{(1+i)^f - 1}{i} = a\frac{1 + fi + \frac{f(f-1)}{1 \cdot 2}i^2 + \dots - 1}{i}$$

$$= a\left(f + \frac{f(f-1)}{1 \cdot 2}i + \dots\right),$$

le terme $\frac{f(f-1)}{1 \cdot 2}$ est négatif et la suite entre parenthèses formant une série alternée convergente, f est une limite supérieure de cette suite donc :

$$b < af.$$

107, **Calcul de** i. — L'égalité fondamentale

$$a = \frac{Ai(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

s'écrit : $\quad Ai(1+i)^n - a(1+i)^n + a = 0.$

En développant le terme $(1+i)^n$ on voit qu'on obtient une équation en i du $(n+1)^{me}$ degré, qui ne se résout directement que si $n \leqslant 2$.

La recherche du taux ne peut donc se faire que par des méthodes d'approximations successives.

1^re^ *Méthode.* — On recherche d'abord par le calcul direct, ou à l'aide des tables d'annuités, les deux taux i_1 et i_2 correspondant à la période n et tels que $a_1 < a < a_2$. On sait que les annuités croissant avec le taux, on aura également $i_1 < i < i_2$. Une première approximation sera donnée par l'interpolation par parties proportionnelles :

$$i_1' = i_1 + \frac{a - a_1}{a_2 - a_1}(i_2 - i_1).$$

La quantité ainsi obtenue i_1' sera toujours approchée par défaut. On essayera cette valeur, qui donnera une annuité $a_1' < a$. Une autre approximation sera faite avec un taux $i_2' < i_2$ voisin de i_1' et donnera une annuité $a_2' > a$. Une interpolation par parties proportionnelles donnera un nouveau taux i''_2, qui sera plus approché que i''_1, etc. On répétera l'opération autant de fois qu'il sera nécessaire pour obtenir le nombre de décimales désiré.

Pratiquement, la simple interpolation par les tables donne le taux $^0/_0$ à 0,01 près, et chaque nouvelle interpolation donne 2 puis 3 décimales exactes ; de telle sorte qu'au troisième essai, on se trouve avoir le taux avec 7 ou 8 décimales exactes, ce qui est suffisant pour les calculs pratiques.

Les tables ordinaires ne peuvent permettre une telle approximation, et l'on est obligé de faire les calculs d'annuités directement à l'aide de machines à calculer ou des logarithmes de précision de Fédor Thoman,

2^e *Méthode.* — La formule $a = \dfrac{Ai(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$ donne :

$$i = \frac{a}{A}\,\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n} = \frac{a}{A}\left(1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right).$$

On voit que $i < \frac{a}{A}$; donc, en remplaçant dans le second membre i par $\frac{a}{A}$, on obtiendra une valeur i_1 trop forte :

$$i_1 = \frac{a}{A}\left(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{a}{A}\right)^n}\right),$$

mais plus approchée.

On remplacera de même i par i_1, on obtiendra une valeur $i_2 = \frac{a}{A}\left(1 - \frac{1}{(1 + i_1)^n}\right)$, trop forte, mais plus approchée que i_1, et ainsi de suite : on trouvera une suite de valeurs i_1, i_2, ..., i_n, se rapprochant de plus en plus de la valeur cherchée.

Cette méthode est très pratique et très rapide quand n est grand, car alors $\frac{a}{A}$ est très voisin de i.

108. **Taux à prendre comme première approximation.** — Il peut se faire que, ne possédant pas de tables d'annuités, on soit embarrassé pour choisir convenablement le taux i, point de départ des approximations successives. On peut montrer que i est compris entre $\frac{a}{A}$ et $\frac{a}{A} - \frac{1}{n}$, ce qui donne deux limites malheureusement assez éloignées en général. On verra que, pour des périodes faibles, on peut avec avantage substituer à la limite $\frac{a}{A}$ la valeur $2\left(\frac{a}{A} - \frac{1}{n}\right)$, qui est moins élevée.

On a :
$$a = \frac{Ai(1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1} = Ai\frac{(1 + i)^n - 1 + 1}{(1 + i)^n - 1}$$
$$= Ai + \frac{Ai}{(1 + i)^n - 1};$$

donc : $a > Ai$ et $i < \frac{a}{A}$.

En remplaçant $(1 + i)^n$ par $1 + ni$, quantité plus petite si $n > 1$,

ou a : $a < Ai + \frac{Ai}{1 + ni - 1}$, ou : $a < Ai + \frac{A}{n}$,

d'où : $$i > \frac{a}{A} - \frac{1}{n}.$$

Ainsi donc : $$\frac{a}{A} > i > \frac{a}{A} - \frac{1}{n}.$$

La limite $\frac{a}{A}$ est trop élevée pour pouvoir être utile si la durée est relativement faible : aussi lui préfère-t-on la limite supérieure $2\left(\frac{a}{A} - \frac{1}{n}\right)$, que l'on déterminera plus loin.

Pour que cette dernière soit plus avantageuse que la première, il faut que :

$$2\left(\frac{a}{A} - \frac{1}{n}\right) < \frac{a}{A}, \quad \text{ou :} \quad n < \frac{2A}{a}.$$

En écrivant cette inégalité sous la forme $an < 2A$, elle s'énonce comme suit :

La limite $2\left(\frac{a}{A} - \frac{1}{n}\right)$ est plus approchée que $\frac{a}{A}$, si la somme arithmétique des annuités na est inférieure au double du capital.

Le tableau ci-après donne les valeurs de n telles que $na = 2A$ pour un taux déterminé i.

TAUX	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
n	79	63	52	44	39	34	31

Si n dépasse les valeurs ci-dessus indiquées, la limite supérieure $\frac{a}{A}$ est préférable au double de la limite inférieure.

Exemple. — *Une somme de 47.895 fr. est amortie exactement en 23 ans par le versement annuel d'une annuité de 2.843 fr., payable à terme échu, c'est-à-dire la première un an après l'emprunt.*

Quel est le taux d'intérêt de l'emprunt ?

La limite supérieure de i est :

$$\frac{a}{A} = 0{,}0594.$$

La limite inférieure est :

$$\left(\frac{a}{A} - \frac{1}{n}\right) = 0{,}0594 - \frac{1}{23} = 0{,}0159.$$

Le taux est compris entre 1,59 % et 5,94 %, mais on voit d'après le tableau que le double de la limite inférieure est une limite préférable à $\frac{a}{A}$; donc :

$$0{,}0159 < i < 0{,}0318 \quad \text{ou} \quad 0{,}015 < i < 0{,}03\ {}^1/_4.$$

On calcule la valeur de l'annuité amortissant 1 fr. de capital pour $i_1 = 0{,}015$, puis pour $i_2 = 0{,}0325$ et en 23 ans.

On trouve :

pour	$i_1 = 1{,}5$ %	$a_1 = 0{,}051.73$
	$i_2 = 3{,}25$ %	$a_2 = 0{,}062.41$
Différences	1,75 %	0,010.68

L'interpolation proportionnelle donnera :

$$i = 0{,}015 + 0{,}0175 \times \frac{0{,}059.40 - 0{,}051.73}{0{,}010.68} = 0{,}0275.$$

On calcule la valeur de l'annuité amortissant 1 fr. à ce taux en 23 ans :

$$\frac{0{,}0275 \times \overline{1{,}0275}^{23}}{\overline{1{,}0275}^{23} - 1} = 0{,}059.244.1.$$

Puis, se basant sur ce que l'interpolation donne un résultat trop faible, on calcule l'annuité amortissant 1 fr. à 2,8 % en 23 ans :

$$\frac{0{,}028 \times \overline{1{,}028}^{23}}{\overline{1{,}028}^{23} - 1} = 0{,}059.556.3.$$

Une seconde interpolation donnera :

$$i = 0{,}0275 + (0{,}028 - 0{,}0275)\frac{0{,}059.400.0 - 0{,}059.244.1}{0{,}059.556.3 - 0{,}059.244.1}$$

$$= 0{,}027.749.$$

109. **Méthode de M. Achard.** — On doit à M. Achard une méthode commode et précise pour le calcul de i ; elle repose sur une étude de la valeur

$$A = a\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i},$$

considérée comme fonction du temps.

On peut écrire : $\dfrac{A}{an} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{in}$

et poser : $\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{in} = \dfrac{1-e^{-\alpha}}{\alpha} = \varphi(\alpha),$

e désignant, comme d'habitude, la base des logarithmes népériens.

On conçoit que si l'on a calculé une table de $\varphi(\alpha)$, ou plus pratiquement de $\dfrac{1}{\varphi(\alpha)}$, on pourra déterminer la valeur de i qui lui correspond, si l'on connaît n.

Mais cette méthode, qui reviendrait à une simple interpolation analogue à celle des tables financières, ne présenterait guère d'avantages.

La simplification introduite par M. Achard consiste à remarquer que i est compris entre certaines limites et à restreindre l'interpolation à effectuer. On trouvera, dans le *Bulletin des Actuaires français* (année 1904, page 32), la démonstration des inégalités suivantes :

$$\frac{\alpha}{n} > i > \frac{\alpha}{n+1}.$$

On peut alors poser $\alpha = i(n + \beta)$, β étant une quantité comprise entre zéro et un.

β varie très peu quand la valeur de i reste comprise entre certaines limites.

On peut donc écrire : $\frac{1}{i} = \frac{n}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha}$,

et en posant : $I = \frac{1}{i}$ $A = \frac{1}{\alpha}$ $B = \frac{\beta}{\alpha}$,

$$I = An + B,$$

dans laquelle A et B ne dépendent que de α qui, on le rappelle, est déterminé par une table des fonctions :

$$\varphi(\alpha) = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{ni},$$

ou, plus commodément, par une table des inverses :

$$\frac{1}{\varphi(\alpha)} = \frac{ni}{1 - (1 + i)^{-n}}.$$

Cette table peut être établie pour deux valeurs i_0 et i_1 du taux d'intérêt ; on aura, en cherchant dans la table correspondant à i_0, une certaine valeur de $n = n_0$ correspondant à la quantité $\varphi(\alpha)$.

On pourra donc écrire : $I_0 = \frac{1}{i_0} = An_0 + B.$

De même dans la table i_1 : $I_1 = \frac{1}{i_1} = An_1 + B$.

Comme d'autre part : $I = An + B$.

On voit qu'il résulte de l'élimination de A et B que :

$$\frac{I - I_0}{I_1 - I_0} = \frac{n - n_0}{n_1 - n_0},$$

d'où I et par suite : $i = \frac{1}{I}$.

Les tables des valeurs $\frac{1}{\varphi(\alpha)}$ ont été calculées par M. Achard pour les deux taux de 2 % et de 4 %.

Exemple. — *A quel taux d'intérêt une annuité de* 54.371 *fr.* 33 *remboursera-t-elle* 1.000.000 *fr. en* 30 *ans* ?

On a : $54.371{,}33 = 1.000.000 \frac{x(1 + x)^n}{(1 + x)^n - 1}$,

d'où : $\frac{1}{\varphi(\alpha)} = \frac{n \cdot x}{1 - (1 + x)^{-n}} \frac{an}{A} = 1{,}631.139.9.$

Dans la table de $i_0 = 2$ % correspondant à

$$I_0 = \frac{1}{0{,}02} = 50,$$

on trouve que pour $n = 53$, $\frac{1}{\varphi(\alpha)} = 1{,}6310$;

$n = 54$, $\frac{1}{\varphi(\alpha)} = 1{,}6444$;

n_0 se calcule par interpolation et est égal à :

$$n_0 = 53 + \frac{1{,}6311 - 1{,}6310}{1{,}6444 - 1{,}6310} = 53{,}0075.$$

De même dans la table $i = 4$ % correspondant à

$$I_1 = \frac{1}{0{,}04} = 25,$$

on a pour $n_1 = 26, \quad \frac{1}{\varphi(\alpha)} = 1,6268$;

$n_1 = 27, \quad \frac{1}{\varphi(\alpha)} = 1,6534$;

d'où :

$$n_1 = 26 + \frac{1,6311 - 1,6268}{1,6534 - 1,6268} = 26 + \frac{43}{266} = 26,1617,$$

$$\frac{I - 25}{50 - 25} = \frac{30 - 26,1617}{53,0075 - 26,1617} = \frac{3,8383}{26,8458},$$

$$I = 25 + 25\,\frac{3,8383}{26,8458} = \frac{3.068,41}{107,3832},$$

d'où : $$i = \frac{1}{I} = \frac{107,3832}{3.068,41} = 0,034.996.$$

Le taux exact est 0,035.

M. Muraï a dressé des tables pour le calcul direct du taux par la formule :

$$(1) \qquad i = \frac{\alpha}{n + \beta}.$$

Ces tables donnent pour les valeurs de α variant par 0,01 de 0,01 à 6 :

1° Les valeurs de la fonction $\varphi_\alpha = \frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha}$;

2° Les valeurs de $\beta_\alpha = \frac{\alpha^2}{2\left(e^\alpha - \alpha - 1\right)}$; (1)

3° Les valeurs des expressions

$$C_\alpha = \frac{0,01}{\varphi_\alpha - \varphi_{\alpha+1}} \quad \text{et} \quad d_\alpha = \frac{\beta_\alpha - \beta_{\alpha+1}}{\varphi_\alpha - \varphi_{\alpha+1}}.$$

La méthode consiste à calculer $\varphi = \frac{A}{a\,.\,n}$, à rechercher dans la table des valeurs de φ les deux expressions φ_{α_1} et φ_{α_1+1} telles que :

(1) [Voir pour la démonstration de cette formule : Journal des Actuaires français. Année 1874, p. 194].

$$\varphi_{\alpha_1+1} < \varphi < \varphi_{\alpha_1}$$

et à calculer par interpolation les valeurs de α et β de la formule (1).

Exemple. — Reprenons l'exemple traité plus haut. On a :

$$A = 1.000.000$$

$$n \,.\, a = 30 \times 54.371{,}33 = 1.631.139\ 90$$

$$\frac{A}{na} = \frac{1.000.000}{1.631.139{,}90} = 0{,}613.068.198.5 = \varphi_\alpha.$$

Les tables de Muraï donnent :

$$\varphi_{1,07} = 0{,}614.010.731.4$$

$$\varphi_{1,08} = 0{,}611.485.624.4$$

$$\beta_{1,07} = 0{,}677.151.504.2$$

$$c_{1,07} = 3{,}960.228.249.8$$

$$d_{1,07} = 1{,}062.127.752.7$$

Puis :

$$\varphi_{1,07} - \varphi_\alpha = 0{,}000.942.532.9$$

$$\alpha = 1{,}07+(\varphi_{1,07}-\varphi_\alpha)c_{1,07} = 1{,}07+0{,}003.732.645.4$$
$$= 1{,}073.732.645.4$$

$$\beta_\alpha = \beta_{1,07}-(\varphi_{1,07}-\varphi_\alpha)d_{1,07} = 0{,}677.151.504.2$$
$$-0{,}001.001.090.3$$
$$= 0{,}676.150.413.9$$

$$i = \frac{1{,}073.782.645.4}{30{,}676.150.413.9} = 0{,}035.002.$$

L'approximation est de même ordre que celle du résultat obtenu plus haut.

110. **Formule de Baily**. — Le mathématicien anglais Baily a donné une formule, qui permet de calculer i avec une approximation assez grande lorsque n ne dépasse pas 40 à 50 ans.

Comme il est à remarquer que c'est pour les valeurs de n inférieures à ces limites que les calculs précédents sont les moins rapides, la méthode de Baily est à retenir.

La formule de Baily est la suivante :

$$i = \frac{12 - (n-1)h}{12 - 2(n-1)h} \quad \text{avec} \quad h = \left(\frac{an}{A}\right)^{\frac{2}{n+1}} - 1.$$

Elle s'établit comme suit :

On a :

$$\frac{A}{a} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} =$$

$$= \frac{1 - \left[1 - ni + \frac{n(n+1)}{1.2} i^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} i^3 + \dots\right]}{i}$$

$$= n - \frac{n(n+1)}{1.2} i + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} i^2$$
$$- \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4} i^3 + \dots$$

et :
$$\frac{A}{an} = 1 - \frac{n+1}{2} i + \frac{(n+1)(n+2)}{6} i^2$$
$$- \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{24} i^3 + \dots$$

Cette équation en i présente cette particularité que les termes décroissent très rapidement.

Le rapport de deux termes consécutifs est :

$$\frac{u_p + 1}{u_p} = \frac{\dfrac{(n+1)(n+2)\dots(n+p+1)}{(p+2)!} i^{p+1}}{\dfrac{(n+1)(n+2)\dots(n+p)}{(p+1)!} i^p} = \frac{n+p+1}{p+2} i,$$

et tend vers i quand p augmente indéfiniment.

On peut donc, pour résoudre approximativement l'équation, supprimer des termes à partir d'une certaine puissance : Baily a eu l'idée de réduire le coefficient du terme en i en élevant à la puissance $-\frac{2}{n+1}$.

Cette opération entraîne en outre une simplification fort importante : la suppression du terme en i^3 ; de sorte que l'équation se réduit à :

$$\left(\frac{A}{an}\right)^{-\frac{2}{n+1}} = 1 + i - \frac{n-1}{12} i^2 + i^4 (\alpha + \beta i + \dots),$$

et, en négligeant les termes de degré i^4 et supérieurs, on pourra écrire : $$\frac{(n-1)}{12} i^2 - i + \left(\frac{A}{an}\right)^{-\frac{2}{n+1}} - 1 = 0,$$

ou en posant : $$1 - \left(\frac{A}{an}\right)^{-\frac{2}{n+1}} = 1 - \left(\frac{an}{A}\right)^{\frac{2}{n+1}} = -h$$

$$(n-1) i^2 - 12 i + 12 h = 0,$$

d'où : $$i = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 12 h (n-1)}}{n-1}.$$

Sous cette forme, la valeur de i est peu commode à calculer, et il est préférable de résoudre l'équation du second degré par approximations successives.

On peut écrire : $i = \dfrac{12 h}{12 - (n-1) i}$.

Si l'on remplace dans le second membre i par une valeur approchée on trouvera assez simplement une valeur plus approchée.

Remplaçons i par 0 dans le second membre, on aura :

$$i_1 = \frac{12 h}{12} = h,$$

que l'on peut prendre comme valeur approchée, on aura ainsi : $$i_2 = \frac{12 h}{12 - (n-1) h}.$$

En remplaçant enfin i par cette valeur, on obtient :

$$i_3 = \frac{12 h}{12 - (n-1) \dfrac{12 h}{12 - (n-1) h}}$$

$$= \frac{12 h [12 - (n-1) h]}{12 [12 - (n-1) h] - 12 (n-1) h} = h \frac{12 - (n-1) h}{12 - 2 (n-1) h}.$$

Exemple. — *A quel taux d'intérêt* 11 *annuités de* 30.000 *fr. remboursent-elles un capital de* 277.578,72 ?

On a :

$$\begin{aligned}
\lg 30.000 &= 4{,}477.121.25 = 4{,}477.121.25 \\
\lg 11 &= 1{,}041.392.69 = 1{,}041.392.69 \\
-\lg 277.578{,}72 &= -5{,}443.386.17 = \bar{6}.556.613.83 \\
&\qquad \lg \frac{an}{A} = 0{,}075.127.77
\end{aligned}$$

$$\frac{2}{n+1} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}, \qquad \frac{1}{6} \lg \frac{an}{A} = 0{,}012.521.30$$

et par suite : $$\left(\frac{an}{A}\right)^{\frac{1}{6}} = 1{,}029.251$$

$$h = 0{,}029.251$$

$$i = 0{,}029.251 \times \frac{12 - 10 \times 0{,}029.251}{12 - 20 \times 0{,}029.251}$$

$$= 0{,}029.251 \times \frac{11{,}707.49}{11{,}414.98} = 0{,}030.000.6.$$

Le taux réel est 3 %.

Le tableau suivant montre l'approximation à laquelle conduit cette formule pour diverses valeurs de n et les deux taux annuels extrêmes de la pratique 1,75 % et 5 %.

NOMBRE D'ANNÉES	TAUX APPROCHÉ RÉSULTANT DE LA FORMULE SI LE TAUX RÉEL EST	
	1,75 %	5 %
3	1,75	5,00 002
5	1,75 001	5,00 006
11	1,75 001	5,00 043
21	1,75 003	5,00 195
31	1,75 007	5,00 521
41	1,75 016	5,01 093
51	1,75 027	5,01 991
99	1,75 175	5,13 604

L'approximation décroît donc si le taux et le nombre d'années augmentent.

111. **Correction du taux.** — Quand on a trouvé une valeur approchée i_1, il est assez facile de corriger ce taux en procédant comme il suit :

Dans la formule : $\frac{Ai}{a} = 1 - (1 + i)^{-n}$,

remplaçons i par $i_1 + x$; on aura :

$$\begin{aligned}\frac{A.(i_1 + x)}{a} &= 1 - (1 + i_1 + x)^{-n} \\ &= 1 - (1 + i_1)^{-n} + n(1 + i_1)^{-(n+1)}\,x,\end{aligned}$$

en négligeant les termes en x^2, x^3, etc., nécessairement très petits, puisque $x = i - i_1$, et que i_1 est une valeur approchée de i.

L'équation précédente, étant du premier degré en x, donnera :

$$x = \frac{1 - (1 + i_1)^{-n} - \frac{A}{a}i_1}{\frac{A}{a} - n(1 + i_1)^{-(n+1)}}.$$

Exemple. — *A quel taux d'intérêt 23 annuités de 2.843 fr. remboursent-elles un capital de 47.895 fr. ?*

On a trouvé précédemment la valeur approchée $i_1 = 2{,}75$ % p. 172 ; la correction sera donc :

$$x = \frac{1 - 0{,}535.818.7 - 16{,}846.640.9 \times 0{,}027.5}{16{,}846.640.9 - 23 \times 0{,}521.478.1},$$

$$x = 0{,}000.185.1 \quad \text{et} \quad i = 0{,}027.685.1.$$

CHAPITRE V

AMORTISSEMENT PAR ANNUITÉS CONSTANTES

112. **Généralités.** — Le compte courant et d'intérêts établi précédemment montre l'équivalence de la somme A et des n payements périodiques a en capitalisant le tout pendant n années, on a :

$$A(1+i)^n = a[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \dots (1+i)^2 + (1+i) + 1].$$

De cette égalité on déduit que A est égal à la somme des valeurs actuelles des payements a :

$$A = \frac{a}{1+i} + \frac{a}{(1+i)^2} + \dots + \frac{a}{(1+i)^n}.$$

Cette relation entre la somme A, que l'on peut appeler dette, et les termes a, que l'on peut désigner par remboursements partiels, indique que A est effectivement remboursé après n périodes, si, le taux d'intérêt restant fixe et égal à i, on paye a à la fin de chaque période.

Le mécanisme de ce remboursement peut être compris de plusieurs manières :

a. — L'emprunteur paye périodiquement a, qui comprend l'intérêt du capital restant à rembourser, et un excédent qui est imputé sur le capital : c'est l'emprunt ordinaire français.

b. — L'emprunteur paye périodiquement l'intérêt du capital primitif et reconstitue par des placements successifs le capital A, qu'il restitue après n périodes : c'est l'emprunt américain ou *sinking fund*.

113. **Système français**. — Le premier payement peut être considéré comme remboursant l'intérêt Ai du capital et une partie $(a - Ai)$ de ce même capital A, qui s'amortit ainsi de cette somme $m_1 = (a - Ai)$. La deuxième année, le payement peut être décomposé en l'intérêt $(A - m_1)\, i$ du capital à amortir, et l'amortissement $a - (A - m_1)\, i = m_2$. D'une manière générale, si A_p est le capital restant à amortir après le p^{me} payement, le $(p + 1)^e$ payement fournira l'intérêt de A_p, soit $A_p i$, et la différence sera le $(p + 1)^e$ amortissement m_{p+1}.

On aura donc : $a = A_p i + m_{p+1}$,

et l'année suivante : $a = (A_p - m_{p+1})\, i + m_{p+2}$;

d'où, en égalant les valeurs de a :

$$A_p i + m_{p+1} = A_p i - m_{p+1}\, i + m_{p+2},$$

soit :

$$m_{p+2} = m_{p+1}\,(1 + i).$$

Un amortissement quelconque est donc égal au précédent multiplié par $(1 + i)$, c'est-à-dire que la somme consacrée dans l'année $(p + 1)$ à l'amortissement est égale à celle de l'année p augmentée de l'intérêt de cette somme.

Les amortissements s'accroissent ainsi chaque année de l'intérêt de la somme amortie dans l'année précédente.

Les amortissements formant une progression géométrique de raison $1 + i$, on peut trouver directement le premier sans passer par l'annuité.

On aura en effet :

$$A = m_1 + m_1(1+i) + \dots + m_1(1+i)^{n-1}$$
$$= m_1 \frac{(1+i)^n - 1}{i}, \text{ d'où : } m_1 = \frac{Ai}{(1+i)^n - 1}.$$

Il est à remarquer que cette valeur est bien celle que comprend a, car on peut écrire :

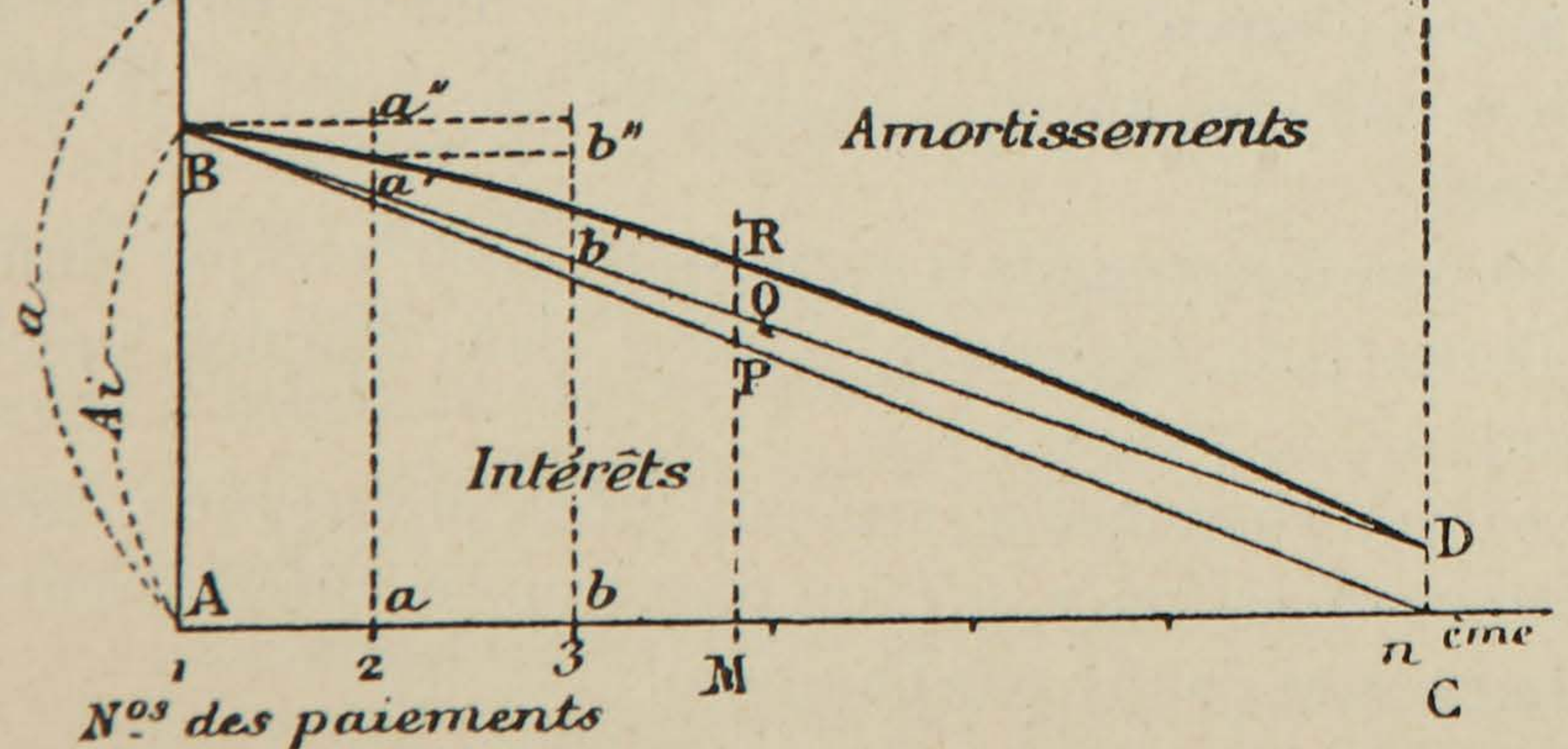
$$a = Ai + \frac{Ai}{(1+i)^n - 1} = A\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}.$$

Le dernier amortissement m_n s'obtient en écrivant que le capital restant à amortir à la fin de la dernière année est m_n, et que, par suite, $a = m_n i + m_n$;

d'où : $$m_n(1+i) = a,$$
$$m_n = \frac{a}{1+i} = \frac{Ai(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\,\frac{1}{1+i} = \frac{Ai(1+i)^{n-1}}{(1+i)^n - 1}.$$

Les payements périodiques a se composent en définitive de deux parties, l'une, décroissante, représentant l'intérêt du capital restant dû, et l'autre, nécessairement croissante, qui est l'amortissement.

La représentation graphique de ces deux parties de l'annuité donnerait le graphique suivant :



Le premier payement d'intérêt Ai étant représenté par AB, le second aa' en différera de $a'a''$, qui représentera l'intérêt du capital amorti la première année.

Le troisième payement différera du second de $b'b''$, qui, représentant l'intérêt du capital amorti la seconde année, sera supérieur à $a'a''$.

On voit donc que la courbe tend à s'incliner de plus en plus sur l'axe des années.

La figure précédente permet de trouver très simplement la limite inférieure de la valeur de i, qui a été indiquée au nº 108.

D'après ce qui vient d'être dit, les ordonnées AB, aa', bb', ..., décroissent de plus en plus vite, et la courbe figurative est tout entière au-dessus de la ligne BD, joignant le point figurant le premier intérêt à celui figurant le dernier.

Si M est le milieu de AC, on aura ;

$$\mathrm{MQ} = \frac{\mathrm{AB} + \mathrm{CD}}{2} > \mathrm{MP},$$

P étant l'intersection de BC avec l'ordonnée du point M.

On remarque d'ailleurs que

$$\mathrm{MP} = \frac{Ai}{2}, \quad \text{donc} \quad \frac{Ai}{2} < \mathrm{MQ}.$$

Or MQ, moyenne des ordonnées de la droite, est évidemment inférieure à la moyenne des ordonnées de la courbe, c'est-à-dire à la moyenne des intérêts payés annuellement.

La somme arithmétique des intérêts payés est égale à la totalité des payements $n \times a$ diminuée du capital A formant la somme des amortissements contenus dans les payements a successifs ; donc la moyenne annuelle des intérêts sera :

$$\frac{an - A}{n}.$$

On aura donc enfin :

$$\frac{Ai}{2} < MQ < \frac{an - A}{n},$$

d'où :

$$i < 2\frac{an - A}{nA}, \quad \text{ou :} \quad i < 2\left(\frac{a}{A} - \frac{1}{n}\right),$$

ce qui démontre l'exactitude de la limite indiquée précédemment (n° 108).

114. **Critique du système français.** — Dans ce système, le prêteur voit son intérêt diminuer progressivement ; mais, comme il rentre en possession de son capital, il peut placer à nouveau le capital reconstitué peu à peu et lui faire produire une rente constante égale à l'intérêt de son capital primitif. Il suffit qu'il puisse trouver à prêter de nouveau son capital au taux i. S'il trouve un taux supérieur, il touchera une moyenne d'intérêts supérieure à i ; dans le cas contraire, son intérêt diminuera.

En tout cas, il n'est pas *assuré* de placer son capital au taux i pendant les n périodes.

Si donc, au point de vue purement théorique, il est exact de dire que, lorsqu'une somme A est amortie par n annuités, $a = \frac{Ai(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$, le placement obtenu est au taux i, cette proposition ne sera presque jamais vraie dans la pratique, à cause des importantes variations que subit le taux d'intérêt ; la proposition théorique suppose que le taux d'intérêt reste fixe, non seulement pour le contrat en cours d'exécution, mais pour tous les autres contrats à passer pendant la période de remboursement.

Cependant ce système d'amortissement présente l'avantage considérable pour le débiteur de le libérer par une somme fixe parfaitement définie; aussi a-t-il été adopté dans la plupart des grands emprunts : compagnies de chemins de fer, Crédit foncier, emprunts de villes et de départements, prêts hypothécaires, etc.

115. **Sinking fund.** — Dans ce système, le débiteur paye tous les ans l'intérêt du capital primitif et met en réserve la différence $(a - Ai)$; il affecte aux capitaux ainsi mis en réserve un intérêt i, et se trouve avoir reconstitué en n périodes le capital A.

En effet, si l'on place à intérêts composés n sommes $(a - Ai)$, le capital formé sera :

$$B = (a - Ai) \times \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

$$= \frac{Ai}{(1 + i)^n - 1} \times \frac{(1 + i)^n - 1}{i} = A.$$

Le créancier touche l'intérêt Ai de son capital et n'est pas exposé aux fluctuations du taux du marché ; de plus, il reçoit A à la fin du contrat.

Ce système paraît plus avantageux pour le créancier que le système français puisqu'il assure la constance du taux d'intérêt pendant n années ; mais il repose sur la reconstitution effective du capital A par l'accumulation des excédents $(a - Ai)$ et de leurs intérêts au taux i.

On suppose donc que le débiteur pourra faire produire le taux d'intérêt i aux capitaux mis en réserve afin de reconstituer le capital A ; il est infiniment probable, d'ailleurs, qu'il placera ces capitaux dans sa propre industrie, et leur fera produire un intérêt supérieur à i, dont il profitera. Mais il pourrait se faire qu'il ne puisse effectuer cette opération (elle peut même être défendue par la loi), et si le taux d'intérêt du marché baisse, le prêteur se trouvera dans l'impossibilité de reconstituer A, à moins de faire des sacrifices plus grands.

Mais si le taux d'intérêt reste égal à i, les sacrifices du débiteur restent identiques dans l'un ou l'autre système.

116. **Système à deux taux d'intérêts.** — Le *sinking fund* conduit naturellement à l'idée de considérer deux taux d'intérêt : l'un i, servi au créancier ; l'autre t, permettant de reconstituer le capital par un prélèvement fixe égal à $\frac{At}{(1+t)^n - 1}$; l'annuité fixe serait alors

$$b = Ai + \frac{At}{(1+t)^n - 1}.$$

Or, la valeur $\frac{At}{(1+t)^n - 1}$ varie en raison inverse de t, comme on peut le montrer par l'une des remarques suivantes :

$$1^\circ \quad \frac{At}{(1+t)^n - 1} = \frac{At}{1 + nt + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} t^2 + \ldots - 1}$$

$$= \frac{A}{n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} t + \ldots},$$ fraction, dont le dénominateur, augmentant avec t, diminue quand t augmente.

2° $\frac{At}{(1+t)^n - 1}$ représente la somme qui, placée au taux t, reproduira avec la capitalisation la somme A après

n périodes. Cette somme devra être d'autant plus grande que t sera plus faible.

$$3^o \quad \frac{\mathrm{A}t}{(1+t)^n - 1} = \frac{\mathrm{A}}{\frac{(1+t)^n - 1}{t}} = \frac{\mathrm{A}}{\frac{(1+t)^n - 1}{1+t-1}}$$

$$= \frac{\mathrm{A}}{(1+t)^{n-1} + (1+t)^{n-2} + \ldots + 1}.$$

Le dénominateur de cette fraction, augmentant avec t, celle-ci diminue quand t augmente.

Il en résulte que si $t < i$ on aura $b > a$,

$$t = i \quad — \quad b = a,$$
$$t > i \quad — \quad b < a.$$

L'emprunteur cherchera donc à placer les sommes en réserve au taux le plus élevé possible, comme dans le sinking fund.

117. **Baux anglais.** — En Angleterre, on applique constamment le système de deux taux au prix des baux ; mais le débiteur paye au créancier l'intérêt $\mathrm{A}i$ et une somme $\frac{\mathrm{A}t}{(1+t)^n - 1}$, le créancier se chargeant, à ses risques et périls, de reconstituer son capital.

Le taux t employé est naturellement inférieur à i, pour tenir compte de ces risques : cet excédent constitue ainsi une sorte de surprime d'amortissement.

118. **Tableaux d'amortissement.** — Pour dresser un tableau d'amortissement d'après la méthode ordinaire des remboursements successifs, on commence par calculer

l'annuité a. On en déduit Ai et l'on obtient le premier amortissement m_1. On calcule ensuite les amortissements successifs en multipliant le premier par $(1 + i)$, $(1 + i)^2 \ldots$, ou bien en multipliant par $1 + i$ chacun des amortissements successifs.

On dresse ensuite un tableau analogue à celui qui est représenté ci-après :

NUMÉROS D'ORDRE (1)	DATE DES EXERCICES (2)	CAPITAL RESTANT DU AU COMMENCEMENT DE L'EXERCICE (3)	INTÉRÊT A 3 °/₀ DU CAPITAL RESTANT A AMORTIR (4)	AMORTISSEMENTS SUCCESSIFS (5)	ANNUITÉ FIXE (POUR CONTROLE) (6)	AMORTISSEMENTS CUMULÉS (7)
1	1906	100 000 »	3 000 »	7 046,21	10 046,21	7 046,21
2	1907	92 953,79	2 788,61	7 257,60	10 046,21	14 303,81
3	1908	85 696,19	2 750,89	7 475,32	10 046,21	21 779,13
4	1909	78 220,87	2 346,63	7 699,58	10 046,21	29 478,71
5	1910	70 521,29	2 115,64	7 930,57	10 046,21	37 409,28
6	1911	62 590,72	1 877,72	8 168,49	10 046,21	45 577,77
7	1912	54 422,23	1 632,67	8 413,54	10 046,21	53 991,31
8	1913	46 008,69	1 380,26	8 665,95	10 046,21	62 657,26
9	1914	37 342,74	1 120,28	8 925,93	10 046,21	71 583,19
10	1915	28 416,81	852,51	9 193,70	10 046,21	80 776,89
11	1916	19 223,11	576,70	9 469,51	10 046,21	90 246,40
12	1917	9 753,60	292,61	9 753,60	10 046,21	100 000, »
		685 150,04	20 554,52	100 000 »	120.554,52	

Exemple. — *Dresser le tableau d'amortissement, en 12 ans, de 100.000 fr. prêtés le 1er janvier 1906 à 3 °/₀, les remboursements ayant lieu le 1er janvier de chaque année, le premier 1er janvier 1907.*

On trouve que l'annuité

$$a = \frac{100.000 \times 0{,}03 \times \overline{1{,}03}^{12}}{\overline{1{,}03}^{12} - 1} = 10.046{,}209 \ldots$$

Si le taux ne se trouvait pas dans les tables on aurait avantage, au point de vue pratique, à calculer l'amortissement $\frac{Ai}{(1+i)^n - 1}$ au lieu de l'annuité.

En effet, l'erreur commise sur ce nombre est multipliée par $(1+i)^n$ dans le calcul de $a = \frac{Ai}{(1+i)^n - 1}(1+i)^n$, de telle sorte que si $(1+i)^n$ est grand (n étant $>$ 50 par exemple) l'erreur peut être assez considérable.

Pratique des calculs. — Ayant calculé le premier amortissement 7.046,209, on le multiplie par 1,03 pour obtenir le second, que l'on multiplie par 1.03, et ainsi de suite.

Quand le taux est simple, on dispose les calculs comme suit :

7.046.209.	
211,386.27	multiplication de la ligne précédente par 0,03
7.257,595 ..	
217.727.85	» » »
7.475,323	et ainsi de suite...

On inscrit les chiffres ainsi trouvés dans la colonne 5.

On a avantage à calculer au fur et à mesure les nombres des colonnes 4 et 5 afin de contrôler, année par année, que la somme des intérêts et de l'amortissement donne bien pour total l'annuité 10.046 fr. 21.

Si le nombre n est considérable, il est nécessaire de calculer des points de repère, tels que le capital amorti à la fin des dixième, vingtième années, etc., que l'on détermine directement par l'une des méthodes exposées ci-après.

On est toujours amené à forcer quelques-unes des unités décimales auxquelles on s'arrête (en général les francs, quelquefois les centimes).

Ainsi, dans le tableau précédent, on a dû forcer les intérêts des dixième et onzième années, et, au contraire, diminuer d'une unité le chiffre des centimes de l'amortissement de la onzième année.

Mais ces détails ne présentent qu'une importance très minime et il ne faut pas s'y arrêter.

Quand un tableau présente quelques différences de centimes sur des milliers de francs de capital, on les impute simplement et sans chercher, à quelques-uns des payements, à moins que le détail des calculs ne révèle comme ci-dessus les chiffres à forcer ou à diminuer.

Il ne faut d'ailleurs négliger aucune des vérifications évidentes, telles que l'addition des colonnes 4 et 5 dont le total doit reproduire la somme des nombres de la colonne 6 ; on peut aussi remarquer que le total des nombres de la colonne 3 multiplié par i reproduit le total des intérêts (colonne 4).

Dans le tableau, on constate une différence de 0,02, provenant des forcements ci-dessus indiqués.

119. **Calcul du capital restant à amortir après le p^{me} remboursement.** — Il faut éviter de dire : capital restant dû à la fin de la p^{me} période, à moins de spécifier si le p^{me} payement est ou non effectué.

1re *Méthode*. — La somme cherchée est le solde du compte courant arrêté après le p^{me} payement, soit :

$$A_p = A(1+i)^p - a(1+i)^{p-1} - a(1+i)^{p-2} - \dots$$
$$- a(1+i) - a.$$
$$A_p = A(1+i)^p - \frac{Ai(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \times \frac{(1+i)^p - 1}{i}$$
$$= A\,\frac{(1+i)^n - (1+i)^p}{(1+i)^n - 1}.$$

2e *Méthode*. — Le capital restant à amortir est la somme des amortissements qui restent encore à effectuer et sont compris dans les $(p+1)^{me}$, $(p+2)^{me}$ ... annuités.

On aura donc, en désignant par m_1 le premier amortissement :

$$A_p = m_1(1+i)^p + m_1(1+i)^{p+1} + \dots + m_1(1+i)^{n-1};$$

$$\text{d'où : } A_p = \frac{Ai}{(1+i)^n - 1} \times \frac{(1+i)^n - (1+i)^p}{i}$$

$$= A\,\frac{(1+i)^n - (1+i)^p}{(1+i)^n - 1}.$$

3° *Méthode.* — Le capital restant à amortir peut être considéré comme le capital qui doit être amorti par les annuités restant à recevoir : il est donc égal à la valeur actuelle des annuités a qui restent à recevoir escomptées au taux i.

Cette méthode de calcul est extrêmement importante. Elle est employée dans un grand nombre de cas, et repose sur ce fait évident que, à chaque instant, il y a équivalence complète entre les engagements des deux parties : débiteur et créancier. La valeur de A_p sera donc la valeur actuelle de $(n - p)$ annuités a, c'est-à-dire :

$$A_p = a\,\frac{(1+i)^{n-p} - 1}{i(1+i)^{n-p}},$$

et, en remplaçant a par sa valeur : $\dfrac{Ai(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$, on tire :

$$A_p = \frac{Ai(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \times \frac{(1+i)^{n-p} - 1}{i(1+i)^{n-p}} =$$

$$= A\,\frac{(1+i)^n - (1+i)^p}{(1+i)^n - 1}.$$

Exemple. — *Quel est le capital restant à amortir immédiatement après le* 5ième *payement des annuités remboursant un capital de* 100.000 *fr. en* 12 *ans au taux de* 3 %?

On aura :

$$A_p = 100.000\,\frac{(1,04)^{12} - (1,04)^5}{(1,04)^{12} - 1}.$$

$$A_p = 100.000 \times \frac{1,425.760.89 - 1,159.274.07}{0,425.760.89} = 62.590,72.$$

Si l'on connaissait l'annuité amortissant 100.000 fr. en 12 ans, on aurait avantage à appliquer directement la troisième méthode :

$$A_p = a \times \frac{(1{,}03)^7 - 1}{0{,}03 \times (1{,}03)^7} = 62.590{,}72.$$

120. **Calcul du capital amorti après le p^{ieme} payement.** — Ce capital est la somme arithmétique des p amortissements contenus dans les p annuités payées, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} M_p &= m_1 + m_2 + m_3 + \dots m_p \\ &= m_1 + m_1(1+i) + m_1(1+i)^2 + \dots m_1(1+i)^{p-1} \\ &= m_1 \frac{(1+i)^p - 1}{i}. \end{aligned}$$

En remplaçant m_1 par sa valeur : $\frac{Ai}{(1+i)^n - 1}$,

$$M_p = \frac{Ai}{(1+i)^n - 1} \times \frac{(1+i)^p - 1}{i} = A\frac{(1+i)^p - 1}{(1+i)^n - 1}.$$

On constate de suite que :

$$A_p + M_p = A\frac{(1+i)^n - (1+i)^p}{(1+i)^n - 1} + A\frac{(1+i)^p - 1}{(1+i)^n - 1} = A.$$

Exemple. — *Quel est le capital amorti apès le* $5^{\text{ième}}$ *payement d'annuités remboursant* 100.000 *fr. en* 12 *ans et à* 3 % ?

$$\begin{aligned} M_p &= 100.000 \times \frac{(1{,}03)^5 - 1}{(1{,}03)^{12} - 1}, \\ &= 100.000 \times \frac{1{,}159.274.07 - 1}{1{,}425.760.89 - 1}, \\ &= 100.000 \times \frac{15.927.407}{42.576.089}, \\ &= 37.409{,}28. \end{aligned}$$

121. **Époque probable de remboursement.** — On appelle *époque probable* de remboursement d'un capital A par des annuités a en n années et au taux i, l'époque à laquelle la moitié du capital est remboursée.

Le problème du calcul de l'époque probable se ramène immédiatement aux précédents en écrivant que

$$\frac{A}{2} = A_p = M_p.$$

On aura : $$\frac{A}{2} = A\,\frac{(1+i)^n - (1+i)^p}{(1+i)^n - 1},$$

ou : $$(1+i)^n - 1 = 2(1+i)^n - 2(1+i)^p,$$

et enfin : $$2(1+i)^p = (1+i)^n + 1.$$

$(1+i)^p$ est donc la moyenne arithmétique des deux nombres $(1+i)^n$ et 1.

La connaissance de l'époque probable de remboursement ne présente aucun intérêt pratique ; elle est toujours supérieure à $\frac{n}{2}$, ainsi que le montre la forme de la courbe indiquant la variation de la valeur de capitalisation de 1 franc après n années (voir graphique du n° 89).

Exemple. — *Quelle est l'époque probable de remboursement d'une dette de* 100.000 *fr. amortie par une annuité calculée à* 3 % *et payable pendant* 12 *ans ?*

On a : $$(1+i)^p = \frac{1+(1+i)^n}{2} = \frac{1+(1{,}03)^{12}}{2}.$$

Calcul par les tables financières.

$$(1{,}03)^{12} = 1{,}425.760.89$$

$$1 + (1{,}03)^{12} = 2{,}425.760.89.$$

$$\frac{1+(1{,}03)^{12}}{2} = 1{,}212.880.44.$$

On trouve que

$$(1{,}03)^6 = 1{,}194.052.30,$$
$$(1{,}03)^7 = 1{,}229.873.87.$$

La valeur de p est donc comprise entre 6 et 7 ans :

$$p = 6 + \frac{1{,}212.880.44 - 1{,}194.052.30}{1{,}229.873.87 - 1{,}194.052.30} = 6 \text{ ans } 191 \text{ jours.}$$

Il est à remarquer que les remboursements se faisant *annuellement* la valeur fractionnaire de p ne peut être comprise qu'en faisant une hypothèse sur la possibilité d'un remboursement dans l'intervalle d'une année et en capitalisant au taux équivalent correspondant à la période indiquée.

122. **Payements équivalents.** — On dit que deux payements B et C à effectuer dans p et q périodes sont équivalents, pour le taux i, quand leurs valeurs actuelles sont équivalentes ; on aura donc :

$$\frac{B}{(1+i)^p} = \frac{C}{(1+i)^q}.$$

On peut remplacer (comme on l'a fait précédemment) B et C par des suites de payements et généraliser en disant :

Deux suites de payements B, B′, B″, ... payables dans p, p', p'', ... périodes et C, C′, C″, ... payables dans q, q', q'', ... périodes sont équivalentes pour le taux i quand les sommes des valeurs actuelles des payements de chaque suite sont égales, c'est-à-dire si :

$$\frac{B}{(1+i)^p} + \frac{B'}{(1+i)^{p'}} + \dots$$
$$= \frac{C}{(1+i)^q} + \frac{C'}{(1+i)^{q'}} + \dots$$

On peut prendre l'époque de valeur actuelle, absolument quelconque : si par exemple on la prenait d périodes avant celle résultant de la formule précédente, on diviserait chaque terme par $(1 + i)^d$ et l'égalité subsisterait.

Cette égalité n'est d'ailleurs vraie que pour le taux i, et l'on ne peut remplacer la suite B, B′, ... par la suite C, C′, ... que pour ce taux.

Si l'on remplace i par i' l'égalité ne subsiste plus, mais le sens de l'inégalité dépend essentiellement des valeurs de B, B′, ..., C, C′, ... et des périodes p, p', ..., q, q', etc...

123. **Echéance moyenne d'une suite de payements.** — On peut se proposer d'appliquer la notion précédente à la recherche de l'échéance moyenne d'une suite de payements ; le problème consiste à déterminer l'époque à laquelle le payement unique de la somme arithmétique des payements successifs équivaut à leur payement normal.

On aurait en désignant par x cette époque :

$$\frac{B}{(1+i)^p} + \frac{B'}{(1+i)^{p'}} + \dots = \frac{B + B' \dots}{(1+i)^x},$$

la valeur de x se dégage facilement de cette égalité.

124. **Echéance moyenne d'annuités.** — Un cas particulier intéressant, *au point de vue calcul*, est celui dans lequel les payements successifs B, B′, ... sont égaux à une annuité a remboursant un capital A.

On a dans ce cas, en prenant la valeur actuelle des annuités à l'origine du contrat :

$$\frac{a}{(1+i)} + \frac{a}{(1+i)^2} + \dots = A = \frac{na}{(1+i)^x}.$$

d'où :

$$(1+i)^x = \frac{na}{A} = \frac{ni(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = \frac{ni}{1-(1+i)^{-n}}.$$

On rencontre la fonction étudiée par M. Achard dans la détermination de la valeur de i : ce sont d'ailleurs des considérations sur les échéances moyennes qui l'ont conduit à imaginer sa remarquable méthode.

Exemple. — *A quelle époque doit-on payer la somme arithmétique des 12 annuités remboursant un capital de 100.000 fr. à 3 % pour qu'il n'y ait ni perte ni gain ?*

$$(1{,}03)^x = \frac{12 \times 0{,}03 \times \overline{1{,}03}^{12}}{\overline{1{,}03}^{12} - 1}.$$

Calcul par les tables de logarithmes. — En prenant les logarithmes on aura :

$$x \lg 1{,}03 = \lg 12 + \lg 0{,}03 + \lg \overline{1{,}03}^{12} - \lg\left[\overline{1{,}03}^{12} - 1\right]$$

$$\begin{aligned}
\lg 12 &= 1{,}079.181.25 \\
\lg 0{,}03 &= \bar{2}{,}477.121.25 \\
\lg \overline{1{,}03}^{12} &= 0{,}154.046.64 \\
-\lg\left[\overline{1{,}03}^{12} - 1\right] &= 0{,}370.834.12 \\
&\overline{\quad 0{,}081.183.26 \quad}
\end{aligned}$$

Calculs auxiliaires :

$$\begin{aligned}
\lg 1{,}03 &= 0{,}012.837.22 \\
12 \lg 1{,}03 &= 0{,}154.046.64 \\
\overline{1{,}03}^{12} &= 1{,}425.761 \\
\overline{1{,}03}^{12} - 1 &= 0{,}425.761 \\
\lg\left[\overline{1{,}03}^{12} - 1\right] &= \bar{1}{,}629.165.88
\end{aligned}$$

$$x = \frac{0{,}081.183.26}{0{,}012.837.22} = 6 \text{ ans } 118 \text{ j}^{\text{rs}}.$$

125. **Echéance moyenne des amortissements contenus dans une suite d'annuités constantes.** — Soient m_1, m_2, ... les amortissements successifs contenus

dans les annuités a amortissant le capital A en n périodes, leur échéance moyenne sera déterminée par l'égalité :

$$\frac{m_1}{1+i} + \frac{m_2}{(1+i)^2} + \frac{m_3}{(1+i)^3} + \ldots =$$
$$= \frac{m_1 + m_2 + \ldots}{(1+i)^x} = \frac{A}{(1+i)^x}.$$

En remarquant que :

$$\frac{m_1}{(1+i)} = \frac{m_2}{(1+i)^2} = \frac{m_3}{(1+i)^3} \ldots$$

on a :

$$\frac{A}{(1+i)^x} = \frac{nm_1}{(1+i)} = n\frac{Ai}{(1+i)^n - 1} \times \frac{1}{1+i};$$

d'où : $$(1+i)^x = \frac{[(1+i)^n - 1](1+i)}{ni}.$$

La valeur de x est toujours supérieure à $\frac{n}{2}$ parce que les amortissements vont en croissant constamment ; elle ne présente aucun intérêt pratique.

Exemple. — *Déterminer l'échéance moyenne des amortissements successifs du tableau d'amortissement de* 100.000 fr. *à* 3 $^0/_0$ *en* 12 *ans ?*

Calcul par les tables financières.

$$(1,03)^x = \frac{[(1,03)^{12} - 1] \times 1,03}{12 \times 0,03} = 1,218.149.21.$$

On trouve dans les tables financières :

$$(1,03)^6 = 1,194.052.30, \quad \text{et} \quad (1,03)^7 = 1,229.873.87.$$

Donc x est compris entre 6 et 7 ans et l'on aura par interpolation :

$$x = 6 + \frac{1,21814921 - 1,19405230}{1,22987387 - 1,19405230} = 6 \text{ ans } 246 \text{ jours.}$$

La période fractionnaire correspond, comme on l'a indiqué, à une capitalisation au taux équivalent à 0,03 pour cette même période.

126. **Epoque moyenne de remboursement d'un capital amorti par annuités constantes (intérêt simple).** — On peut calculer l'*époque moyenne de remboursement* d'un capital A amorti par n payements a au taux i, c'est-à-dire l'époque à laquelle on devrait payer A en une seule fois pour remplacer les paiements successifs d'amortissement m_1, m_2 ... *si l'intérêt était simple*.

C'est en somme le problème de *l'échéance moyenne* dans le cas particulier de l'égalité du payement unique et de la somme arithmétique des payements successifs.

On aura, en désignant par x le nombre de périodes indiquant l'époque moyenne inconnue :

$$x \times A = m_1 + 2m_2 + 3m_3 + \dots + nm_n.$$

Pour calculer le second membre, on multiplie les deux termes de l'égalité par $(1 + i)$:

$$\begin{aligned} x \times A \times (1 + i) &= m_1 (1 + i) + 2m_2 (1 + i) + \\ &+ 3m_3 (1 + i) + \dots + nm_n (1 + i) \\ &= m_2 + 2m_3 + 3m_4 + \dots + nm_n (1 + i). \end{aligned}$$

D'où, en retranchant membre à membre la 1^{re} égalité de la précédente :

$$\begin{aligned} x \times A \times i &= nm_n (1 + i) - m_1 - m_2 \dots - m_n, \\ &= n \frac{Ai(1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1} - A, \end{aligned}$$

$$\text{et} \quad x = \frac{n(1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1} - \frac{1}{i} = n + \frac{n}{(1 + i)^n - 1} - \frac{1}{i}.$$

Cette valeur n'a aucun intérêt pratique.

EXEMPLE. — *Quelle est l'époque moyenne de remboursement de* 100.000 fr. *à amortir en* 12 *ans à* 3 %?

Par les tables financières :

$$x = 12 + \frac{12}{0{,}42576089} - \frac{1}{0{,}03} = 6 \text{ ans } 311 \text{ jours.}$$

127. **Echéance moyenne des intérêts contenus dans une suite d'annuités constantes.** — La question précédente relative aux amortissements peut être résolue en considérant les intérêts. Soient I_1, I_2 ... les intérêts successifs; ils sont égaux respectivement à : $(a - m_1)$; $(a - m_2)$ ... etc. et leur somme sera :

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 + \ldots &= (a - m_1) + (a - m_2) + \ldots = \\ &= na - m_1 - m_2 - \ldots = \\ &= na - A. \end{aligned}$$

L'égalité qui permettra de calculer l'échéance moyenne de ces intérêts sera donc :

$$\frac{a - m_1}{(1 + i)} + \frac{a - m_2}{(1 + i)^2} + \ldots = \frac{na - A}{(1 + i)^x},$$

ou :

$$\underbrace{\frac{a}{1+i} + \frac{a}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{a}{(1+i)^n}} - \underbrace{\frac{m_1}{(1+i)} - \frac{m_2}{(1+i)^2} - \ldots}$$

$$= \frac{na - A}{(1+i)^x}.$$

Soit : $$A - \frac{nm_1}{(1+i)} = \frac{na - A}{(1+i)^x}.$$

D'où :

$$A - \frac{nAi}{(1 + i)[(1 + i)^n - 1]} = \frac{\dfrac{Ani(1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1} - A}{(1 + i)^x},$$

et $$(1 + i)^x = \frac{ni(1 + i)^n - (1 + i)^n + 1}{(1 + i)[(1 + i)^n - 1] - ni}(1 + i).$$

EXEMPLE. — *Quelle est l'échéance moyenne des intérêts successifs payés d'après le tableau d'amortissement de* 100.000 fr, *en* 12 *ans à* 3 %?

Par les tables de logarithmes.

$$(1+i)^x = \frac{(1+i)^n(ni-1)+1}{(1+i)\left[(1+i)^n-1\right]-ni}(1+i).$$

Dans le cas de formules un peu complexes, comme la précédente, il y a toujours avantage à faire directement les calculs simples ; on aura par exemple :

$$(1{,}03)^x = \frac{(1{,}03)^{12}\left[12\times 0{,}03-1\right]+1}{1{,}03\left[\overline{1{,}03}^{12}-1\right]-12\times 0{,}03}\times 1{,}03.$$

Soit, en se servant des résultats calculés précédemment par logarithmes :

$$(1{,}03)^x = \frac{1-1{,}425761\times 0{,}64}{1{,}03\times 0{,}425761-0{,}36} = \frac{0{,}087513}{0{,}078534}\times 1{,}03,$$

$$x = \frac{\lg 0{,}087513 - \lg 0{,}078534 + \lg 1{,}03}{\lg 1{,}03}$$

$$= \frac{\bar{2}{,}94207257 - \bar{2}{,}89505772 + 0{,}01283722}{0{,}01283722}$$

$$= 4{,}662 = 4 \text{ ans } 242 \text{ jours.}$$

128. — **Relations diverses résultant des formules générales.** Les formules générales liant A, a, i et n permettent d'établir un certain nombre de relations qui peuvent simplifier les calculs.

129. **Limites de a et de A quand n augmente.** — Si le nombre de périodes, après lequel le solde du compte courant $A(1+i)^n - a(1+i)^{n-1} - a(1+i)^{n-2} \ldots$ devient nul, augmente indéfiniment, on dira que A est rem-

boursé par le payement d'une *rente perpétuelle* a : A est donc la valeur actuelle de cette rente perpétuelle.

La formule générale peut s'écrire :

$$A = \frac{a}{i}\left[1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right].$$

Quand n augmente indéfiniment $\frac{1}{(1+i)^n}$ tend vers zéro et A tend vers $\frac{a}{i}$.

La valeur d'une rente perpétuelle a est donc obtenue en divisant le terme de rente par le taux d'intérêt et le terme de rente est égal à Ai, c'est-à-dire à l'intérêt simple du capital.

Une rente perpétuelle ne rembourse jamais le capital A : c'est donc le moyen le plus absurde de contracter un emprunt, et cependant c'est celui auquel tous les États ont recours, même pour effectuer des travaux n'ayant qu'une utilité temporaire.

130. **Relation entre la rente perpétuelle et la rente temporaire.**

On a :
$$A = \frac{a}{i} - \frac{a}{i} \times \frac{1}{(1+i)^n}.$$

La valeur actuelle d'une annuité temporaire a payable pendant n périodes est donc la différence entre la valeur d'une rente perpétuelle $\frac{a}{i}$ immédiate et d'une rente perpétuelle différée de n périodes.

(On rappelle qu'une annuité est dite *immédiate* ou à terme échu si le 1er payement à lieu une période après le contrat ; elle est *anticipée* ou payable d'avance si le

1er payement coïncide avec l'époque du contrat ; elle est *différée* de p périodes si le 1er payement a lieu $(p + 1)$ périodes après le contrat.)

Exemple. — *Quelle est la valeur actuelle de* 23 *annuités de* 1.000 fr. *au taux de* 3 %?

1° *Calcul approximatif* :

$$A = \frac{1.000}{0,03} - \frac{1.000}{0,03} \times \frac{1}{(1 + i)^{23}}.$$

On sait que à 3 % en 23 ans un capital devient double par le jeu de la capitalisation $(1,03)^{23} = 2$, approximativement.

$$A = \frac{1.000}{0,03}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{500}{0,03} = 16.670 \text{ fr.}$$

2° *Calcul par les tables financières* :

$$A = \frac{1.000}{0,03} - \frac{1\ 000}{0,03} \times 0,50669175 = 16.443,60.$$

131. **Relation entre les valeurs actuelles de $(n + 1)$ annuités et de n annuités a.** — Soient A_{n+1} et A_n ces deux valeurs déterminées par les égalités suivantes :

$$A_{n+1} = \frac{a}{1 + i} + \frac{a}{(1 + i)^2} + \dots + \frac{a}{(1 + i)^n} + \frac{a}{(1 + i)^{n+1}},$$

$$A_n = \frac{a}{1 + i} + \frac{a}{(1 + i)^2} + \dots + \frac{a}{(1 + i)^n}.$$

En multipliant les deux membres de la première égalité par $(1 + i)$, on a :

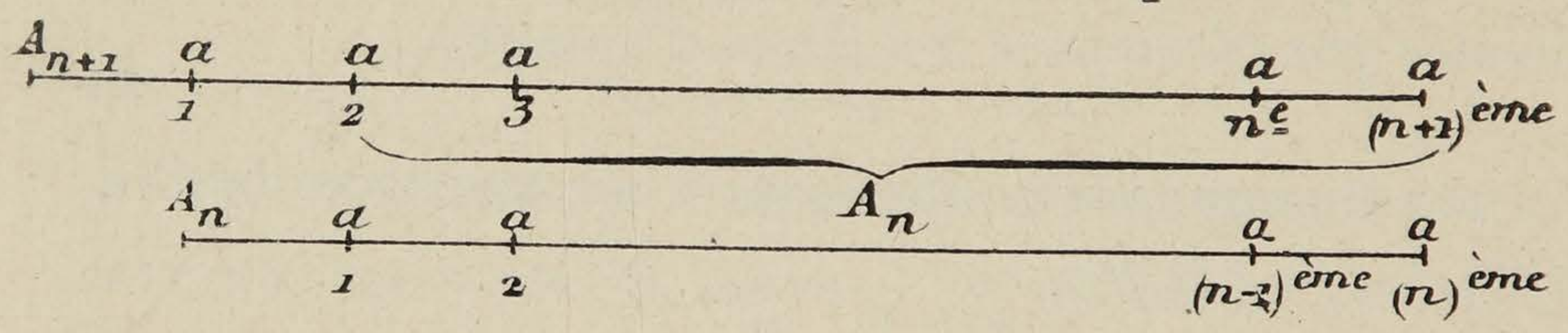
$$A_{n+1}(1 + i) = a + \frac{a}{1 + i} + \frac{a}{(1 + i)^2} + \dots + \frac{a}{(1 + i)^n} = a + A_n.$$

La différence entre A_{n+1} et A_n diminue quand n augmente, et tend vers zéro quand n croît indéfiniment.

La relation précédente permet de calculer par récurrence des tables de valeurs actuelles, quand $a = 1$, on a :

$$A_{n+1} = \frac{1 + A_n}{1 + i}.$$

Cette formule s'établit directement par la simple comparaison des deux échelles ci-dessous, représentant les payements dans les deux cas, et l'on voit que :



A_{n+1} = valeur actuelle de $(a + A_n)$ payable dans une période.

132. **Relation entre l'annuité a_{n+1} et l'annuité a_n amortissant A en $(n + 1)$ et n périodes.** — On a, en désignant par A_n et A_{n+1} les valeurs actuelles de $(n + 1)$ et n annuités de 1 fr.

$$a_{n+1} \times A_{n+1} = A$$
$$a_n \times A_n = A.$$

D'où :

$$A_{n+1} = \frac{A}{a_{n+1}},$$
$$A_n = \frac{A}{a_n},$$

et en remplaçant A_n et A_{n+1} par leurs valeurs dans la relation établie au n° 131 :

$$A_{n+1}(1 + i) = 1 + A_n,$$

on aura :
$$\frac{A}{a_{n+1}}(1+i) = 1 + \frac{A}{a_n}$$

ou bien :
$$a_{n+1} = A\,\frac{a_n(1+i)}{A+a_n}.$$

Cette relation se vérifie en remplaçant a_{n+1} et a_n par leurs valeurs en fonction de A :

$$\frac{A \times i \times (1+i)^{n+1}}{(1+i)^{n+1}-1} \quad \text{et} \quad \frac{A \times i \times (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}.$$

En supposant $A = 1$, la relation précédente permet de calculer par récurrence des tables d'annuités.

133. **Forme particulière de a en fonction de l'intérêt Ai.** — On a :

$$a = \frac{Ai}{1-(1+i)^{-n}}$$
$$= Ai\,[1 + (1+i)^{-n} + (1+i)^{-2n} + \ldots].$$

a est donc la valeur actuelle des intérêts Ai payables immédiatement, dans n, $2n$, ... périodes.

Les termes $(1+i)^{-n}$, $(1+i)^{-2n}$ ... ne décroissent pas assez rapidement pour les valeurs usuelles de n et la formule indiquée ne permet pas le calcul pratique de a.

134. **Amortissement des emprunts avec la condition des « Anticipativen Zinsen ».** — Dans les études précédentes, on a supposé l'intérêt payé à terme échu, ainsi que cela se passe dans la plupart des pays d'Europe, sauf en Europe centrale.

En Autriche-Hongrie et en Bavière on rencontre des emprunts pour lesquels on paye l'intérêt d'avance : ce régime s'appelle « Anticipativen Zinsen » par opposition au système des intérêts échus ou « Decursiven Zinsen ».

Au moment même de l'emprunt le débiteur paye Ai ; à la fin de la première période il paye un amortissement m_1 et l'intérêt $(A - m_1)i$ de la somme restant due ; à la fin de l'avant-dernière période, il paye $m_n i + m_{n-1}$ et à la fin de la dernière, m_n.

Pour que les payements complets comprenant de l'intérêt et de l'amortissement soient égaux, il faut qu'en désignant par A_p et A_{p+1} les capitaux restant à amortir après les p^{me} et $(p+1)^{me}$ amortissements, on ait :

$$a = A_p i + m_p = A_{p+1} i + m_{p+1},$$

d'où :

$$m_p = m_{p+1}(1 - i),$$

car :

$$A_{p+1} = A_p - m_{p+1}.$$

Les amortissements forment une suite en progression géométrique croissante de raison $\frac{1}{1-i}$ qui permet de calculer le premier ; on aura en effet :

$$A = m_1 + \frac{m_1}{(1-i)} + \frac{m_1}{(1-i)^2} + \dots + \frac{m_1}{(1-i)^{n-1}}$$

$$= m_1 \frac{\frac{1}{(1-i)^n} - 1}{\frac{1}{1-i} - 1} = m_1 \frac{1 - (1-i)^n}{i(1-i)^n}(1-i);$$

d'où :

$$m_1 = \frac{Ai(1-i)^n}{1 - (1-i)^n} \times \frac{1}{1-i}.$$

Si l'on pose $\frac{1}{1-i} = 1 + t$ on aura :

$$A = m_1 \frac{(1+t)^n - 1}{t}, \quad \text{ou :} \quad m_1 = \frac{At}{(1+t)^n - 1}.$$

On se trouve donc amené à considérer un emprunt ordinaire amorti par les sommes m_1, m_2, calculées au taux $t = \frac{i}{1-i}$, et suivant la méthode des « Decursiven Zinsen ».

La valeur de l'annuité constante est :

$$a = m_1 + (A - m_1)i = Ai + m_1(1 - i)$$
$$= Ai + \frac{Ai(1-i)^n}{1-(1-i)^n} = \frac{Ai}{1-(1-i)^n}.$$

Si l'on remplace i par $\frac{t}{1+t}$ et $A(1-i) = \frac{A}{1+t}$ par B,

on a : $a = \frac{Bt(1+t)^n}{(1+t)^n - 1}$, formule ordinaire des annuités.

Le système des « Anticipativen Zinsen » est donc identique à celui des « Decursiven Zinsen » en remplaçant le taux réel i par le taux t qui résulte de l'égalité $t = \frac{i}{1-i}$ et le capital A par un nouveau capital $\frac{A}{1+t} = A(1-i)$.

La dernière annuité m_n ne comprendra que de l'amortissement ; elle sera égale à

$$m_n = m_1 \frac{1}{(1-i)^{n-1}} = \frac{Ai}{1-(1-i)^n}$$

c'est bien l'annuité constante a.

Il y a lieu de remarquer que le capital réellement reçu par le débiteur est seulement $A - Ai = A(1-i)$; il en résulte que l'emprunt qu'il contracte n'est pas fait exactement au taux i.

Il s'effectue à un taux supérieur à i égal à : $\frac{i}{1-i}$.

En effet, la valeur actuelle des n annuités a, escomptées au taux $\frac{i}{1-i}$, est égale à :

$$x = \frac{Ai}{1-(1-i)^n} \times \frac{\left(1 + \frac{i}{1-i}\right)^n - 1}{\frac{i}{1-i}\left(1 + \frac{i}{1-i}\right)^n}$$

$$= \frac{Ai}{1-(1-i)^n} \times \frac{1-(1-i)^n}{i}(1-i) = A(1-i),$$

qui est bien la valeur reçue par l'emprunteur.

La méthode des « Anticipativen Zinsen » donne la même annuité que si l'on amortissait le capital $A(1 - i)$ au taux $\frac{i}{1-i}$, mais la marche de l'amortissement n'est pas la même.

La considération de la dernière annuité payée suffit à montrer cette différence dans le système « Anticipativen Zinsen ». Cette dernière annuité ne comprend que de l'amortissement ; dans le système ordinaire, elle comprendrait de l'intérêt et de l'amortissement ; ce dernier serait égal à :

$$\frac{a}{1 + \frac{i}{1-i}} = a(1 - i).$$

C'est l'avant-dernier amortissement de la méthode des « Anticipativen Zinsen ».

De même le premier amortissement serait dans la méthode ordinaire : $$\frac{A(1-i)\frac{i}{1-i}}{\left(1 + \frac{i}{1-i}\right)^n - 1} = \frac{Ai(1-i)^n}{1-(1-i)^n},$$

c'est-à-dire le produit du premier amortissement de la méthode « Anticipativen » par $(1 - i)$.

Il n'y a donc pas identité dans la marche des deux amortissements.

M. Muraï, attaché au bureau de statistique de Budapest, a calculé des tables très complètes relatives aux « Anticipativen Zinzen ».

Exemple. — *Dresser le tableau d'amortissement de* 100.000 fr. *en* 12 *ans à* 3 % *d'après la méthode des « Anticipativen Zinsen ».*

Pour établir ce tableau, on calcule d'abord a, puis le premier amortissement $m_1 = a(1 - i)^{n-1}$, soit directement, soit en procédant de proche en proche, ce qui donne les amortissements successifs.

La somme de ces amortissements doit donner A.

On fait ensuite les calculs d'intérêts successifs sur les capitaux restant à amortir et l'on vérifie que le total des intérêts et des amortissements est constant et égal à l'annuité.

ANNÉES	CAPITAL RESTANT DÛ AU COMMENCEMENT DE CHAQUE ANNÉE	INTÉRÊTS à 3%	AMORTISSEMENT	ANNUITÉS	OBSERVATIONS
Époque		3000 »	»	3000 »	$a = \dfrac{3000}{1 - \overline{0,97}^{12}}$
1	100000	2789,72	7009,15	9798,87	
2	92990,85	2572,95	7225,92	9798,87	$\lg 0,97 = \bar{1},98677173$
3	85764,93	2349,46	7449,41	9798,87	$12 \lg 0,97 = \bar{1},84126076$
4	78315,52	2119,07	7679,80	9798,87	$\overline{0,97}^{12} = 0,6938423$
5	70635,72	1881,55	7917,32	9798,87	$a = \dfrac{3000}{0,3061577}$
6	62718,40	1636,68	8162,19	9798,87	
7	54556,21	1384,24	8414,63	9798,87	$= 9798,872$
8	49141,58	1124 »	8674,87	9798,87	
9	37466,71	855,70	8943,17	9798,87	
10	28523,54	579,11	9219,76	9798,87	
11	19303,78	293,96	9504,91	9798,87	
12	9798,87	»	9798,87	9798,87	
	686216,11	20586,44	100000 »	120586,44	

On peut vérifier que l'amortissement du capital

$$A(1 - i) = 100.000\ (1 - 0,03) = 97.000 \text{ fr.},$$

donnerait la même valeur d'annuité au taux :

$$\frac{i}{1 - i} = \frac{0,03}{0,97} = 0,030927835.$$

Cette annuité serait en effet :

$$a = \frac{97.000 \times 0,030927835 \times \overline{1,030927835}^{12}}{\overline{1,030927835}^{12} - 1} = 9798,87.$$

Mais il n'y a pas identité des tableaux d'amortissements ainsi que le montre le tableau ci-après dressé sur 97.000 fr. au taux de 0,030927835.

ANNÉES	CAPITAL RESTANT DÛ AU COMMENCEMENT DE CHAQUE ANNÉE	INTÉRÊTS à 3,0927835 %	AMORTISSEMENT	ANNUITÉ CONSTANTE	OBSERVATIONS
1	97 000	3000 »	6798,87	9798,87	
2	90 201,13	2789,70	7009,15	9798,87	
3	83 191,98	2572,95	7225,92	9798,87	
4	75 966,06	2349,46	7449,41	9798,87	
5	68 516,65	2119,06	7679,81	9798,87	
6	60 836,84	1881,55	7917,32	9798,87	
7	52 919,52	1636,68	8162,19	9798,87	
8	44 757,33	1384,25	8414,62	9798,87	
9	36 342,71	1124 »	8674,87	9798,87	
10	27 667,84	855,70	8943,17	9798,87	
11	18 724,67	579,11	9219,76	9798,87	
12	9 504,91	293,96	9504,91	9798,87	

135. **Prêts hypothécaires.** — Les prêts hypothécaires sont des avances consenties par des capitalistes à des propriétaires d'immeubles, et ayant comme garantie la valeur de ces immeubles.

Le montant du prêt est variable et ne dépasse pas en général la moitié ou les deux tiers de la valeur de l'immeuble.

Le remboursement, effectué par annuités, est gagé sur les revenus de l'immeuble.

Le Crédit Foncier perçoit, pour l'estimation des immeubles :

20 fr. pour les demandes inférieures à 10.000 fr. ;

30 fr. pour les demandes de 10.001 fr. à 30.000 fr.

Pour les demandes supérieures à 30.001 fr. il perçoit deux droits :

a. un droit d'expertise de 1 fr. par 1.000 fr. demandés ;

b. un droit d'examen des titres de 1 fr. par 1.000 fr. accordés.

Le droit d'expertise est payé au moment du dépôt de la demande ; le droit d'examen des titres est dû, même si l'emprunteur retire sa demande.

En cas de remboursement anticipé, il est dû une indemnité de 0,50 % du capital remboursé.

Les annuités sont payables par semestre et calculées au taux moitié du taux annuel énoncé dans les conditions du prêt.

Ainsi le Crédit Foncier énonçant le taux de 4,30 % calcule les payements par semestrialités au taux de 2,15 %, et, dans ses tableaux, il indique la somme arithmétique des deux payements semestriels qu'il appelle « annuité ».

Ce sont des usages regrettables, qui créent des erreurs d'interprétation.

Pour trouver les sommes nécessaires aux prêts, le Crédit Foncier émet des obligations et réalise un bénéfice par la différence entre les annuités qu'il reçoit et les charges en intérêt et amortissement qu'il paye à ses obligataires.

La théorie générale de l'amortissement s'applique aux calculs de prêts hypothécaires consentis dans des conditions normales permettant d'appliquer les formules trouvées précédemment.

Mais dans la pratique on se trouve souvent en présence de modalités qui, sans modifier les calculs, créent des différences rendant moins facile la solution des questions relatives au capital restant à rembourser.

C'est ainsi que certains capitalistes calculent les termes à payer d'une manière très critiquable, en divisant l'annuité par le nombre de termes.

Il en résulte que l'emprunteur paye d'avance une partie de l'amortissement qui n'est dû qu'en fin d'année, et que son taux réel d'intérêt est plus élevé que celui indiqué au contrat.

Soit A, le capital emprunté au taux i, remboursable en n années, l'annuité $a = \frac{Ai(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$ étant payable par fraction fa.

L'emprunteur paye réellement, en tenant compte de la capitalisation au taux x équivalent à i :

$$fa\left[(1+x)^{\frac{1}{f}-1} + (1+x)^{\frac{1}{f}-2} + \ldots + 1\right],$$

ou :

$$\frac{fa(1+x)^{\frac{1}{f}} - 1}{x} = fa\,\frac{i}{x},$$

en remarquant que : $\quad 1 + i = (1+x)^{\frac{1}{f}}$.

Le payement effectif $a \times \frac{fi}{x}$ est d'autant plus élevé que f est plus petit, c'est-à-dire que le fractionnement de l'annuité est plus grand.

Dans le cas d'un payement fractionnaire, si le remboursement anticipé a lieu dans le courant d'un exercice, la recherche de la somme due est assez délicate, ainsi que le montre l'exemple suivant :

Exemple. — *Un prêt de 48.000 fr. est consenti le 20 juillet 1897 : il est remboursable par annuités calculées à 3,90 °/₀ et payables par 1/4 les 20 octobre 1897, 20 janvier 1898, 20 avril, etc., jusqu'au 20 juillet 1957 inclus.*

On demande de calculer la somme à payer pour remboursement anticipé le 21 mai 1907, en tenant compte de l'indemnité de 0 fr. 50 °/₀ ?

L'annuité est due pendant 60 ans ; sa valeur est :

$$48.000 \times \frac{0{,}039 \times \overline{1{,}039}^{60}}{\overline{1{,}039}^{60} - 1} = 48.000 \times 0{,}043.367.5 = 2081{,}64.$$

Le capital restant dû après l'amortissement complet d'une annuité effectuée le 20 juillet 1906, soit 9 ans après le premier payement, est :

$$2.081,64 \times \frac{\overline{1,039}^{51} - 1}{0,039 \times \overline{1,039}^{51}} = 2.081,64 \times 21,997.323$$
$$= 45.790,51.$$

Le payement suivant, qui devrait avoir lieu le 20 juillet 1907 si l'annuité était payable à terme échu, comprendrait l'intérêt de cette somme de 45.790,51 soit 1.785,83, et un amortissement 2.081,64 — 1.785,83 = 295,81.

Mais il a été payé par avance trois termes :

$$\left.\begin{array}{l} \text{le 20 octobre 1906 : } 520,41 \\ \text{le 20 janvier 1907 : } 520,41 \\ \text{le 20 avril 1907 : } 520,41 \end{array}\right\} \text{au total } 1.561,23.$$

On *admet* en général que ces termes contiennent une part égale d'amortissement, ce qui est à l'avantage de l'emprunteur, soit en l'espèce $\frac{3}{4}$ de 295,81 = 221,86.

La dette effective comprendra donc :

Le capital restant à rembourser 45.790,51 — 221,86 =	45 568,65
L'indemnité de 0,50 % sur ce capital . .	227,84
Les intérêts courus depuis le 20 juillet 1906 au 21 mai 1907 sur le capital de 45.790,51 soit : $\frac{45.790,51 \times 305 \times 0,039}{365} = 1.492,27$ sous déduction des intérêts déjà payés dans les trois premiers quarts : 1.561,23 — 221,86 = 1.339,37	152,90
Soit au total.	45.949,39

CHAPITRE VI

AMORTISSEMENT PAR ANNUITÉS VARIABLES

136. **Annuités en progression arithmétique.** — Soit r la raison de la progression, on aura les annuités successives : a, $a + r$, $a + 2r$, ... $a + (n - 1)r$.

La valeur actuelle de ces annuités est :

$$A = \frac{a}{1+i} + \frac{a+r}{(1+i)^2} + \dots \frac{a+(n-1)r}{(1+i)^n}.$$

Pour simplifier cette expression, on la compare avec celle obtenue en multipliant ses deux membres par $(1 + i)$:

On a : $$A(1+i) = a + \frac{a+r}{1+i} + \dots \frac{a+(n-1)r}{(1+i)^{n-1}},$$

$$A(1+i) - A = a + \left(\frac{a+r}{1+i} - \frac{a}{1+i}\right) +$$

$$+ \dots + \left(\frac{a+(n-1)r}{(1+i)^{n-1}} - \frac{a+(n-2)r}{(1+i)^{n-1}}\right) - \frac{a+(n-1)r}{(1+i)^n}.$$

$$Ai = a\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n} + r\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} - \frac{nr}{(1+i)^n}.$$

Pour mettre la formule sous une forme plus commode pour les calculs on ajoute et on retranche nr ; on a ainsi :

$$Ai = a\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n} + \frac{r}{i}\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n} + nr -$$

$$-\frac{nr}{(1+i)^n} - nr = \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n}\left[a + nr + \frac{r}{i}\right] - nr,$$

et enfin : $$A = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\left[a + nr + \frac{r}{i}\right] - n\frac{r}{i}.$$

Cette formule s'établit par d'autres méthodes dont la connaissance peut servir dans quelques cas.

La valeur actuelle des annuités variables comprend :

1° la valeur actuelle de n annuités a, soit $a\dfrac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$;

2° la valeur actuelle de suites d'annuités temporaires r différées de 1, 2, 3 ... $(n - 1)$ périodes.

Or chacune de ces suites est la différence entre la valeur d'une rente perpétuelle r différée d'un certain nombre de périodes 1, 2, ... $(n - 1)$ et la valeur d'une rente perpétuelle $(n - 1)r$ différée de $(n - 1)$ années.

La valeur actuelle des premières est :

$$\frac{r}{i}\left[\frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \dots \frac{1}{(1+i)^{n-1}}\right] =$$

$$\frac{r}{i}\frac{(1+i)^n - (1+i)}{i(1+i)^n} = \frac{r}{i}\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} - \frac{r}{i}\frac{1}{(1+i)^n}.$$

La valeur actuelle des termes soustractifs est :

$$(n-1)\frac{r}{i}\frac{1}{(1+i)^n} = \frac{nr}{i}\frac{1}{(1+i)^n} - \frac{r}{i}\frac{1}{(1+i)^n}.$$

On a donc :

$$A = a\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} + \frac{r}{i}\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} - \frac{nr}{i}\frac{1}{(1+i)^n}.$$

En ajoutant et retranchant $\frac{nr}{i}$ à cette formule, il vient comme précédemment :

$$A = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\left[a + nr + \frac{r}{i}\right] - \frac{nr}{i}.$$

Enfin un troisième raisonnement conduit au même résultat comme suit ;

La valeur actuelle des annuités a, $a + r$, ... comprend la valeur actuelle $a \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$ des n termes a et la valeur actuelle des termes r, $2r$, ..., $(n-1)r$.

Or ces termes sont les intérêts au taux i obtenus par le placement successif de capitaux $\frac{r}{i}$ à la fin de la 1re année, de la 2e, etc., ... de la $(n-1)^{\text{ième}}$ année.

On peut donc dire que la valeur actuelle des intérêts est égale à la valeur actuelle des capitaux successivement placés :

$$\frac{r}{i}\,\frac{(1+i)^n - (1+i)}{i(1+i)^n},$$

diminuée de la valeur actuelle du remboursement de ces capitaux à la fin de la $n^{\text{ième}}$ année, soit :

$$(n-1)\frac{r}{i}\,\frac{1}{(1+i)^n},$$

et on retrouve ainsi le résultat obtenu ci-dessus par le deuxième mode de raisonnement.

Exemple. — *Quelle est la valeur actuelle de 15 annuités croissant chaque année de 1.000 fr. dont la 1re est 10.000 fr. si le taux d'intérêt est 4 %?*

$$A = \frac{\overline{1{,}04}^{15} - 1}{0{,}04 \,.\, \overline{1{,}04}^{15}}\left[10.000 + 1.000 \times 15 + \frac{1.000}{0{,}04}\right]$$
$$- \frac{15 \times 1.000}{0{,}04} = 180.919{,}37.$$

137. **Progression décroissante.** — La formule précédente s'applique même si r est négatif ; en mettant le signe de r en évidence, elle devient :

$$A = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\left[a - \frac{r}{i} - nr\right] + \frac{nr}{i}.$$

Exemple. — *Quelle est la valeur actuelle de* 15 *annuités, décroissantes de* 1.000 *fr. par an, dont la* 1^re^ *est* 24.000 *fr., si le taux est* 4 %?

$$A = 11{,}118.387.43\left[24.000 - \frac{1.000}{0{,}04} - 15 \times 1.000\right]$$
$$+ \frac{15 \times 1.000}{0{,}04} = 197.105{,}80.$$

La somme des annuités des deux exemples précédents est 34.000 fr.

On peut vérifier que la valeur actuelle de 15 annuités de 34.000 fr., soit :

$$34.000 \times 11{,}118.387.43 = 378.025{,}17,$$

est égale à la somme des deux valeurs précédemment obtenues :

$$180.919{,}37 + 197.105{,}80 = 378.025{,}17.$$

138. **Cas particulier de la progression décroissante.** — Si $r = \frac{a}{n}$, le $(n+1)^{\text{ième}}$ terme de la progression est nul et la formule précédente devient :

$$A = \frac{a}{i} - \frac{a}{ni}\,\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} = \frac{a}{i}\left[1 - \frac{1}{n}\,\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right].$$

Exemple. — *Dresser le tableau d'amortissement de* 100.000 *fr. en* 8 *ans au taux de* 4 %, *sachant que les an-*

nuités décroissantes sont des multiples successifs de la 8me annuité?

En désignant par a la 1re annuité, on aura :

$$100.000 = \frac{a}{0{,}04}\left[1 - \frac{1}{8} \times 6{,}732.744.87\right].$$

$$a = \frac{4.000}{1 - 0{,}841.593.11} = 25.251{,}42.$$

Connaissant la 1re annuité, il sera dès lors facile de dresser le tableau d'amortissement suivant, en procédant année par année.

ANNÉES	CAPITAL RESTANT DU AU COMMENCEMENT DE L'ANNÉE	INTÉRÊTS	ANNUITÉ	AMORTISSEMENT
1	100 000	4 000	25 251,42	21 251,42
2	78 748,58	3 149,94	22 094,99	18 945,05
3	59 803,53	2 392,12	18 938,57	16 546,45
4	43 257,08	1 730,28	15 782,14	14 051,86
5	29 205,22	1 168,21	12 625,71	11 457,50
6	17 747,72	709,91	9 469,28	8 759,37
7	8 988,35	359,54	6 312,86	5 953,32
8	3 035,03	121,40	3 156,43	3 035,03

Le capital restant dû à une époque quelconque se calculerait par la valeur actuelle des annuités restant encore à payer.

139. **Annuités comprenant un amortissement constant.** — On rencontre quelquefois un mode de règlement, dans lequel on paye périodiquement une portion fixe, $\frac{A}{n}$, du capital, et un intérêt décroissant constamment : l'annuité totale décroît donc d'une quantité constante égale à $\frac{Ai}{n}$ et la 1re annuité est : $a = Ai + \frac{A}{n}$.

On a : $r = \frac{Ai}{n}$, et la formule qui lie la 1re annuité au capital s'écrit :

$$A = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\left[a - \frac{Ai}{ni} - n\frac{Ai}{n}\right] + \frac{nAi}{ni}.$$

Elle se réduit à :

$$A = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\left(a - \frac{A}{n} - Ai\right) + A\,;$$

d'où : $a - \frac{A}{n} - Ai = 0$, soit : $a = \frac{A}{n} + Ai$, ce qui vérifie bien la formule indiquée.

Exemple. — *Etablir le tableau d'amortissement de* 100.000 *fr. en 5 ans, en supposant que l'on amortisse une somme constante chaque année ; taux 3 %.*

ANNÉES	CAPITAL RESTANT A AMORTIR AU COMMENCEMENT DE CHAQUE ANNÉE	INTÉRÊTS	AMORTISSEMENT	ANNUITÉS
1	100 000 »	3 000 »	20 000 »	23 000 »
2	80 000 »	2 400 »	20 000 »	22 400 »
3	60 000 »	1 800 »	20 000 »	21 800 »
4	40 000 »	1 200 »	20 000 »	21 200 »
5	20 000 »	600 »	20 000 »	20 600 »

140. **Annuités comprenant un amortissement multiple du 1er amortissement.** — Soit m_1 le 1er amortissement et m_2, m_3, ... les amortissements successifs multiples du 1er ; on aura :

$$m_1 + 2m_1 + 3m_1 + \ldots + nm_1 = A,$$

ou : $$m_1(1 + 2 + \ldots + n) = m_1\frac{n(n+1)}{2} = A\,;$$

d'où : $$m_1 = \frac{2A}{n(n+1)}.$$

Cette formule permet de dresser le tableau d'amortissement du capital A de période en période, mais on peut se proposer de trouver la formule générale donnant l'annuité évidemment variable.

La k^{me} annuité doit comprendre le k^{me} amortissement : km_1 et l'intérêt des $(n - k + 1)$ termes d'amortissement à payer, soit :

$$\begin{aligned} a_k &= km_1 + i[km_1 + (k+1)m_1 + \dots + nm_1] \\ &= m_1\left[k + i\frac{n+k}{2}(n - k + 1)\right] \\ &= m_1 \times i \times \frac{n}{2}(n+1) + m_1k\left(1 + \frac{i}{2}\right) - m_1\frac{i}{2}k^2 \\ &= \mathrm{A}i + m_1\left(1 + \frac{i}{2}\right)k - \frac{m_1 i}{2}k^2. \end{aligned}$$

L'annuité est donc une fonction du second degré du temps écoulé depuis le contrat jusqu'à son payement.

Exemple. — *Établir le tableau d'amortissement de* 60.000 *fr. en* 5 *ans à* 3 % *si les amortissements successifs sont multiples du* 1^er^.

On a : $m_1 = \frac{2\mathrm{A}}{n(n+1)} = \frac{2 \times 60.000}{5 \times 6} = 4.000.$

La valeur de l'annuité sera :

$$a_k = 1.800 + 4.060\,k - 60\,k^2.$$

Pour calculer les valeurs successives de a_k on remarque que les différences secondes sont constantes et l'on dresse le tableau suivant :

NUMÉROS D'ORDRE	VALEURS DES ANNUITÉS	DIFFÉRENCES PREMIÈRES	DIFFÉRENCES SECONDES
1	5 800		
2	9 680	3 880	
3	13 440	3 760	— 120
4	17 080	3 640	— 120
5	20 600	3 520	— 120

On a calculé directement les trois premières annuités :

$$a_1 = 1.800 + 4.060 - 60 = 5.800$$
$$a_2 = 1.800 + 8.120 - 240 = 9.680$$
$$a_3 = 1.800 + 12.180 - 540 = 13.440,$$

On détermine ainsi les deux différences premières 3.880 et 3.760 et la différence seconde 120.

A l'aide de cette dernière et de la différence première 3.760, on calcule les différences premières relatives aux 4^{me} et 5^{me} annuités, puis ces annuités.

On conçoit que ce procédé très simple puisse rendre de réels services si le nombre d'annuités est grand.

Le tableau d'amortissement serait le suivant :

ANNÉES	CAPITAL RESTANT A AMORTIR AU COMMENCEMENT DE CHAQUE ANNÉE	INTÉRÊTS	AMORTISSEMENTS	ANNUITÉS
1	60 000	1 800	4 000 »	5 800
2	56 000	1 680	8 000 »	9 680
3	48 000	1 440	12 000 »	13 440
4	36 000	1 080	16 000 »	17 080
5	20 000	600	20 000 »	20 600

Maximum des annuités. — La formule indiquée précédemment présente l'avantage de faire passer les annuités par des valeurs particulières pour des valeurs spéciales de i et de k.

En l'ordonnant par rapport à k, l'égalité précédente s'écrit :

$$\frac{m_1 i}{2} k^2 - m_1\left(1 + \frac{i}{2}\right)k + a_k - \text{A}i = 0,$$

k sera réel si :

$$m_1^2\left(1 + \frac{i}{2}\right)^2 - 4\,\frac{m_1 i}{2}\,(a_k - \text{A}i) > 0.$$

Ce qui donne : $a_k < \dfrac{m_1(2 + i)^2}{8i} + \text{A}i,$

a_k passe donc par un maximum pour :

$$k = \frac{m_1\left(1 + \frac{i}{2}\right)}{2\frac{m_1 i}{2}} = \frac{1 + \frac{i}{2}}{i} = \frac{1}{i} + \frac{1}{2}.$$

Pour $i = 0{,}03$, par exemple, l'annuité passera par un maximum pour

$$k = \frac{1}{0{,}03} + \frac{1}{2} = 33{,}83.$$

Les 33e et 34e annuités seront donc les plus fortes, puisque k varie toujours par unités.

Exemple. — *Quel sera le payement maximum à faire si l'on amortit* 93.000 *fr. à* 5 % *en* 30 *ans par des annuités comprenant des amortissements multiples du premier ?*

On a d'abord :

$$m_1 = \frac{2A}{n(n+1)} = \frac{2 \times 93.000}{30 \times 31} = 200 \text{ fr.}$$

Le maximum aura lieu pour $k = 21$ et $k = 22$; d'où en remplaçant dans

$$a_k = Ai + m_1 \times \left(1 + \frac{i}{2}\right)k - \frac{m_1 i}{2} k^2 :$$

$$a_{21} = 4.650 + 200 \times 1{,}025 \times 21$$
$$- \frac{200 \times 0{,}05}{2} \times 21^2 = 6.750 \text{ fr.} ;$$

$$a_{22} = 4.650 + 200 \times 1{,}025 \times 22$$
$$- \frac{200 \times 0{,}05}{2} \times \overline{22}^2 = 6.740 \text{ fr.}$$

L'amortissement contenu dans la 21me annuité est

$$21 \times 200 = 4.200 \text{ fr.}$$

La 22me annuité comprendra donc en moins l'intérêt de cette somme : $4.200 \times 0{,}05 = 210$ fr., et en plus 200 fr.

d'amortissement : elle sera donc inférieure à la 21^{me} de 10 fr., ce que l'on constate ci-dessus.

141. **Annuités en progression géométrique**. — Soient a, aq, aq^2, ..., aq^{n-1} les annuités successives ; leur valeur actuelle sera :

$$A = \frac{a}{1+i} + \frac{aq}{(1+i)^2} + \dots + \frac{aq^{n-1}}{(1+i)^n}.$$

Les termes de cette suite forment une progression géométrique de raison $\frac{q}{1+i}$, on a donc :

$$A = a\frac{q^n - (1+i)^n}{[q-(1+i)](1+i)^n}.$$

Si l'on pose $q = 1 + x$, la formule prend une forme symétrique que l'on retrouvera à propos des obligations :

$$A = a\frac{(1+x)^n - (1+i)^n}{(x-i)(1+i)^n}.$$

Quand x tend vers i, A tend vers la valeur :

$$\frac{a}{1+i} + \frac{a(1+i)}{(1+i)^2} + \dots + \frac{a(1+i)^{n-1}}{(1+i)^n} = n\frac{a}{1+i}.$$

Exemple. — *Quelle est la valeur au taux de 4 % des amortissements d'un capital de* 100.000 *fr. amorti en* 12 *ans à* 3 % ?

Les amortissements successifs forment une suite en progression géométrique de raison $q = 1{,}03$.

On a donc :

$$A = \frac{100.000 \times 0{,}03}{\overline{1.03}^{12} - 1} \times \frac{\overline{1{,}04}^{12} - \overline{1{,}03}^{12}}{0{,}01 \times \overline{1{,}04}^{12}} = 77.137{,}67.$$

DEUXIÈME PARTIE

OPÉRATIONS RELATIVES A UN CAPITAL DIVISÉ EN COUPURES

CHAPITRE PREMIER

ÉMISSION DE TITRES REMBOURSABLES PAR TIRAGE AU SORT

142. **Généralités.** — La nécessité d'emprunter des sommes importantes pour faire des constructions ou des travaux publics a naturellement amené une modification dans la forme d'emprunt étudié précédemment.

Devant l'impossibilité de trouver un seul prêteur, on a divisé la somme à emprunter en coupures de valeur variable appelées obligations. Par le contrat passé entre le souscripteur de l'obligation et le banquier émetteur du titre, ce dernier s'engage à payer au premier un intérêt annuel, et à lui rembourser la valeur de la somme empruntée ou une valeur supérieure.

Il aurait été très commode d'admettre que l'émission se ferait au pair, c'est-à-dire que le prix d'émission serait identique au prix de remboursement. On aurait pu, dans ce cas, payer au souscripteur une annuité constante. Il se serait chargé de faire la part de l'intérêt et de l'amortissement des sommes versées, et il aurait pu reconstituer son capital.

Ce procédé était trop simple, et l'on a compliqué les combinaisons afin de permettre aux banquiers de se procurer de l'argent au meilleur marché possible, en laissant entrevoir une hausse problématique des titres.

Le moyen le plus usité consiste à émettre des titres d'une valeur nominale déterminée, rapportant un intérêt spécifié d'après un taux appelé taux nominal, et à un prix d'émission le plus souvent inférieur au capital nominal. Dans la généralité des cas, l'amortissement du capital nominal se fait d'après le taux nominal et avec des annuités constantes.

Chaque annuité est décomposée en deux parties, dont l'une sert à payer l'intérêt aux obligations non amorties ; la seconde est divisée en parties égales au capital de remboursement (qui est en général le capital nominal de chaque titre), et ces parts sont tirées au sort entre les obligations non encore amorties, dont quelques-unes sont ainsi remboursées.

On aurait pu concevoir un autre mode de remboursement consistant à donner chaque année, à tous les possesseurs de titres, le quotient de l'amortissement divisé par le nombre de titres initial ; mais ce mode de remboursement n'est pas employé dans la pratique.

Le taux d'intérêt simple touché par le souscripteur est plus élevé que le taux nominal, mais toujours moins élevé que le taux réel du marché. Pour faire accepter cette diminution, on fait entrevoir la possibilité d'un remboursement à une échéance rapprochée.

C'est, en définitive, une simple loterie, dans laquelle ceux qui sont remboursés très tôt gagnent beaucoup plus que ceux qui sont remboursés dans les dernières périodes.

En réalité, la prime au remboursement, c'est-à-dire la différence entre le capital nominal et le prix d'émission, ne représente pas autre chose que l'excès de l'intérêt que l'on aurait dû payer, d'après le taux réel de l'emprunt, sur l'intérêt effectivement servi d'après le taux nominal.

143. **Construction d'un tableau d'amortissement.** — Si l'on désigne par N le nombre de titres de l'émission et par C le capital nominal de chacun d'eux, le capital nominal total NC sera la somme A considérée jusqu'ici, laquelle doit être amortie en n années au taux i.

L'annuité fixe sera : $a = \dfrac{NCi(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$.

Dans le calcul pratique, on sépare toujours l'intérêt de l'amortissement afin de pouvoir obtenir cette annuité avec plus de chiffres exacts :

$$a = NCi + \frac{NCi}{(1+i)^n - 1}.$$

Le nombre d'obligations amorties la première année s'obtiendra en divisant l'amortissement $\dfrac{NCi}{(1+i)^n - 1}$ par C ; et l'on aura : $N_1 = \dfrac{Ni}{(1+i)^n - 1}$.

Ce nombre est égal au premier amortissement de N au taux i en n années.

On pourrait donc se dispenser d'établir des tableaux complets d'amortissement de titres, puisque la détermination du nombre des obligations amorties chaque année peut se faire directement.

Il suffirait de calculer N_1, puis de le multiplier par $(1 + i)$, ce qui donne le nombre de titres à amortir la seconde année N_2, que l'on multiplie par $(1 + i)$, ce qui donne N_3, nombre des titres à amortir la troisième année, etc.

Mais si l'on ne prend aucune précaution, le nombre obtenu par l'addition des nombres partiels ainsi calculés ne représente pas N, en raison des forcements d'unités que l'on a opérés dans le courant du calcul.

Aussi préfère-t-on dresser un tableau complet tenant compte des différences entre l'annuité théorique a amortissant NC, et l'annuité payée effectivement égale à la somme des intérêts et des amortissements des titres.

Exemple. — *Dresser le tableau d'amortissement de* 600.000 *obligations* 500 *fr.* 3 %₀ *émises le* 1er *janvier* 1894 *et dont les tirages d'amortissement doivent avoir lieu le* 31 *décembre de chaque année jusqu'au* 31 *décembre* 1958 *inclus.*

Du 31 décembre 1894 au 31 décembre 1958 inclus, il y a 65 tirages d'amortissement.

On aura donc :

$$a = 600.000 \times 500 \times 0{,}03 + \frac{600.000 \times 500 \times 0{,}03}{1{,}03^{65} - 1} =$$

$$= 10.543.743{,}85.$$

La 1re année on amortira :

$$\frac{10.543.743{,}85 - 9.000.000}{500} = 3.087 \text{ titres (par défaut)}$$

nécessitant une somme de 1.543.500 fr. et laissant disponible sur l'annuité théorique 243,85.

Ce reliquat, capitalisé à 3 %₀, deviendra au bout d'un an

251,17 et augmentera l'annuité théorique de la seconde année qui sera :

$$10.543.743,85 + 251,17 = 10.543\,995,02.$$

L'intérêt des 600.000 — 3.087 = 596.913 titres en circulation au commencement de la seconde année absorbera :

$$596.913 \times 500 \times 0,03 = 8.953.695 \text{ fr.}$$

laissant disponible pour l'amortissement :

$$10.543.995,02 - 8.953.695 = 1.590.300,02 \text{ fr.}$$

Cette somme permet d'amortir :

$$\frac{1.590.300,02}{500} = 3.180 \text{ titres (par défaut)}$$

avec un capital de : 3.180 × 500 = 1.590.000 fr.

Le reliquat est donc :

$$1.590.300,02 - 1.590.000 = 300,02.$$

Il portera intérêt pendant une année et s'ajoutera à l'annuité constante... et ainsi de suite.

Pratiquement, on commence par déterminer des points de repère afin d'éviter des accumulations d'erreur et l'on calcule de 10 en 10 ans soit le nombre de titres à amortir, soit le nombre de titres amortis à l'aide des formules indiquées précédemment :

nombre de titres à amortir :

$$= \frac{600.000 \times 0,03}{\overline{1,03}^{65} - 1} \times \overline{1,03}^{9} \quad \text{pour la dixième année,}$$

$$= \frac{600.000 \times 0,03}{\overline{1,03}^{65} - 1} \times \overline{1,03}^{19} \quad \text{pour la vingtième année,}$$

etc. . . . .

EMPRUNT DE

Nos	ANNÉE DU TIRAGE	SOMME DUE AU COMMENCEMENT DE L'ANNÉE	INTÉRÊTS A 3 %	SOMME DISPONIBLE CHAQUE ANNÉE		DIFFÉRENCE ENTRE LA SOMME DISPONIBLE ET LES INTÉRÊTS	
1	2	3	4	5		6	
1	1894	300 000 000	9 000 000	10 543 743	85	1 543 743	85
2	1895	298 456 500	8 953 695	10 543 995	02	1 590 300	02
3	1896	296 866 500	8 905 995	10 544 052	87	1 638 057	87
4							
5							
6							
7							
63	1956	29 824 500	894 735	10 544 100	64	9 649 365	64
64	1957	20 175 500	605 265	10 544 120	47	9 938 855	47
65	1958	10 237 000	307 110	10 544 110	»	10 237 000	»

Annuité totale. 10 543 743,85 Nombre de titres : 600 000

600 000 OBLIGATIONS

NOMBRE D'OBLIGATIONS AMORTIES CHAQUE ANNÉE	TOTAL DES OBLIGATIONS AMORTIES A LA FIN DE CHAQUE ANNÉE	NOMBRE D'OBLIGATIONS RESTANT A AMORTIR	SOMME AMORTIE CHAQUE ANNÉE	RESTE SUR LA SOMME A REMBOURSER		INTÉRÊTS DE CE RESTE		SOMME DU RESTE ET DE SES INTÉRÊTS	
7	8	9	10	11		12		13	
3 087	3 087	596 913	1 543 500	243	85	7	32	251	17
3 180	6 267	593 733	1 590 000	300	02	9	00	309	02
3 276	9 543	590 457	1 638 000	57	87	1	74	59	61
19 298	559 649	40 351	9 649 000	365	64	10	98	376	62
19 877	579 526	20 474	9 938 500	355	47	10	68	366	15
20 474	600 000	0	10 237 000	»	»	»	»	»	»
600 000			300 000 000						

Coefficient de série. $\frac{10\,543\,743.85}{600\,000} = 17$ f. 57290642.

ou nombre de titres amortis :

$$= \frac{600.000 \times \left[\overline{1{,}03}^{10} - 1\right]}{\overline{1{,}03}^{65} - 1} \text{ à la fin de la dixième année,}$$

$$= \frac{600.000 \times \left[\overline{1{,}03}^{20} - 1\right]}{\overline{1{,}03}^{65} - 1} \text{ à la fin de la vingtième année,}$$

etc. . . . .

Il est facile de déterminer les dernières lignes du tableau en remarquant que :

$$N_{65} = N_1 \times (1 + i)^{64}$$

$$= \frac{a}{1 + i} = \frac{10.543.743{,}85}{1{,}03} = 10.236.644{,}51.$$

Comme il ne peut pas rester de reliquat à la fin de la soixante-cinquième année il est nécessaire que l'amortissement ait absorbé : 10.237.000 fr. correspondant à 20.474 titres.

L'annuité totale de la soixante-cinquième année comprend donc : $20.474 \times (0{,}03 \times 500) + 20.474 \times 500$
$= 20.474 \times 515 = 10.544.110.$

Le reliquat de l'exercice précédent devait donc être avec ses intérêts : $10.544.110 - 10.543.743{,}85 = 366{,}15$.

On peut ainsi reconstituer les chiffres portés au tableau ci-dessus (p. 230 et 231).

144. **Vie probable des titres d'un emprunt.** — On appelle vie probable des titres d'un emprunt le nombre de périodes après lequel la moitié des titres de l'emprunt est amortie.

Soit k ce nombre de périodes à partir de l'émission.

Le nombre d'obligations amorties après le k^{me} amortissement est :

$$\frac{Ni}{(1 + i)^n - 1} \times \frac{(1 + i)^k - 1}{i} = N \frac{(1 + i)^k - 1}{(1 + i)^n - 1}.$$

Si ce nombre est égal à $\frac{N}{2}$, k sera déterminé par l'égalité :

$$\frac{N}{2} = N\frac{(1+i)^k - 1}{(1+i)^n - 1};$$

d'où :

$$(1+i)^n - 1 = 2(1+i)^k - 2,$$

et :

$$(1+i)^k = \frac{(1+i)^n + 1}{2}.$$

k est donc déterminé de la même manière que l'époque probable de remboursement d'une somme (v. p. 195 n° 121).

Cette époque k est aussi peu intéressante que celle correspondant à l'amortissement du $^1/_3$, du $^1/_4$ ou de toute autre fraction.

On lui attribuait autrefois une importance sans aucune raison. Elle sert cependant aux tribunaux pour fixer le cours auquel doivent être admises les obligations de sociétés en déconfiture parmi les créanciers. Il faut espérer que cette coutume qui ne repose sur aucune base solide, sera modifiée.

Exemple. — *Quelle est la vie probable des obligations d'un emprunt de* 600.000 *titres* 3 $^0/_0$ *amortissable en* 65 *ans ?*

Le nombre de titres importe peu, puisque k est indépendant de sa valeur ;

on a : $$(1{,}03)^k = \frac{(1{,}03)^{65} + 1}{2} = 3{,}914.991.36.$$

On trouve dans les tables :

$$(1{,}03)^{46} = 3{,}895.043.72 \quad \text{et :} \quad (1{,}03)^{47} = 4{,}011.895.03\,;$$

d'où :

$$k = 46 + \frac{3{,}914.991\ 36 - 3{,}895.043.72}{4{,}011.895.03 - 3{,}895.043.72} = 46 \text{ ans } 62 \text{ jours.}$$

La période fractionnaire ne présente aucun intérêt, puisque les remboursements sont opérés annuellement.

145. **Probabilité à l'origine, de la sortie d'un titre d'après le tableau d'amortissement à l'origine.** — La probabilité, à l'origine, de la sortie d'une obligation à un tirage déterminé est le quotient du nombre d'obligations à amortir à ce tirage par le nombre total d'obligations. *A l'origine* la probabilité de sortie d'une obligation au $(k+1)^{me}$ tirage est donc :

$$\frac{\frac{Ni}{(1+i)^n-1}(1+i)^k}{N}=\frac{i(1+i)^k}{(1+i)^n-1}.$$

Cette probabilité augmente avec le nombre k.

La somme des probabilités de sorties aux 1^{er}, 2^{me}, n^{me} tirages est : $\frac{i}{(1+i)^n-1}\left[1+(1+i)+\ldots+(1+i)^{n-1}\right]$

$$=\frac{i}{(1+i)^n-1}\times\frac{(1+i)^n-1}{i}=1,$$

ce qui était évident.

On pourrait aussi résoudre la question, en considérant que la probabilité de sortie d'un titre à un tirage déterminé est le produit de deux probabilités, la première, égale à celle de l'existence du titre avant le k^{me} tirage ; la deuxième, égale à celle de la sortie à ce tirage la k^{me} année.

146. **Probabilité, à l'origine, de l'existence d'un titre immédiatement avant le $(k+1)^{me}$ tirage.** — Pour qu'un titre existe à ce $(k+1)^{me}$ tirage, il faut qu'il fasse partie des titres à amortir à partir de cette époque, dont le nombre est :

$$N_1(1+i)^k+\ldots+N_1(1+i)^{n-1}=N_1\frac{(1+i)^n-(1+i)^k}{i}.$$

Le nombre de titres étant N, la probabilité est :

$$\frac{N_1}{N}\cdot\frac{(1+i)^n-(1+i)^k}{i}=\frac{(1+i)^n-(1+i)^k}{(1+i)^n-1}.$$

Pour $k = 0$, c'est-à-dire avant le premier tirage, la probabilité est : $\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n - 1} = 1$, comme on devait s'y attendre.

147. Probabilité de sortie d'un titre à un tirage déterminé.

1° *Immédiatement avant ce tirage.*

Au $(k+1)^{me}$ tirage il sortira $N_1(1+i)^k$ titres ; à cette époque il existe encore :

$$N_1(1+i)^k + \ldots + N_1(1+i)^{n-1} = N_1 \frac{(1+i)^n - (1+i)^k}{i}.$$

La probabilité de la sortie d'un titre au $(k+1)^{me}$ tirage, en supposant que l'on soit arrivé dans l'année de ce tirage, est donc :

$$\frac{N_1(1+i)^k}{N_1 \frac{(1+i)^n - (1+i)^k}{i}} = \frac{i(1+i)^k}{(1+i)^n - (1+i)^k}.$$

Pour $k+1 = n$, on trouve que la probabilité se réduit à : $\frac{i(1+i)^{n-1}}{(1+i)^n - (1+i)^{n-1}} = \frac{i(1+i)^{n-1}}{(1+i)^{n-1}[1+i-1]} = 1.$

2° *A l'origine.*

La probabilité de sortie d'un titre au $(k+1)^{me}$ tirage étant le produit des deux probabilités précédentes sera :

$$\frac{(1+i)^n - (1+i)^k}{(1+i)^n - 1} \times \frac{i(1+i)^k}{(1+i)^n - (1+i)^k} = \frac{i(1+i)^k}{(1+i)^n - 1}.$$

C'est bien la formule trouvée par le raisonnement direct.

3° *Vérification.*

Si l'on additionne les probabilités de sortie à l'origine aux 1^{er}, 2^{me} ... k^{me} tirages, on trouve :

$$\sum_1^k \frac{i(1+i)^{k-1}}{(1+i)^n - 1} = \frac{i}{(1+i)^n - 1} \cdot \frac{(1+i)^k - 1}{i}$$

$$= \frac{(1+i)^k - 1}{(1+i)^n - 1}.$$

Cette probabilité représente la probabilité de sortie d'un titre pendant les k premières années : elle est *complémentaire* de la probabilité d'existence d'un titre avant le $(k+1)^{me}$ tirage (n° 146) ; on a en effet :

$$\frac{(1+i)^n-(1+i)^k}{(1+i)^n-1}+\frac{(1+i)^k-1}{(1+i)^n-1}=1.$$

148. **Vie probable d'un titre.** — On peut se proposer de trouver le nombre d'années x tel que la probabilité de sortie d'un titre dans les x premiers tirages soit $\frac{1}{2}$.

Il suffit de remplacer k par x dans la formule de la probabilité de sortie d'un titre avant le $(k+1)^{me}$ tirage (n° 147-3°).

x sera déterminé par la formule :

$$\frac{1}{2}=\frac{(1+i)^x-1}{(1+i)^n-1}, \quad \text{d'où :} \quad (1+i)^x=\frac{(1+i)^n+1}{2}.$$

On retrouve le résultat indiqué précédemment (n° 144).

Il faut remarquer que si la probabilité, à l'origine, de sortie d'un titre avant cette x^{me} année est $\frac{1}{2}$, la probabilité de sortie au $(x+1)^{me}$ tirage est très faible.

Elle est en effet (n° 147) :

à l'origine : $$\frac{i(1+i)^x}{(1+i)^n-1}=\frac{i}{2}\frac{(1+i)^n+1}{(1+i)^n-1};$$

avant le tirage même :

$$\frac{i(1+i)^x}{(1+i)^n-(1+i)^x}=i\frac{(1+i)^n+1}{(1+i)^n-1};$$

c'est-à-dire le double de la probabilité précédente, ce qui est évident *à priori*.

Elle est voisine de i si n est assez grand.

Exemple. — *Dans une émission de titres à amortir en 65 ans par des annuités fixes calculées à 3 %, quelle est la probabilité de sortie d'un titre :*

Au 3^me^ tirage pendant la seconde année (I); *à l'origine pour le 3^me^ tirage* (II); *avant le 3^me^ tirage* (III)?

I. La probabilité de sortie au 3^me^ tirage est, pendant la

2^me^ année, (n° 147-1°) : $\dfrac{0{,}03 \times \overline{1{,}03}^{2}}{\overline{1{,}03}^{65} - \overline{1{,}03}^{2}} = 0{,}005.52.$

II. La probabilité de sortie au 3^me^ tirage est, *à l'origine*,

(n° 147-2°) : $\dfrac{0{,}03 \times \overline{1{,}03}^{2}}{\overline{1{,}03}^{65} - 1} = 0{,}005.46.$

III. La probabilité de sortie du titre avant le 3^me^ tirage

est, (n° 147-3°) : $\dfrac{\overline{1{,}03}^{2} - 1}{\overline{1{,}03}^{65} - 1} = 0{,}010.45.$

149. **Vie moyenne des obligations.** — Si l'on considère le total des années, pendant lesquelles chacune des obligations a été en circulation, le quotient de ce nombre par le nombre de titres émis est la vie moyenne des obligations. N_1, N_2, ..., N_n représentant les nombres d'obligations amorties successivement, on voit que les premières ont vécu N_1 ans, les deuxièmes $2 \times N_2$ ans, etc.

Le total des années vécues est donc :

$$\begin{aligned} T &= N_1 + 2N_2 + \dots + nN_n \\ &= N_1[1 + 2(1+i) + \dots + n(1+i)^{n-1}]. \end{aligned}$$

Pour calculer cette expression, que l'on a déjà rencontrée, on multiplie les deux membres par $(1+i)$; il vient :

$$T(1+i) = N_1\left[(1+i) + 2(1+i)^2 + \ldots + n(1+i)^n\right],$$

et en retranchant :

$$\begin{aligned} Ti &= N_1\left[n(1+i)^n - (1+i)^{n-1} - \ldots - 1\right] \\ &= \frac{Ni}{(1+i)^n - 1}\left[n(1+i)^n - \frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]. \end{aligned}$$

La vie moyenne d'un titre étant égale à $\frac{T}{N}$, on aura :

$$\begin{aligned} \frac{T}{N} &= \frac{1}{(1+i)^n - 1}\left[n(1+i)^n - \frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] \\ &= n + \frac{n}{(1+i)^n - 1} - \frac{1}{i}. \end{aligned}$$

Cette formule ne présente aucun intérêt pratique, malgré l'importance, non raisonnée, que l'on attribuait autrefois à la vie moyenne.

Exemple. — *Quelle est la vie moyenne des titres d'un emprunt amortissable en 65 ans dont les annuités constantes sont calculées à 3 °/₀ ?*

On aura :

$$\frac{T}{N} = 65 + \frac{65}{5{,}829.982.73} - \frac{1}{0{,}03} = 42 \text{ ans } 298 \text{ jours.}$$

150. **Calcul du prix d'émission d'obligations à un taux d'intérêt déterminé.** — Si l'on émet les titres *au pair*, c'est-à-dire si l'obligataire donne C en échange de l'engagement pris par l'emprunteur de payer annuellement

Ci et de rembourser le capital C au plus dans n années, le taux réel d'emprunt est exactement le taux nominal.

Si l'on considère, en effet, une obligation remboursable la $k^{\text{ième}}$ année, k étant quelconque, sa valeur V, c'est-à-dire le prix que doit payer l'obligataire pour que le taux d'intérêt de son prêt soit i, est la somme des valeurs actuelles escomptées au taux i des coupons Ci qu'il touchera et du remboursement C payable à la fin de la $k^{\text{ième}}$ année, soit :

$$V = \frac{Ci}{(1+i)} + \frac{Ci}{(1+i)^2} + \dots + \frac{Ci}{(1+i)^k} + \frac{C}{(1+i)^k} =$$

$$= Ci\,\frac{(1+i)^k - 1}{i(1+i)^k} + \frac{C}{(1+i)^k} = C.$$

Dans la pratique, les emprunteurs émettent au-dessous du pair en s'engageant néanmoins à servir l'intérêt Ci et à rembourser C à chaque titre, conformément à un tableau d'amortissement dressé à l'origine de telle manière que l'annuité totale soit, en général, constante.

Il en résulte que l'égalité du capital touché NV et de la valeur actuelle des annuité constantes ne se produit plus pour le taux d'intérêt nominal i, mais pour un certain taux x que l'on appelle taux *effectif*, taux *réel* de l'emprunt.

Le problème financier que l'on se pose dans la pratique peut donc se présenter sous deux formes :

I. Ayant obtenu un capital NV en émettant des titres au capital nominal C rapportant annuellement Ci et amortissables par annuités constantes en n années, rechercher le taux *effectif* d'emprunt ?

II. Etant donné le taux *effectif* d'intérêt que l'on veut offrir aux souscripteurs, quelle est la somme NV, que l'on peut se procurer en émettant N titres de capital nominal C rapportant Ci et amortissables en n années par annuités constantes ?

Le taux d'intérêt offert dépend du taux général du marché au moment de l'émission et de la sécurité de l'entreprise. Il sert donc à rémunérer normalement le capital et à payer une sorte de prime d'assurance pour la perte éventuelle pouvant résulter des aléas inhérents à toute affaire commerciale ou industrielle.

MÉTHODES DE CALCULS

1^re^ MÉTHODE. — Soient x le taux d'intérêt offert à l'ensemble des souscripteurs, N le nombre d'obligations émises au capital nominal C, rapportant annuellement Ci et amortissables en n années par annuités constantes. Le banquier offre en échange du capital NV qu'il reçoit le service de n annuités $\frac{NCi(1+i)^n}{(1+i)^n-1}$, à escompter au taux x. On aura donc :

$$NV = \frac{NCi(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\,\frac{(1+x)^n-1}{x(1+x)^n};$$

d'où :

$$V = \frac{Ci(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\,\frac{(1+x)^n-1}{x(1+x)^n}.$$

2^e^ MÉTHODE. — Soit B_p une obligation remboursable certainement dans p années. Sa valeur actuelle au taux x, c'est-à-dire son prix d'émission, est égale à la valeur actuelle des intérêts Ci à recevoir annuellement et du capital C remboursé dans p années. On aura donc :

$$B_p = Ci \frac{(1 + x)^p - 1}{x(1 + x)^p} + \frac{C}{(1 + x)^p}$$
$$= \frac{Ci}{x} + \frac{C(x - i)}{x} \frac{1}{(1 + x)^p}.$$

Cette valeur représente la valeur d'une rente perpétuelle Ci augmentée de la valeur actuelle d'une rente perpétuelle différée égale à la différence entre Cx et Ci. La valeur de cette dernière rente est d'ailleurs égale à la valeur différée d'une rente perpétuelle Ci.

Si, maintenant, on considère un souscripteur achetant toute les obligations, il devra payer B_1 pour les N_1 obligations remboursables la première année, ..., B_p pour les N_p remboursables la $p^{ème}$ année, etc. ; et la valeur totale de souscription sera :

$$NV = N_1B_1 + N_2B_2 + \ldots + N_pB_p + \ldots + N_nB_n = \sum_{p=1}^{p=n} N_pB_p.$$

Or : $$N_p = N_1(1 + i)^{p-1} = \frac{Ni(1 + i)^{p-1}}{(1 + i)^n - 1};$$

donc : $$NV = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{Ni(1 + i)^{p-1}}{(1 + i)^n - 1} \times$$
$$\times \left[\frac{Ci}{x} + \frac{C(x - i)}{x} \times \frac{1}{(1 + x)^p}\right]$$
$$= N \frac{Ci(1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1} \times \frac{(1 + x)^n - 1}{x(1 + x)^n};$$

d'où : $$V = \frac{Ci(1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1} \times \frac{(1 + x)^n - 1}{x(1 + x)^n}.$$

C'est bien la même formule que l'on a établie précédemment.

151. **Discussion de la formule du prix d'émission.** On peut écrire :

$$V = C \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} : \frac{x(1+x)^n}{(1+x)^n - 1}.$$

On voit que si :

$$\begin{aligned} x > i, &\quad V < C \text{ — cas général} \\ x = i, &\quad V = C \\ x < i, &\quad V > C. \end{aligned}$$

De plus :

$$Vx = Ci \frac{1 - \dfrac{1}{(1+x)^n}}{1 - \dfrac{1}{(1+i)^n}}.$$

Donc si :

$$\begin{aligned} x > i, &\quad Vx > Ci \quad \text{avec} \quad V < C. \\ x = i, &\quad Vx = Ci \quad \text{avec} \quad V = C. \\ x < i, &\quad Vx < Ci \quad \text{avec} \quad V > C. \end{aligned}$$

Quand le nombre d'années est très grand, la valeur de V, qui peut s'écrire :

$$V = \frac{Ci}{x} \times \frac{(1+x)^n - 1}{(1+i)^n - 1} \times \frac{(1+i)^n}{(1+x)^n},$$

diffère assez peu de $\frac{Ci}{x}$, c'est-à-dire du prix de la rente perpétuelle Ci escomptée au taux réel x.

152. **Tables de valeurs de titres.** — M. Arnaudeau a calculé des tables de valeurs de titres 500 fr. à divers taux d'intérêt nominal, pour des taux d'intérêts réels variant par 1/8 %, de 2 1/2 % à 5 %.

Exemple. — *Une Compagnie désire se procurer une somme de* 50.000.000 fr. *au moyen d'une émission d'obligations.*

Les titres sont au capital nominal de 500 *fr. rapportant* 6,25 *par semestre et sont amortissables suivant la marche ordinaire des amortissements en* 150 *tirages semestriels coïncidant avec l'époque de payement des coupons.*

Les frais d'émission s'élèvent à 400,000 *fr., plus une commission de* 2 $^0/_0$ *de la somme brute encaissée donnée aux intermédiaires pour le placement de chaque titre.*

Quels doivent être :

Le nombre d'obligations; le prix d'émission; l'annuité à servir si le taux réel d'emprunt pour la Compagnie est de 4 $^1/_4$ $^0/_0$ *l'an?*

Soient N le nombre de titres et V le prix d'émission.

La somme NV doit être égale à la somme de 50.000.000 fr. que la Compagnie désire se procurer, augmentée des frais d'émission et de 2 $^0/_0$ de la somme brute encaissée.

On aura donc :

$$NV = 50.000.000 + 400.000 + 0,02\ NV,$$

d'où :

$$0,98\ NV = 50.400.000,$$

et :

$$NV = \frac{50.400.000}{0,98} = 51.428.571 \text{ fr.}$$

D'autre part, les obligations au capital de 500 fr. sont amorties par des semestrialités constantes calculées au taux :

$$i = \frac{6,25}{500} = 0,012.5.$$

Le taux réel annuel étant de 4 $^1/_4$ $^0/_0$ le taux réel semestriel sera 2,10289... $^0/_0$ obtenue par la formule :

$$\sqrt{1,0425} - 1 = 0,021.028.9.$$

Par suite :

$$V = 500 \times \frac{0,012.5 \times \overline{1,012.5}^{150}}{\overline{1,012.5}^{150} - 1} \times$$

$$\times \frac{(1.021.028.9)^{150} - 1}{0,021.028.9 \times (1,021.028.9)^{150}}.$$

Dans la pratique il est inutile de conserver beaucoup de décimales, V étant généralement calculé au franc, et au plus au centime près ; on aurait ainsi :

$$V = \frac{7.397.74 \times 21.683.2}{0,021.029 \times 22,683.2} = 336,28.$$

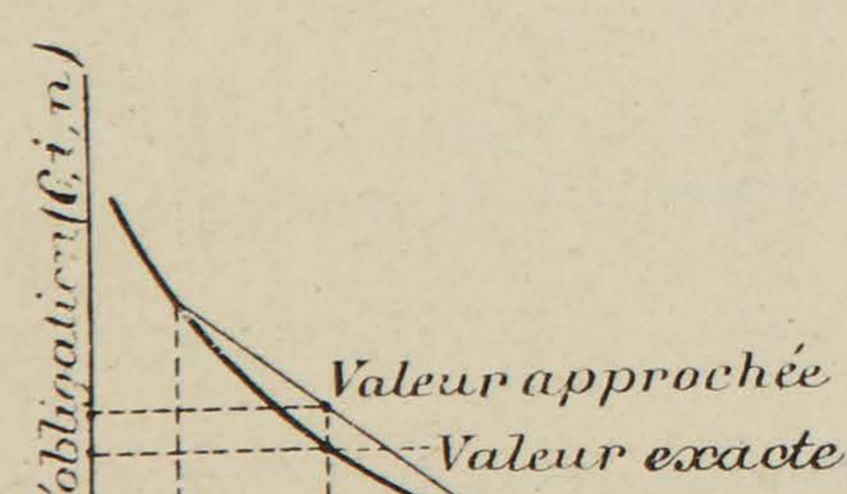
Les tables de valeurs d'obligation permettraient de calculer cette valeur par interpolation. On trouve en effet dans des tables établies pour les titres $2\,{}^1/_2\,{}^0/_0$ à amortissement semestriel amortissables en 75 ans :

Valeur au taux $4\,{}^1/_8$ 344,86 ;
Valeur au taux $4\,{}^1/_2$ 320,20.

Donc :

$$V = 320,20 + \frac{0,045.0 - 0.042.5}{0,045.0 - 0,041.25} \times (344,86 - 320,20)$$
$$= 336,64.$$

C'est une valeur trop élevé comme le montrent le calcul plus approché qui précède, ainsi que la forme de la courbe indiquant la variation de cours d'un titre de capital nominal C, de taux nominal i remboursable en n périodes quand on l'évalue à divers taux d'intérêts effectifs.



Le nombre de titres à émettre sera de :

$$N = \frac{51.428.571}{336.28} = 152.934.$$

Pratiquement, il est probable que l'on émettrait les titres au cours de 340 fr. en chiffres ronds, et il faudrait alors émettre : $\frac{51.428.571}{340} = 151.261$ titres.

153. **Variation annuelle du prix d'une obligation si le taux effectif reste fixe.** — Etant donnée une émission de N titres, au capital nominal C, rapportant annuellement Ci, et amortissables en n années, on peut calculer les prix moyens successifs des titres restant en circulation si le taux d'évaluation reste fixe et égale à x.

Soit à calculer le prix de l'obligation quand il reste encore p tirages au sort à effectuer, c'est-à-dire aussitôt après le $(n - p)^{\text{ième}}$ tirage.

1ère Méthode. — Le prix de l'obligation est égal au quotient de la valeur actuelle de l'annuité fixe remboursant l'emprunt escomptée au taux x par le nombre d'obligations restant à amortir soit :

$$\frac{NCi(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \cdot \frac{(1+x)^p - 1}{x(1+x)^p} : \frac{Ni(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \frac{(1+i)^p - 1}{i(1+i)^p} \cdot$$

ou :
$$\frac{Ci(1+i)^p}{(1+i)^p - 1} \cdot \frac{(1+x)^p - 1}{x(1+x)^p}.$$

2e Méthode. — Si l'on considère l'ensemble des obligations N_p restant en circulation, après le $(n - p)^{\text{ième}}$ tirage, on peut écrire que ces obligations sont remboursables en p annuités égales à : $N_p \frac{Ci(1+i)^p}{(1+i)^p - 1}$. La valeur actuelle moyenne d'une obligation est donc, en escomptant ces p annuités au taux x :

$$V_p = \frac{Ci(1+i)^p}{(1+i)^p - 1} \cdot \frac{(1+x)^p - 1}{x(1+x)^p}.$$

On aura : $V_1 = \frac{C(1+i)}{1+x} = \frac{Ci}{1+x} + \frac{C}{1+x}$,

c'est-à dire la somme des valeurs actuelles des deux payements d'intérêt Ci et de capital C qui seront effectués en fin d'exercice.

La valeur de V_p augmente depuis la valeur initiale V (ou V_n d'après la notation) jusqu'à la valeur V_1.

On peut établir la relation entre V_p et V_{p-1} soit directement, par la comparaison des deux formules donnant V_p et V_{p-1}, soit en explicitant, comme il suit, la marche normale du passage de V_p à V_{p-1} pendant le cours de l'exercice :

S'il existe encore N_p titres à amortir après le $(n-p)^{\text{ième}}$ tirage, et que l'on désigne par V_p leur valeur calculée au taux x, leur valeur totale $N_p\,V_p$ représente :

1° Les intérêts payés sur ces N_p titres pendant l'exercice suivant ;

2° Les amortissements des $(N_p - N_{p-1})$ titres à la fin de l'exercice ;

3° La valeur des N_{p-1} titres restant après le p^e tirage.

On aura ainsi :

$$N_p\,V_p = N_p\,\frac{Ci}{1+x} + \frac{(N_p - N_{p-1})C}{1+x} + \frac{N_{p-1}\,V_{p-1}}{1+x}.$$

Des relations : $N_p = N\,\dfrac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\cdot\dfrac{(1+i)^p - 1}{i(1+i)^p}$

et $\quad N_{p-1} = N\,\dfrac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\cdot\dfrac{(1+i)^{p-1} - 1}{i(1+i)^{p-1}},$

on tire : $\quad \dfrac{N_p}{\dfrac{(1+i)^p - 1}{i(1+i)^p}} = \dfrac{N_{p-1}}{\dfrac{(1+i)^{p-1} - 1}{i(1+i)^{p-1}}}\,;$

on peut remplacer N_p et N_{p-1} par des quantités proportionnelles ; d'où : $\quad \dfrac{(1+i)^p - 1}{i(1+i)^p}\,V_p$

$$= \frac{C}{1+x}\left[\frac{(1+i)^p - 1}{(1+i)^p} + \frac{(1+i)^p - 1}{i(1+i)^p} - \frac{(1+i)^{p-1} - 1}{i(1+i)^{p-1}}\right]$$
$$+ \frac{1}{1+x}\,\frac{(1+i)^{p-1} - 1}{i(1+i)^{p-1}}\,V_{p-1}.$$

$$V_p = \frac{Ci\,(1+i)^p}{(1+i)^p - 1}\,\frac{1}{1+x} + \frac{V_{p-1}}{1+x}\,\frac{(1+i)^p - (1+i)}{(1+i)^p - 1}\,;$$

ou enfin : $$V_p = \frac{Ci}{1+x} + C\frac{i}{(1+i)^p - 1} \times \frac{1}{1+x}$$
$$+ \frac{V_{p-1}}{1+x} \cdot \frac{(1+i)^p - (1+i)}{(1+i)^p - 1}.$$

Le 1er terme représente la valeur actuelle du coupon certain à recevoir payable dans *une* période.

Le 2e terme représente la valeur probable de l'amortissement C à recevoir dans *une* période si le titre sort.

En effet, la probabilité de sortie à l'origine du titre au $(n - p + 1)^{\text{ième}}$ tirage, premier tirage auquel sont soumises les obligations V_p, qui ont encore p années d'amortissement est égale à (n° 147) :

$$\frac{i(1+i)^{n-p+1-1}}{(1+i)^n - (1+i)^{n-p+1-1}} = \frac{i(1+i)^{n-p}}{(1+i)^n - (1+i)^{n-p}}$$
$$= \frac{i}{(1+i)^p - 1}.$$

La valeur probable du remboursement C est donc bien :

$$\frac{Ci}{(1+i)^p - 1}$$

s'il était payé de suite, et puisqu'il n'est payable que dans un an : $$\frac{Ci}{(1+i)^p - 1} \times \frac{1}{1+x}.$$

Le 3me terme représente la valeur probable des obligations V_{p-1} si le titre n'est pas amorti.

La probabilité de l'existence du titre ayant encore p années d'amortissement après le 1er tirage est en effet : $\frac{N_{p-1}}{N_p}$.

On a : $$\frac{N_{p-1}}{N_p} = \frac{\frac{Ni(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \cdot \frac{(1+i)^{p-1} - 1}{i(1+i)^{p-1}}}{\frac{Ni(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \cdot \frac{(1+i)^p - 1}{i(1+i)^p}}$$
$$= \frac{(1+i)^{p-1} - 1}{(1+i)^p - 1}(1+i) = \frac{(1+i)^p - (1+i)}{(1+i)^p - 1};$$

et la valeur probable de l'obligation, si elle n'est pas amortie, est bien par suite : $\frac{V_{p-1}}{1+x} \times \frac{(1+i)^p - (1+i)}{(1+i)^p - 1}$.

Les calculs précédents justifient donc bien la variation de V_p.

Dans le cours de l'exercice la valeur de l'obligation s'accroît des intérêts courus, au jour le jour, et au moment même du détachement du coupon cette valeur est devenue :

$$V_p(1+x) = Ci + \frac{Ci}{(1+i)^p - 1}$$
$$+ V_{p-1} \frac{(1+i)^p - (1+i)}{(1+i)^p - 1}.$$

Le coupon est détaché et l'obligation ne vaut plus que $V_p(1+x) - Ci$, mais à ce moment se produit le tirage d'amortissement : si l'obligation sort, sa valeur devient brusquement C, la probabilité de cet événement étant :

$$\frac{i}{(1+i)^p - 1}.$$

L'espérance mathématique du remboursement du titre vaut :

$$\frac{Ci}{(1+i)^p - 1}.$$

Si l'obligation n'est pas remboursée, sa valeur devient V_{p-1}, la probabilité de cet événement étant :

$$\frac{(1+i)^p - (1+i)}{(1+i)^p - 1}.$$

L'espérance mathématique du non remboursement du titre vaut : $V_{p-1} = C \cdot \frac{(1+i)^p - (1+i)}{(1+i)^p - 1}$.

La somme des deux termes ci-dessus reproduit bien la valeur de l'obligation après le détachement du coupon.

154. **Annuités amortissant le capital nominal et le capital d'émission.** — La valeur :

$$V = \frac{Ci(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \times \frac{(1+x)^n - 1}{x(1+x)^n}$$

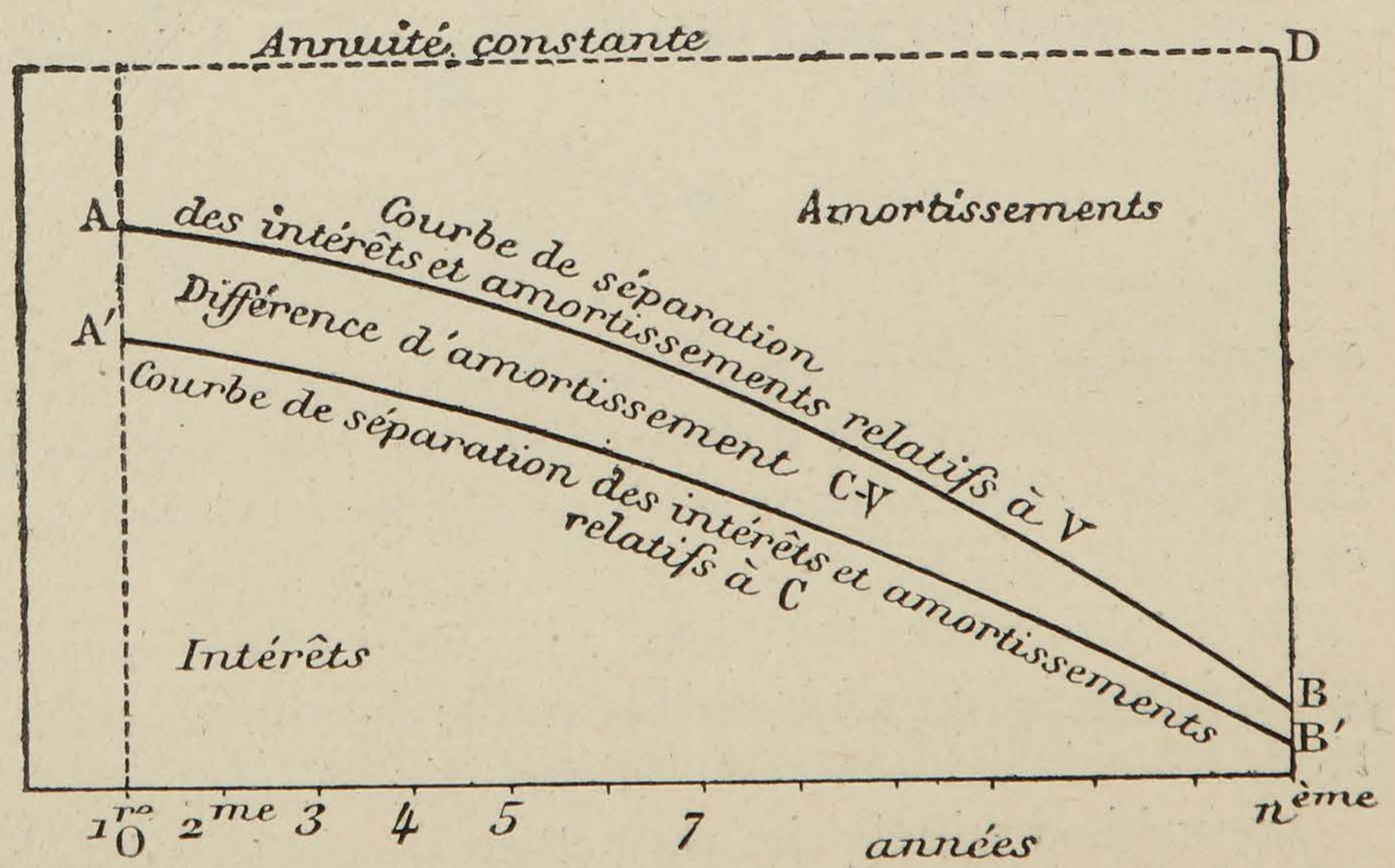
permet d'écrire l'égalité suivante :

$$\frac{Vx(1+x)^n}{(1+x)^n - 1} = \frac{Ci(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = a.$$

Cette relation montre que l'annuité amortissant V au taux x en n périodes est égale à l'annuité amortissant C au taux i pendant le même temps.

Mais la marche de l'amortissement est très différente dans les deux cas. On a vu en effet que si $x > i$ (cas général) $Vx > Ci$; l'intérêt de la première période étant plus grand dans le cas de V, l'amortissement sera plus faible.

Le graphique suivant résume schématiquement la variation des intérêts et des amortissements quand $V < C$.



Chaque année l'intérêt payé décroît et l'amortissement croît. La courbe AB sépare, sur l'ordonnée de chaque période, cet intérêt décroissant et l'amortissement croissant, pour le capital V amorti au taux x.

La courbe relative au capital C partira d'un point A′ tel que $OA' < OA$, puisque $Ci < Vx$, et aboutira en un point B′, tel que :

$$DB' = \text{dernier amortissement} = \frac{a}{1+i},$$

de même $DB = \dfrac{a}{1+x}$; on aura : $DB' > DB$.

La courbe A′B′ sera placée entièrement sous la courbe AB.

La partie comprise entre les deux courbes représente la prime d'amortissement $C - V$ payée dans les amortissements successifs et remplacée par une augmentation des intérêts, si l'on considère le capital V.

155. **Calcul du taux réel d'emprunt.** — L'équation donnant la valeur de

$$V = \frac{Ci(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \times \frac{(1+x)^n - 1}{x(1+x)^n}$$

est une relation entre 5 quantités V, C, i, x, n.

Connaissant quatre d'entre elles, on peut trouver la cinquième, mais les deux seuls problèmes pratiques sont ceux ayant pour but de calculer V ou x.

Ils ont été résolus tous deux : le premier dans l'exposé qui précède, le second lors de la recherche du taux d'intérêt, connaissant une valeur d'annuité (n° 107).

Les méthodes indiquées permettent de résoudre le problème de la recherche de i qui peut être aussi très simplifié par les tables de M. Arnaudeau, dont on se servira pour l'interpolation.

Exemple.. — *Quel est le taux d'emprunt d'un titre de* 500 *fr.* 3 $^0/_0$ *remboursable en* 55 *ans et payé* 422 *fr.? On supposera que les payements d'intérêts et d'amortissement se font à la même date.*

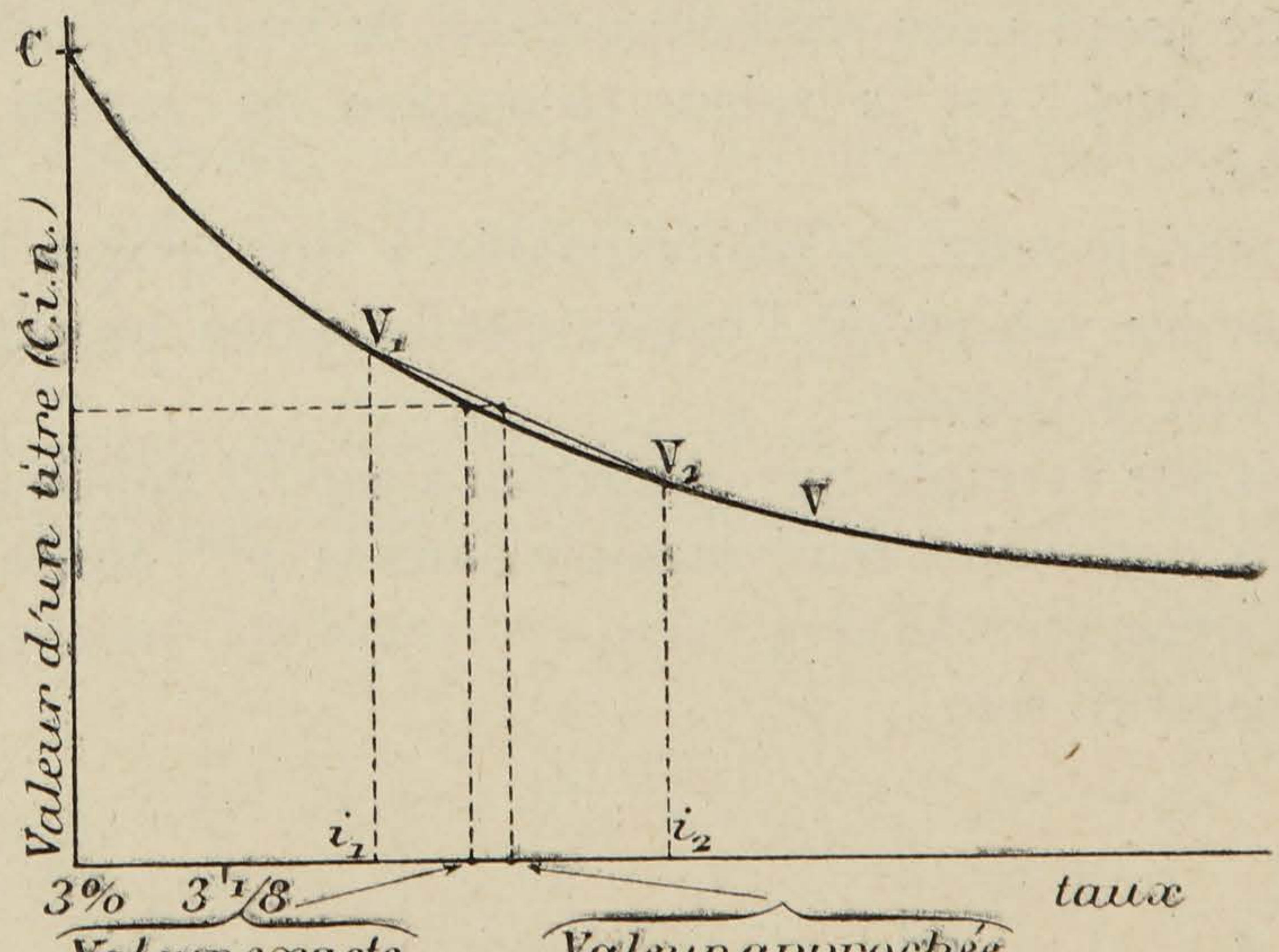
Les tables montrent que la valeur d'un pareil titre est :

412,87, si le taux d'évaluation est 4 $^0/_0$,
422,37, si le taux d'évaluation est 3 $^7/_8$ $^0/_0$.

On écrira donc :

$$x = 3\frac{7}{8} + \frac{1}{8} \times \frac{422{,}37 - 422}{422{,}37 - 412{,}87} = 3{,}8798.$$

Si l'on construit le graphique représentant la variation de la valeur d'un titre remboursable en n périodes au taux i, suivant le taux effectif d'intérêt on trouve la forme ci-après :



Il en résulte que l'interpolation proportionnelle donnera toujours un résultat trop élevé pour la détermination du taux effectif.

CHAPITRE II

USUFRUIT ET NUE PROPRIÉTÉ DES TITRES

156. **Usufruit et nue propriété d'un titre remboursable dans p années.** — On appelle usufruit d'un titre, à un taux donné, la valeur actuelle des intérêts à servir à ce titre jusqu'à son remboursement ; la nue propriété, au même taux, est la valeur escomptée du capital remboursé.

Quand le titre est remboursable à une époque déterminée, les valeurs de l'usufruit et de la nue propriété se calculent facilement.

Soit par exemple une obligation à capital nominal C et au taux nominal i, remboursable dans la $p^{\text{ème}}$ année, et x le taux réel.

L'usufruit sera :

$$\frac{Ci}{1+x} + \frac{Ci}{(1+x)^2} + \ldots + \frac{Ci}{(1+x)^p} = Ci\frac{(1+x)^p - 1}{x(1+x)^p},$$

c'est-à-dire la valeur actuelle de p annuités Ci, escomptées au taux x.

La nue propriété étant évidemment : $\dfrac{C}{(1+x)^p}$, la valeur de l'obligation sera :

$$Ci\,\frac{(1+x)^p-1}{x(1+x)^p}+\frac{C}{(1+x)^p}=$$

$$\frac{Ci}{x}+\frac{C(x-i)}{x}\times\frac{1}{(1+x)^p},$$

valeur précédemment trouvée (n° 150, p. 238).

157. **Usufruit et nue propriété de titres remboursables par tirage au sort.** — S'il s'agit de titres remboursables par tirages au sort, on ne peut calculer que des valeurs *moyennes* de *l'usufruit* et de la *nue propriété*, et leur somme doit reproduire la valeur *moyenne* de l'obligation évaluée d'après le taux x.

158. **Usufruit.** — La valeur actuelle des intérêts à servir à une obligation B_p remboursable dans p années est, comme on vient de le voir, $Ci\,\dfrac{(1+x)^p-1}{x(1+x)^p}$; la valeur actuelle totale des intérêts sera donc en désignant par I l'usufruit moyen cherché, et en remarquant que le nombre d'obligations remboursables dans p années est $\dfrac{Ni(1+i)^{p-1}}{(1+i)^n-1}$

$$NI=\sum_{p=1}^{p=n}\frac{Ni(1+i)^{p-1}}{(1+i)^n-1}\times Ci\,\frac{(1+x)^p-1}{x(1+x)^p}$$

$$=\frac{NiCi}{(1+i)^n-1}\cdot\frac{1}{x}\sum_{p=1}^{p=n}(1+i)^{p-1}\times\frac{(1+x)^p-1}{(1+x)^p}.$$

Or :
$$\frac{(1+x)^p - 1}{(1+x)^p} = 1 - \frac{1}{(1+x)^p}$$

donc :
$$\mathrm{NI} = \frac{\mathrm{NC}i^2}{(1+i)^n - 1} \times$$
$$\times \frac{1}{x}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - \frac{(1+x)^n - (1+i)^n}{(x-i)(1+x)^n}\right]$$
$$= \frac{\mathrm{NC}i}{(1+i)^n - 1} \times$$
$$\times \frac{[(1+i)^n - 1]\, x(1+x)^n - i(1+i)^n [(1+x)^n - 1]}{x(1+x)^n (x-i)}$$
$$= \frac{\mathrm{NC}i}{x-i} - \frac{\mathrm{N}i}{x-i} \times \underbrace{\frac{\mathrm{C}i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \times \frac{(1+x)^n - 1}{x(1+x)^n}}_{\mathrm{V}}$$
$$= \frac{\mathrm{NC}i}{x-i} - \frac{\mathrm{NV}i}{x-i} = \frac{\mathrm{N}(\mathrm{C}-\mathrm{V})i}{x-i};$$

d'où :
$$\mathrm{I} = \frac{(\mathrm{C}-\mathrm{V})i}{x-i}.$$

Etudions la variation de l'usufruit quand le taux x reste fixe. L'usufruit est d'autant plus petit que V est plus voisin de C, c'est-à-dire que l'on se rapproche de la fin de l'amortissement.

Quand le taux x augmente, le nombre d'années restant fixe, la valeur de l'usufruit diminue, chacun des termes le composant ayant une valeur actuelle variant en sens inverse du taux.

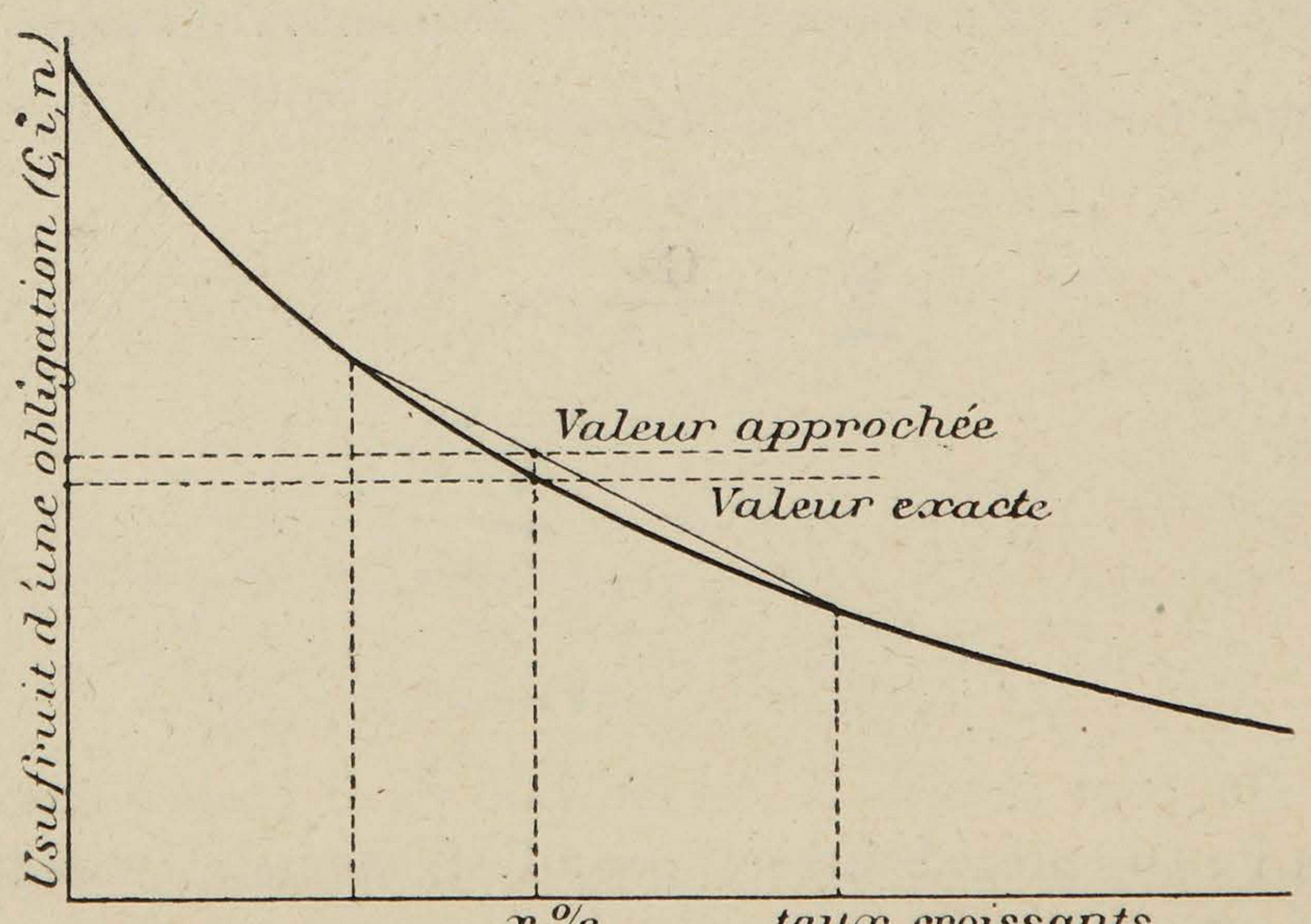
Quand x tend vers i, la quantité $\mathrm{I} = \dfrac{(\mathrm{C}-\mathrm{V})i}{x-i}$ se présente sous la forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$; pour lever cette indétermination, il faut reprendre le calcul précédent après avoir remplacé x par i ; on aura :

$$\mathrm{NI}_i = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{\mathrm{N}i}{(1+i)^n - 1}(1+i)^{p-1} \cdot \mathrm{C}i\,\frac{(1+i)^p - 1}{i(1+i)^p}$$

$$= \frac{\mathrm{NC}i}{(1+i)^n - 1} \times \frac{1}{1+i}\left[\frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{i} - n\right];$$

d'où : $$\mathrm{I}_i = \mathrm{C}\left[1 - \frac{ni}{(1+i)^{n+1} - (1+i)}\right].$$

Si l'on construit la courbe représentant la variation de la valeur de l'usufruit d'obligations au capital nominal C remboursables en n périodes et au taux nominal i, pour divers taux d'intérêts effectifs on obtient la forme suivante :



M. Arnaudeau a calculé les valeurs des usufruits de titres de divers types et pour les taux d'intérêts effectifs usuels ; si donc on interpole, pour calculer l'usufruit correspondant à un taux qui n'est pas dans les tables, on obtiendra toujours une valeur trop élevée, comme le montre la courbe ci-dessus.

EXEMPLE. — *Calculer l'usufruit d'un titre* 500 *fr.* 3 % *amortissable en* 55 *ans et payé* 422 *fr.* ?

On a trouvé (n° 155, p. 250) que le taux réel d'intérêt était 3,8798 %.

d'où :
$$I = \frac{(500 - 422) \times 0{,}03}{0{,}038.798 - 0{,}03} = 265{,}97.$$

159. **Nue propriété**. — La valeur actuelle de remboursement de l'obligation B_p est $\frac{C}{(1+x)^p}$. On aura donc en désignant par A la nue propriété moyenne d'une obligation, et en remarquant que le nombre d'obligations remboursables dans p années est $\frac{Ni(1+i)^{p-1}}{(1+i)^n - 1}$

$$NA = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{C}{(1+x)^p} \times \frac{Ni(1+i)^{p-1}}{(1+i)^n - 1},$$

$$A = \frac{Ci}{(1+i)^n - 1} \sum_{p=1}^{p=n} \frac{(1+i)^{p-1}}{(1+x)^p}$$

$$= \frac{Ci}{(1+i)^n - 1} \cdot \frac{(1+x)^n - (1+i)^n}{(x-i)(1+x)^n}.$$

On peut évaluer A en fonction de C et de V comme on l'a fait précédemment pour I. L'équation précédente s'écrit :

$$A[(1+i)^n - 1](x-i)(1+x)^n = Ci[(1+x)^n - (1+i)^n],$$

d'où :

$$Ci(1+i)^n = (1+x)^n\left[Ci - A(x-i)\left[(1+i)^n - 1\right]\right].$$

D'autre part l'égalité :

$$V = \frac{Ci(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\,\frac{(1+x)^n-1}{x(1+x)^n}$$

donne successivement :

$$V\left[(1+i)^n - 1\right]x(1+x)^n = Ci(1+i)^n\left[(1+x)^n - 1\right].$$

$$Ci(1+i)^n = (1+x)^n\left[Ci(1+i)^n - Vx\left[(1+i)^n - 1\right]\right].$$

D'où, égalant les deux seconds membres et divisant par $(1+x)^n$:

$$Ci - A(x-i)\left[(1+i)^n - 1\right] =$$
$$Ci(1+i)^n - Vx\left[(1+i)^n - 1\right],$$

ou :

$$A(x-i)\left[(1+i)^n - 1\right] =$$
$$Vx\left[(1+i)^n - 1\right] - Ci\left[(1+i)^n - 1\right].$$

et enfin :

$$A(x-i) = Vx - Ci;$$

et

$$A = \frac{Vx - Ci}{x - i}.$$

Il y a lieu de remarquer que :

$$I + A = \frac{(C-V)i}{x-i} + \frac{Vx - Ci}{x-i} = V,$$

Pour des titres d'un emprunt déterminé, A augmente nécessairement, si x reste constant, au fur et à mesure que l'on se rapproche de la fin de l'amortissement.

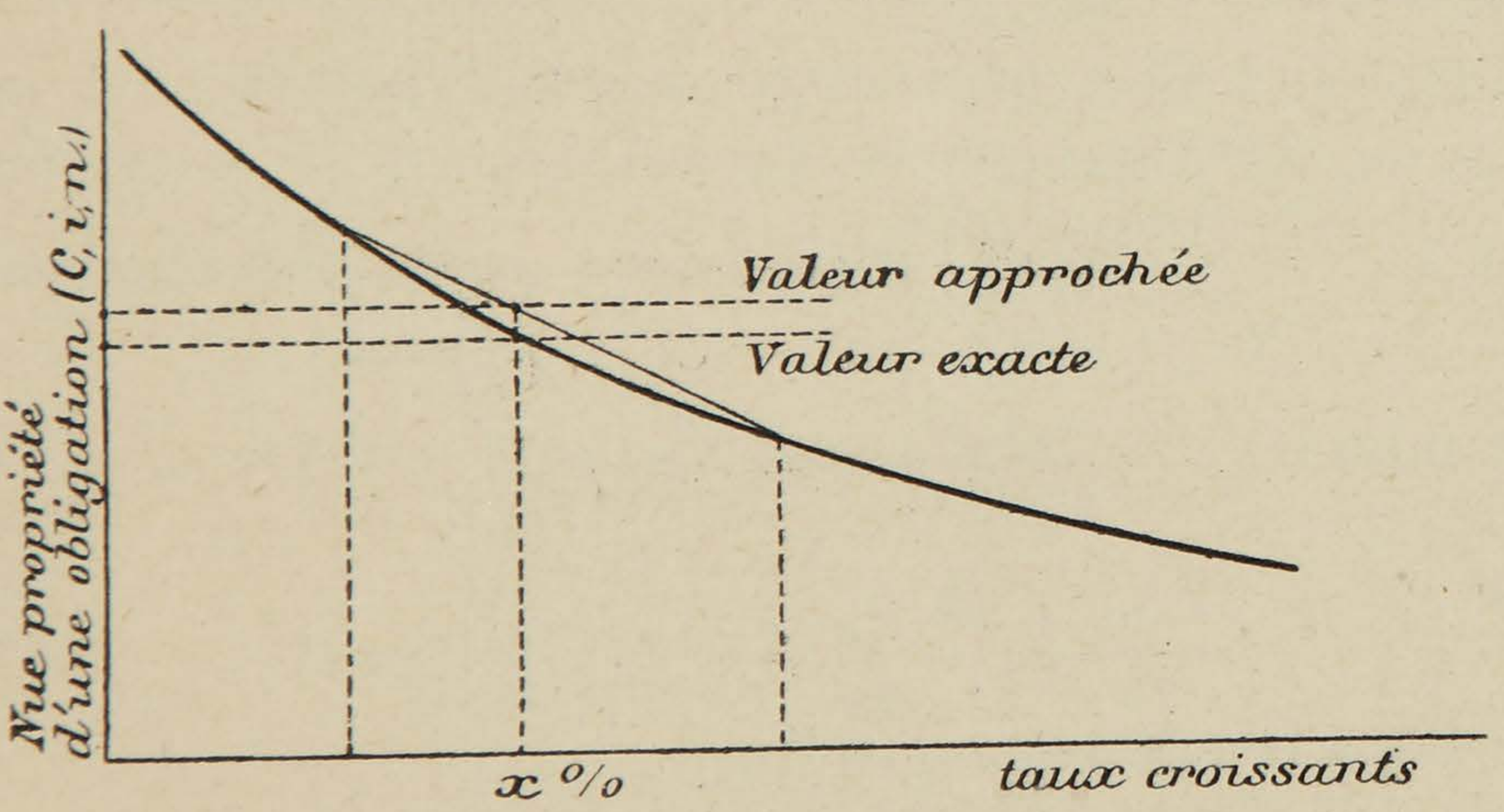
Quand x tend vers i la quantité A se présente sous la forme $\frac{0}{0}$. On lève l'indétermination comme on l'a fait pour I.

$$A_i = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{i}{(1+i)^n - 1} \cdot C \cdot \frac{(1+i)^{p-1}}{(1+i)^p}$$

$$= \frac{nCi}{(1+i)^n - 1} \frac{1}{1+i}.$$

On vérifie de suite que : $A_i + I_i = C$.

Si l'on construit la courbe représentative de la variation de la valeur de la nue propriété d'obligations au capital nominal C remboursables en n périodes et au taux nominal i pour divers taux effectifs d'intérêt, on obtient la forme suivante analogue à celle de l'usufruit.



M. Arnaudeau a calculé les nues propriétés de divers types d'obligations pour les taux effectifs d'intérêt usuels. Il résulte de la courbe ci-dessus que si l'on interpole pour calculer la nue propriété d'un titre correspondant à un taux qui ne se trouve pas dans la table, on obtiendra nécessairement un résultat trop élevé.

EXEMPLE. — *Calculer la nue propriété d'un titre de 500 fr. 3 % appartenant à une émission d'obligations remboursables par annuités constantes en 55 ans et émises à 422 fr. ?*

On a trouvé (n° 155, p. 250) que le taux effectif d'intérêt de cet emprunt était ;

$$x = 3{,}8798 \text{ \%},$$

donc :

$$A = \frac{422 \times 0{,}038.798 - 500 \times 0{,}03}{0{,}038.798 - 0{,}03} = \frac{1{,}372.756}{0{,}008.798} = 156{,}03.$$

On a trouvé : $\quad I = 265{,}97$

et l'on vérifie que :

$$265{,}97 + 156{,}03 = 422 \text{ cours donné.}$$

160. **Calcul direct de l'usufruit et de la nue propriété.** — Le calcul de l'usufruit et de la nue propriété peut se faire sans passer par l'intermédiaire du calcul algébrique.

Si l'on considère la valeur numérique de l'obligation, on a : $V = I + A$. Il suffit de trouver une seconde relation entre I et A. On peut l'établir de plusieurs manières.

1^re^ MÉTHODE. — Une obligation de capital nominal C donnant droit à l'intérêt annuel Ci et au remboursement C à une époque quelconque vaut évidemment C si le taux nominal est égal au taux d'évaluation.

Donc, si l'on suppose que, pour toutes les obligations de l'emprunt (émis au cours V), on vienne à modifier le régime d'intérêt en payant Cx au lieu de Ci sans changer le régime d'amortissement, ces obligations devront être émises au prix C. Mais cette modification, qui a pour effet de remplacer chaque coupon Ci par Cx, revient à multiplier la valeur de chaque coupon par $\frac{x}{i}$, et par suite la valeur actuelle I de tous les coupons Ci deviendra $I \times \frac{x}{i}$. L'amortissement n'étant pas modifié, on aura :

$$C = I\frac{x}{i} + A.$$

Cette égalité jointe à : $V = I + A$ permet de déterminer I et A :

$$I = \frac{(C - V)i}{x - i},$$

$$A = \frac{Vx - Ci}{x - i},$$

2^{me} MÉTHODE. — Si le capital à rembourser devient $\frac{Ci}{x}$ au lieu de C, la quantité A est multipliée par $\frac{i}{x}$ et la valeur d'une obligation remboursable dans p années :

$$B_p = Ci\frac{(1 + x)^p - 1}{x(1 + x)^p} + \frac{C}{(1 + x)^p},$$

devient dans ce cas :

$$B'_p = Ci\frac{(1 + x)^p - 1}{x(1 + x)^p} + \frac{Ci}{x(1 + x)^p}$$

ou en simplifiant : $B'_p = \frac{Ci}{x}$. Cette valeur, constante, quelle que soit l'époque du remboursement, sera la moyenne des valeurs des obligations et l'on aura $\frac{Ci}{x} = I + \frac{Ai}{x}$. C'est l'équation précédemment trouvée mise sous une autre forme et qui peut s'écrire : $C = I\frac{x}{i} + A$.

On a donc les deux égalités permettant de déterminer I et A.

3me MÉTHODE. — Si l'on considère les intérêts I, ils représentent la valeur actuelle d'une rente temporaire Ci, c'est-à-dire la différence entre deux rentes perpétuelles, l'une immédiate $\frac{Ci}{x}$, l'autre différée jusqu'à l'époque du remboursement de C. Or la valeur actuelle de C étant A, la valeur actuelle de cette deuxième rente sera $\frac{Ai}{x}$. On aura donc :

$$I = \frac{Ci}{x} - \frac{Ai}{x} = \frac{(C - A)i}{x}.$$

C'est toujours l'égalité précédemment trouvée, car on a successivement :

$$I\frac{x}{i} = C - A, \quad \text{et :} \quad C = I\frac{x}{i} + A.$$

161. **Variation de l'usufruit et de la nue propriété quand *n* varie.** — Si l'on considère une émission définie par les quantités C, i, n, x, la valeur réelle d'un titre est :

$$V = \frac{Ci(1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1} \times \frac{(1 + x)^n - 1}{x(1 + x)^n}.$$

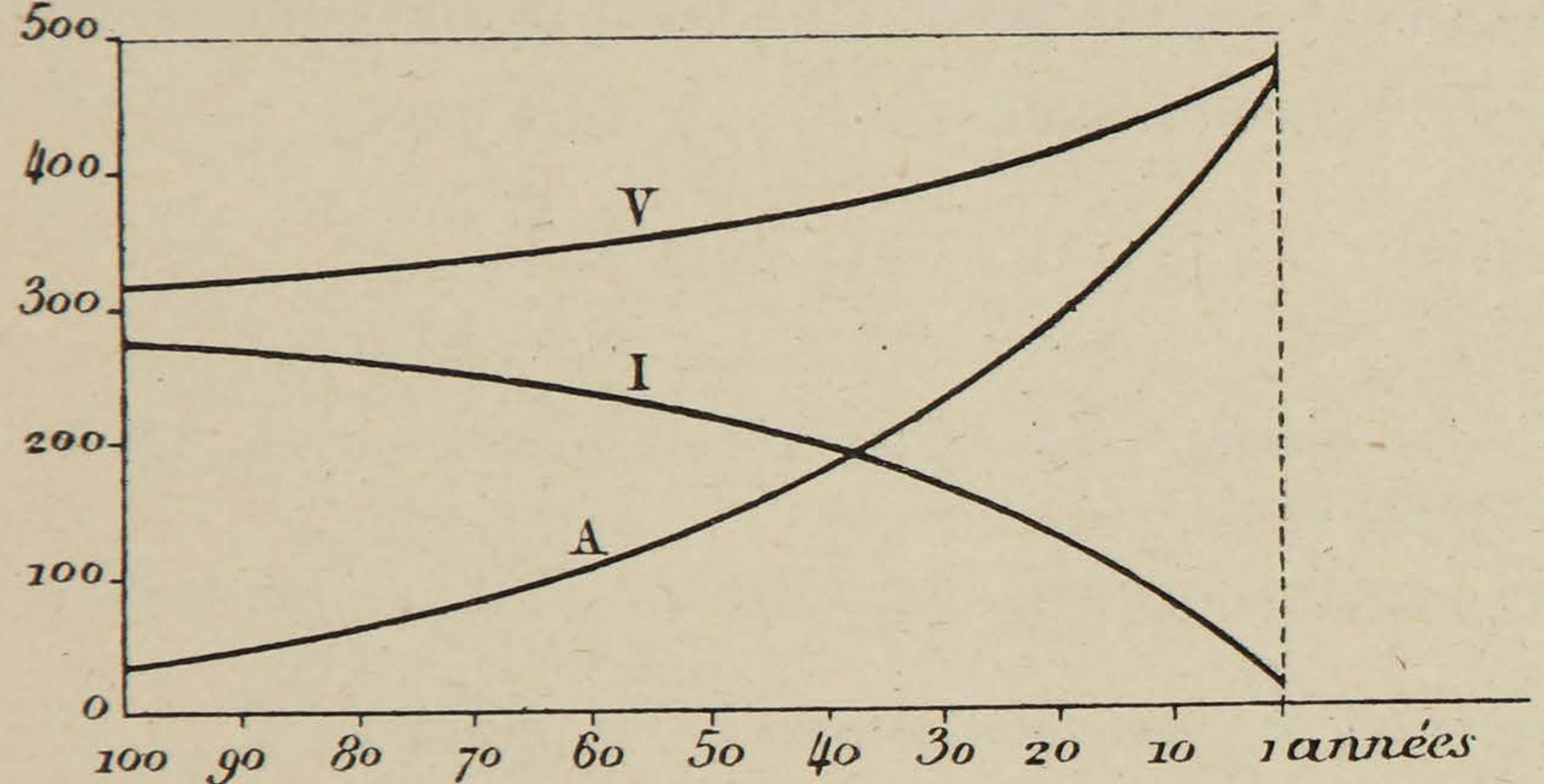
On a vu que V varie avec n et tend à se rapprocher de C quand n tend vers zéro, c'est-à-dire lorsqu'on se rapproche de la fin de l'amortissement.

L'usufruit diminue et tend vers $\frac{Ci}{1 + x}$ pour la dernière année, tandis que la nue propriété augmente et tend vers $\frac{C}{1 + x}$.

Pour n assez grand, $I > A$, puis, pour une certaine valeur de n, $I = A$, et, enfin, lorsque n diminue, $I < A$.

Cette variation se représente schématiquement par le graphique suivant dont les abscisses représentent la période d'amortissement, et les ordonnées les valeurs de V en francs.

Variation de la valeur V d'une obligation 500f 3%, de son usufruit I et de sa nue propriété A au taux x = 0,05.



Le nombre d'années p, pour lequel $I = A$, ne présente aucun intérêt particulier et n'est pas dénommée.

Il s'obtient en résolvant par rapport à p l'équation :

$$I = A \quad \text{ou} \quad \frac{(C - V)i}{x - i} = \frac{Vx - Ci}{x - i},$$

$$Ci - Vi = Vx - Ci,$$

$$2Ci = V(i + x)\ ;$$

d'où enfin :

$$\frac{2Ci}{1 + x} = \frac{Ci(1 + i)^p}{(1 + i)^p - 1} \times \frac{(1 + x)^p - 1}{x(1 + x)^p} = V.$$

On peut résoudre cette égalité par une simple lecture dans les tables donnant la valeur de V.

Exemple. — *Pour quelle valeur du nombre d'amortissements l'usufruit est-il égal à la nue propriété pour des titres* 500 *fr.* 3 % *évalués à* 4 % ?

On a : $$\frac{2Ci}{i+x} = \frac{30}{0,07} = 428 \text{ fr.}$$

Dans une table de valeurs de V on trouve que, pour 40 ans : $V = 428,14$.

La valeur de p cherchée est voisine de 40 ans ; on constate en effet que :

$$I = 215,58.$$
$$A = 212,56.$$

pour 41 ans on aurait :

$$V = 426,98, \quad A = 207,92, \quad I = 219,06 ;$$

pour 39 ans :

$$V = 429,33, \quad A = 217,32, \quad I = 212,01.$$

162. **Taux réel d'intérêt pour le souscripteur remboursé dans la $k^{\text{ième}}$ année.** — Le taux x qui sert à calculer le prix d'émission n'est pas le taux réel d'intérêt pour un souscripteur remboursable dans une année quelconque.

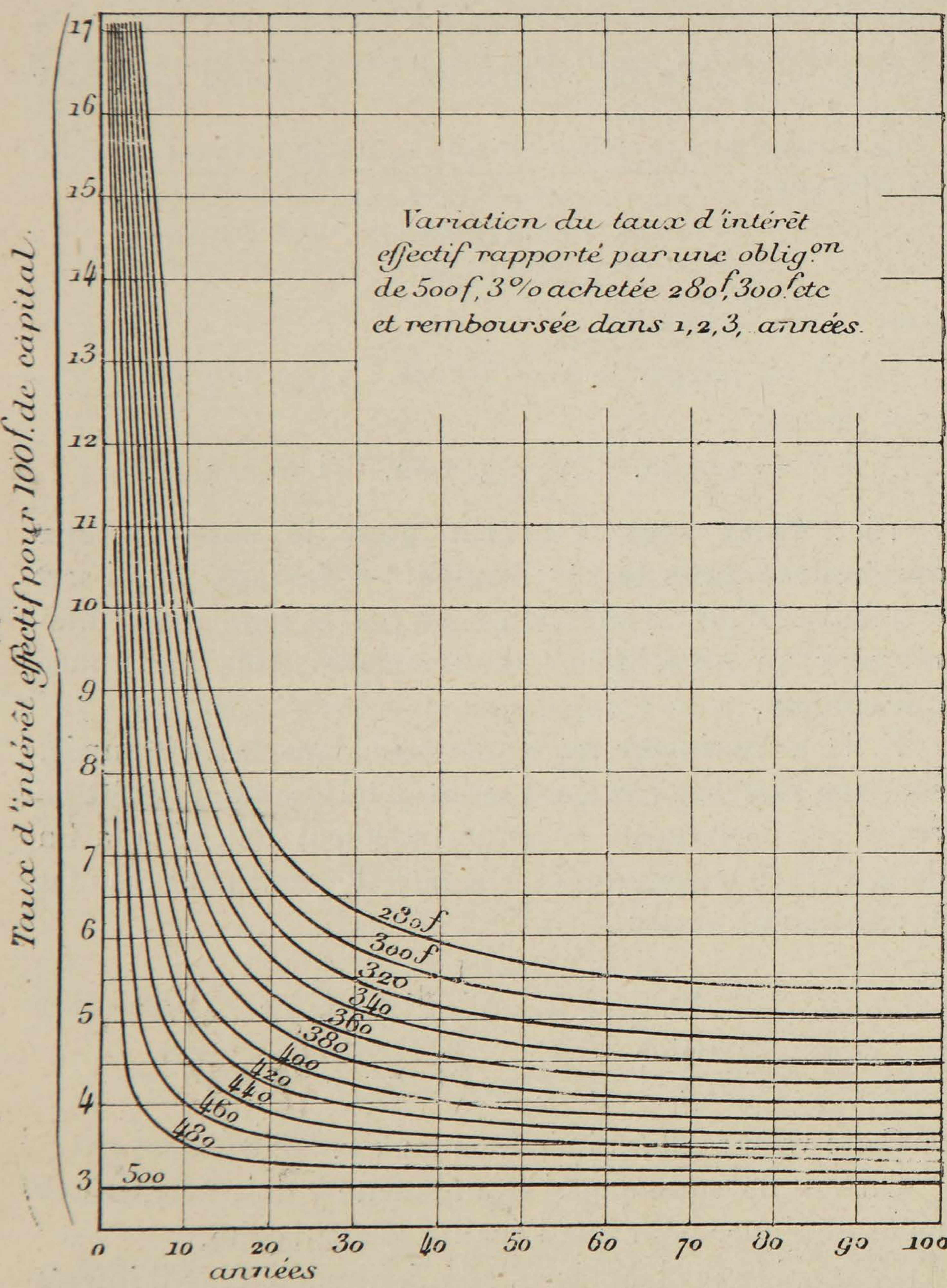
Si le souscripteur est remboursé dans la $k^{\text{ième}}$ année, son taux réel de placement serait y tel que les intérêts Ci reçus successivement et l'amortissement touché à la fin de la $k^{\text{ième}}$ année escomptés à ce taux donnent pour résultat V ; on aurait ainsi :

$$V = Ci\frac{(1+y)^k - 1}{y(1+y)^k} + \frac{C}{(1+y)^k}$$
$$= \frac{Ci}{y} + \frac{C}{(1+y)^k}\left(1 - \frac{i}{y}\right).$$

Cette valeur déterminerait le taux y.

On voit de suite que si k augmente y doit nécessairement diminuer pour que l'égalité soit satisfaite.

Le graphique ci-après p. 264 indique le taux d'intérêt correspondant à un remboursement à une époque quel-



Variation du taux d'intérêt effectif rapporté par une oblig.on de 500f, 3 % achetée 280f, 300f etc et remboursée dans 1, 2, 3, années.
Taux d'intérêt effectif pour 100f de capital.
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
280f
300f
320
340
360
380
400
420
440
460
480
500
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
années

conque d'une obligation 500 fr. 3 $^0/_0$ appartenant à une émission de titres remboursables par annuités constantes en 100 ans, et en supposant des prix d'émission variant par 20 francs de 280 francs à 500 francs.

Le souscripteur fait donc un placement de moins en moins avantageux au fur et à mesure que s'éloigne l'époque de son remboursement.

S'il était remboursé la 1re année, son taux y serait déterminé par l'égalité : $$V = \frac{Ci}{1 + y_1} + \frac{C}{1 + y_1};$$

d'où : $$1 + y_1 = \frac{C(1 + i)}{V}.$$

Si, au contraire, il n'était remboursé que dans la $n^{\text{ième}}$ année, le taux y_n serait déterminé par l'égalité :

$$V = Ci\,\frac{(1 + y_n)^n - 1}{y_n(1 + y_n)^n} + \frac{C}{(1 + y_n)^n}.$$

Ce taux y_n est d'ailleurs supérieur à i, car le second membre de l'égalité précédente diminue quand y_n augmente, n restant fixe ; or pour $y_n = i$ le second membre devient égal à C, par suite, comme $V < C$, $y_n > i$.

Ce taux tend d'ailleurs vers une valeur limite si n augmente indéfiniment ; le terme $\frac{C}{(1 + y_n)^n}$ tendant vers zéro, $V = \frac{Ci}{\lim.\, y_n}$, c'est-à-dire la valeur de la rente perpétuelle Ci, et réciproquement $\lim.\, y_n = \frac{Ci}{V}$, qui est supérieur à i, puisque l'on a supposé $V < C$.

163. **Vie mathématique d'un titre.** — On est amené à rechercher à quelle époque θ une obligation doit être

amortie pour qu'elle rapporte exactement le taux effectif moyen de l'émission.

On doit avoir l'identité :

$$\mathrm{C}i\,\frac{(1+x)^\theta - 1}{x(1+x)^\theta} = \mathrm{I}.$$

Par suite : $$\mathrm{I}x(1+x)^\theta = \mathrm{C}i(1+x)^\theta - \mathrm{C}i,$$

d'où : $$(1+x)^\theta = \frac{\mathrm{C}i}{\mathrm{C}i - \mathrm{I}x}.$$

Or, de l'égalité $\mathrm{I} = \dfrac{(\mathrm{C}-\mathrm{A})i}{x}$ établie au n° 160, 3e méthode, on déduit :

$$\mathrm{I}x = \mathrm{C}i - \mathrm{A}i,$$

et : $$\mathrm{C}i - \mathrm{I}x = \mathrm{A}i,$$

donc : $$(1+x)^\theta = \frac{\mathrm{C}i}{\mathrm{A}i} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}.$$

On trouve cette même valeur en partant de l'égalité de la nue-propriété :

$$\frac{\mathrm{C}}{(1+x)^\theta} = \mathrm{A}\ ; \quad \text{d'où} \quad (1+x)^\theta = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}.$$

La valeur de θ s'appelle la vie mathématique de l'emprunt. C'est l'époque à laquelle on pourrait faire tous les remboursements en une seule fois pour faire un placement au taux x. Cette valeur ne présente aucun intérêt, pas plus d'ailleurs que la durée probable ou la durée moyenne des titres d'un emprunt qui ont eu une importance non justifiée dans la recherche de la valeur des titres.

Exemple. — *Calculer la vie mathématique des titres appartenant à un emprunt* 500 *fr.* 3 °/₀ *remboursable par annuités constantes en* 55 *ans émis à* 422 *fr.* ?

On a trouvé précédemment :

$$A = 156{,}03 \text{ (n° 159, p. 256)}$$

et

$$x = 0{,}038.798 \text{ (n° 155, p. 251)}$$

donc : $$(1{,}038.798)^\theta = \frac{500}{156{,}03} = 3{,}204.5$$

$$\theta = \frac{\lg 3{,}204.5}{\lg 1{,}038.798} = 30{,}594.$$

Vie mathématique pour $x = i$.

Lorsque le taux réel tend vers i, la valeur de θ est donnée par l'égalité : $(1 + i)^\theta = \frac{C}{A}$, A étant la nue propriété pour $x = i$. (n° 159).

On a donc : $$(1 + i)^\theta = \frac{(1 + i)^n - 1}{ni}(1 + i).$$

Cette vie mathématique ne répond plus à la définition qui a été donnée précédemment, car pour $x = i$ chaque obligation vaut C et le souscripteur fait un placement au taux i, quelle que soit l'époque du remboursement.

164. **Prime au remboursement.** — La différence entre le capital remboursé et le prix de l'obligation est appelée *la prime de remboursement* ; cette somme touchée au moment de l'amortissement constitue une augmentation sensible de l'intérêt dont on a tenu compte implicitement dans les calculs qui précèdent.

Il est facile d'évaluer l'augmentation du taux d'intérêt qu'elle procure théoriquement par la différence entre le taux effectif x et la quantité $\frac{Ci}{V}$.

On peut d'ailleurs vérifier que si on élimine la valeur actuelle de la prime de la valeur de V, on retrouve bien le taux d'intérêt x.

Désignons par P la valeur actuelle de la prime contenue dans V on aura :

$$\frac{P}{C - (V - P)} = \frac{A}{C}$$

d'où : $$P = A\frac{C - V}{C - A} \text{ et } V - P = C\frac{V - A}{C - A}.$$

En remplaçant A par $\frac{Vx - Ci}{x - i}$ on trouve facilement :

$$V - P = C\frac{i}{x} \quad \text{ou ;} \quad x = \frac{Ci}{V - P}.$$

On peut aussi vérifier que la valeur actuelle des différences d'intérêts $Vx - Ci$, soit $\frac{Vx - Ci}{Ci}$ I

$$\text{ou } \frac{Vx - Ci}{Ci} \times \frac{(C - V)i}{x - i} = \frac{Vx - Ci}{x - i}\,\frac{C - V}{C} = (C - V)\frac{A}{C}$$

représente la valeur actuelle de la prime C — V supposée touchée à l'époque mathématique d'amortissement des titres. Ces vérifications n'ont aucun intérêt pratique, de même d'ailleurs que la quantité P, et nous ne les indiquons qu'à titre d'exemple de calcul.

CHAPITRE III

ÉTUDE DE DIVERS TYPES D'OBLIGATIONS

165. **Modalités diverses de la forme des obligations.** — Dans les calculs précédents, on a supposé que les époques d'échéance des coupons étaient les mêmes que celles des amortissements, et que la somme remboursée était nécessairement C, somme servant au calcul de l'intérêt d'après le taux nominal.

La plupart des obligations ont leurs coupons semestriels et leurs amortissements annuels, et il arrive quelquefois qu'elles sont remboursables avec une prime spécifiée sur le titre.

166. **Obligations à coupons périodiques, d'échéances différentes de celles des amortissements.** — Soient des obligations de capital nominal C, de taux d'intérêt nominal i, dont l'intérêt Ci est payable par fractions fCi, après chaque fraction f de l'année, et la dernière coupure échéant à la même époque que l'amortissement.

Le tableau d'amortissement de ces titres s'établit comme si l'intérêt était payable en une seule fois à la fin de l'année avec l'amortissement, et en réalité, la totalité des sommes payées dans une année reste constante comme dans le cas étudié jusqu'ici.

Soit à évaluer la valeur de ce titre au taux d'intérêt effectif x.

On calcule d'abord la valeur V du titre sans se préoccuper de la périodicité du payement des coupons, et l'on détermine l'usufruit I et la nue propriété A.

L'usufruit I est modifié par l'anticipation du payement des parties fractionnaires Ci :

$$\begin{array}{cccccc} | \text{———} & | \text{———} & | \text{———} & | \text{———} & | \text{———} & | \\ & fCi & fCi & fCi & \dots & fCi \end{array}$$

La valeur en fin d'année des $\frac{1}{f}$ coupures est :

$$fCi\left[(1+y)^{\frac{1}{f}-1} + (1+y)^{\frac{1}{f}-2} + \dots + 1\right],$$

y représentant le taux équivalent à x pour la période f, c'est-à-dire que l'on a :

$$(1+x)^f = 1+y \quad \text{ou} \quad 1+x = (1+y)^{\frac{1}{f}}.$$

On aura donc, pour la valeur réelle :

$$fCi\,\frac{\left[(1+y)^{\frac{1}{f}} - 1\right]}{y} = Cif\frac{x}{y}.$$

Chaque coupon Ci étant multiplié par $f\frac{x}{y}$, tous les coupons seront multipliés par cette quantité, et l'on aura pour la valeur I' de l'usufruit :

$$I' = I\,.\,f\,.\,\frac{x}{y}.$$

La valeur de l'obligation est, en définitive :

$$V' = I' + A = If\frac{x}{y} + A.$$

Dans le cas de coupons semestriels, on a : $f = \frac{1}{2}$, et

$(1 + x) = (1 + y)^2$; d'où : $x = y^2 + 2y$. Par suite, la valeur réelle est :

$$\frac{1}{2} \mathrm{I} \frac{y^2 + 2y}{y} = \mathrm{I} \left(1 + \frac{y}{2}\right).$$

Dans le cas limite obtenu en supposant que l'intérêt soit payable par fractions infiniment petites, après chaque instant infiniment petit, on a :

$$\lim \frac{f}{y} = \lim \left(\frac{f}{(1 + x)^f - 1}\right)_{f=0}$$

$$= \lim \frac{1}{(1 + x)^f \mathrm{L}_{\mathrm{nep.}} (1 + x)} = \frac{1}{\mathrm{L}_{\mathrm{nep.}} (1 + x)}.$$

La limite de la valeur de l'intérêt est par suite :

$$\mathrm{I} \times \frac{x}{\mathrm{L}_{\mathrm{nep.}} (1 + x)}.$$

Le tableau suivant donne pour divers taux d'intérêt x, la valeur de : $100\, z = \lim \frac{fx}{y} = \frac{100\, x}{\mathrm{L}_{\mathrm{nep.}} (1 + x)}.$

x	100z	x	100z	x	100z
0,025	101,245	0,033	101,641	0,041	102,036
0,026	101,294	0,034	101,690	0,042	102,086
0,027	101,344	0,035	101,740	0,043	102,135
0,028	101,394	0,036	101,789	0,044	102,184
0,029	101,443	0,037	101,839	0,045	102,233
0,030	101,493	0,038	101,888	0,046	102,283
0,031	101,542	0,039	101,938	0,047	102,332
0,032	101,592	0,040	101,987	0,048	102,381
				0,049	102,430
				0,05	102,480

EXEMPLE. — *Quelle est la valeur d'une obligation* 500 *fr.* 3 %. *appartenant à une série de titres remboursables par annuités constantes en* 55 *ans si le taux réel d'intérêt est* 3,50 %? *Coupons semestriels.*

On a :

$$V = \frac{500 \times 0{,}03 \times \overline{1{,}03}^{55}}{\overline{1{,}03}^{55} - 1} \times \frac{\overline{1{,}035}^{55} - 1}{0{,}035 \times \overline{1{,}035}^{55}} = 453{,}12\,;$$

$$I = \frac{(500 - 453{,}12) \times 0{,}03}{0{,}035 - 0{,}03} = 281{,}28, \quad \text{et} \quad A = 171{,}84.$$

La valeur de l'usufruit réel sera :

$$I' = I \times \frac{1}{2} \frac{0{,}035}{\sqrt{1{,}035} - 1} = 283{,}72\,;$$

d'où : $$V' = 283{,}72 + 171{,}84 = 455{,}56.$$

Une variation de 0,01 dans le taux fait varier le cours de 0 fr. 70 à 0 fr. 80 ; il est donc nécessaire de tenir compte de l'influence de l'avance due à la semestrialité des coupons qui, augmentant le cours d'environ 2 fr. 50, fait augmenter le taux effectif d'environ 0,03 %.

167. **Taux effectif d'intérêt correspondant aux obligations à coupons fractionnaires.** — Les obligations à coupons fractionnaires étant celles qui se rencontrent le plus fréquemment dans la pratique, il est utile de rappeler la méthode générale permettant de calculer le taux réel connaissant le cours V'.

On calcule d'abord une valeur V_1' correspondant à un taux x_1, que l'on juge assez voisin de x.

Si $V_1' < V'$ on en conclut que $x_1 > x$.

On choisit un taux $x_2 < x_1$ et l'on calcule une valeur

V'_2 qui est supérieure à V' (s'il n'en était pas ainsi on prendrait un taux encore plus faible).

Le taux x est compris entre x_1 et x_2, et sa valeur résulte d'une interpolation par parties proportionnelles :

$$\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{V' - V'_2}{V'_1 - V'_2}.$$

Exemple. — *Les obligations roses P. L. M. 500 fr. 3 %, se négocient le 10 juin 1913 à 404 fr. Quel est le taux réel d'emprunt sans tenir compte des impôts ?*

On cherche dans un annuaire d'agents de change les conditions de l'emprunt P. L. M. 3 % fusion rose.

On trouve que les coupons d'intérêts se payent les 1er juillet et 1er janvier et que les remboursements s'opèrent le 1er janvier de chaque année, le dernier ayant lieu le 1er janvier 1959.

L'obligation doit donc subir encore 46 tirages (1913-1958).

On cherche dans les tables d'Arnaudeau la valeur d'un titre de cette nature amortissable en 46 ans, à coupons semestriels.

On trouve les chiffres suivants :

à 4 3/8	399,37
à 4 1/2	391,73

Mais ces valeurs correspondent aux cours au 1er janvier 1913, coupon détaché.

Il faut donc soit ramener le cours de 404 fr. à ce 1er janvier en en retranchant les intérêts courus :

$$\frac{15 \times 160}{360} = 15 \times 0{,}44 = 6{,}60.$$

Soit, d'une manière plus exacte, amener les valeurs ci-dessus au 10 juin en tenant compte de leurs intérêts au taux réel.

1er *Procédé*. — Le cours nivelé est $404 - 6{,}60 = 397{,}40$. L'interpolation donne :

$$x = 0{,}045 - (0{,}045 - 0{,}04375) \times \frac{397{,}40 - 391{,}73}{399{,}37 - 391{,}73} =$$
$$= 0{,}044.07.$$

2me *Procédé*. — A 4 3/8, on a pour valeur du titre

$$399{,}37\,(1{,}043.75)^{\frac{5}{12}+\frac{9}{360}}.$$

Dans les limites de l'approximation désirée, nous pouvons écrire pour la valeur de l'obligation :

$$399{,}37\,(1{,}043.75)^{\frac{5}{12}}\,(1 + 9\alpha),$$

α désignant le taux pour un jour, équivalent au taux annuel 4 3/8. On trouve dans les tables de Violeine :

$$(1{,}043.75)^{\frac{5}{12}} = 1{,}018.00$$
$$\alpha = 0{,}000.12$$

on a : $9\alpha = 0{,}001.08$

et : $399{,}37 \times 1{,}018.00 \times 1{,}001.08 = 407$ fr.

A 4 1/2, on a pour valeur du titre :

$$391{,}73\,(1{,}045)^{\frac{5}{12}+\frac{9}{360}}.$$

On trouve, dans les tables de Violeine :

$$(1{,}045)^{\frac{5}{12}} = 1{,}018.51$$
$$\alpha = 0{,}000.12$$

on calcule : $9\alpha = 0{,}001.08$

et : $391{,}73 \times 1{,}018.51 \times 1{,}001.08 = 399$ fr. 42.

Par suite, l'interpolation donnera :

$$x = 0{,}045 - (0{,}045 - 0{,}043.75) \times \frac{404 - 399{,}42}{407 - 399{,}42} =$$
$$= 0{,}044.24.$$

Ce taux est plus exact que le précédent, mais comme en général, on exprime le taux en $^0/_0$ et arrêté au centime, on voit que les résultats sont presque identiques.

168. **Obligations dont le capital remboursé est différent du capital nominal. Annuités constantes.** — Soient N le nombre des titres, C le capital nominal, i le taux, n le nombre des périodes, et Γ le capital à rembourser. En désignant par N_p, m_p et m_{p+1}, le nombre d'obligations restant à amortir avant le p^e tirage, et les nombres d'obligations amorties dans les p^e et $(p+1)^e$ tirages, on aura, en égalant les p^{me} et $(p+1)^{me}$ annuités :

$$a = N_p Ci + m_p\Gamma = (N_p - m_p)Ci + m_{p+1}\Gamma,$$

$$m_p(\Gamma + Ci) = m_{p+1}\,\Gamma, \quad m_{p\pm 1} = \left(1 + \frac{Ci}{\Gamma}\right)m_p.$$

Les amortissements vont donc en croissant en progression géométrique, et tout se passe comme si le taux nominal i était remplacé par un taux auxiliaire $\frac{Ci}{\Gamma}$, applicable au capital Γ qui deviendrait en même temps le capital auxiliaire et le capital de remboursement.

Les calculs de valeurs de titres seront donc conduits comme précédemment, en remplaçant toutefois C par Γ et i par $\frac{Ci}{\Gamma}$.

Exemple. — *Quel doit être le cours d'émission d'obligations de capital nominal 400 fr. rapportant 20 fr. d'intérêts par an payables en deux semestres et remboursables à 500 fr. si l'on veut que le taux d'intérêt réel soit 5 $^0/_0$, la période d'amortissement étant de 30 ans et les annuités constantes ?*

Pour que l'annuité reste fixe, il suffit de considérer les obligations comme étant remboursables à 500 fr. et rapportant $\frac{20}{500} = 4\ \%$ de ce capital.

La valeur de ce titre est, à 5 %, sans tenir compte de la semestrialité des coupons :

$$V = 500 \times \frac{0{,}04 \times \overline{1{,}04}^{30}}{\overline{1{,}04}^{30} - 1} \times \frac{\overline{1{,}05}^{30} - 1}{0{,}05 \times \overline{1{,}05}^{30}} = 444{,}49.$$

$$I = \frac{(500 - 444{,}49) \times 0{,}04}{0{,}05 - 0{,}04} = 222{,}04 \quad \text{et} \quad A = 222{,}45.$$

I′ valeur de l'usufruit majoré pour tenir compte de la semestrialité des coupons sera égale à :

$$I' = 222{,}04 \times \left(1 + \frac{\sqrt{1{,}05} - 1}{2}\right) = 224{,}78\,;$$

d'où : $\qquad V' = 224{,}78 + 222{,}45 = 447{,}23.$

169. **Obligations dont le capital remboursé est différent du capital nominal. Annuités variables.** — On peut spécifier que le tableau d'amortissement sera calculé sur le capital nominal et au taux i, chaque obligation recevant au remboursement le capital $\Gamma > C$ et non le capital C. Dans ce cas, l'annuité est variable et croissante. On aura :

$$a_p = N_p Ci + m_p \Gamma, \quad a_{p+1} = [N_p - m_p]\, Ci + m_p(1 + i)\Gamma,$$

et l'on voit que : $a_{p+1} - a_p = m_p i(\Gamma - C)$. L'annuité augmente donc de quantités croissant en progression géométrique. On aura la formule générale :

$$a_{p+1} = m_p i(\Gamma - C) + m_{p-1} i(\Gamma - C) + \ldots$$
$$+ m_1 i(\Gamma - C) + a_1$$

$$a_{p+1} = i(\Gamma - C)\frac{Ni}{(1+i)^n - 1}\,\frac{(1+i)^p - 1}{i} +$$
$$+ NCi + \frac{Ni}{(1+i)^n - 1}\,\Gamma.$$

(Les deux derniers termes forment a_1.)

$$a_{p+1} = \frac{Ni}{(1+i)^n - 1}\left\{C[(1+i)^n - (1+i)^p] + \Gamma(1+i)^p\right\}$$

$$= \frac{CNi(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} + \frac{Ni(\Gamma - C)}{(1+i)^n - 1}(1+i)^p.$$

La valeur actuelle de ces annuités escomptées au taux x comprend deux parties :

1° Valeur actuelle de $\frac{CNi(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$, c'est-à-dire NV ;

2° Valeur actuelle de $\frac{Ni(1+i)^p}{(1+i)^n - 1}(\Gamma - C)$, c'est-à-dire des plus-values d'amortissement.

Or, la valeur de la nue propriété correspondant au remboursement C est A, la valeur de cette nue propriété correspondant à la prime $(\Gamma - C)$ sera :

$$\frac{A(\Gamma - C)}{C}.$$

Le prix unitaire de chaque titre sera donc :

$$V' = V + A\frac{\Gamma - C}{C} = I + A + A\left(\frac{\Gamma}{C} - 1\right) = I + A\frac{\Gamma}{C}.$$

On pouvait trouver cette valeur directement en remarquant que l'usufruit de ces titres est le même que celui des titres ordinaires, tandis que chaque amortissement A est multiplié par $\frac{\Gamma}{C}$.

Exemple. — *A quel cours doit-on émettre des titres de 400 fr. 5 % remboursables en 30 ans et avec une prime de 100 fr. si le taux réel d'intérêt est 5 % ?*

On supposera que la prime de 100 fr. est payée en sus de l'annuité constante des titres de 400 fr. 5 %.

On aura : $V = 400$ fr. puisque le taux réel est le même que le taux nominal.

De plus : $$A = \frac{30 \times 400 \times 0{,}05}{\left(\overline{1{,}05}^{30} - 1\right) 1{,}05} = 172 \text{ fr. } 01.$$

D'où : $$V' = 400 + 172{,}01 \times \frac{100}{400} = 443 \text{ fr.}$$

170. **Obligations à coupons annuels perdant le droit au coupon lors du remboursement.** — Soient N_p le nombre d'obligations en circulation dans la p^{me} année après l'émission, m_p et m_{p+1} les nombres d'obligations amorties dans les p^{me} et $(p+1)^{me}$ années.

Pour que l'annuité soit constante, il faut que l'on ait :

$$(N_p - m_p)\, Ci + m_p C = (N_p - m_p - m_{p+1}) Ci + m_{p+1} C;$$

d'où : $$m_p = m_{p+1}(1 - i).$$

Les amortissements successifs sont en progression de raison $\frac{1}{1-i}$ au lieu de $(1 + i)$.

On peut aussi considérer ces obligations comme suit :

L'annuité s'écrit :

$$a = (N - m_p)\, Ci + m_p C = NCi + m_p C(1 - i),$$

ou bien : $$a = \Gamma \left(\frac{Ni}{1-i} + m_p\right),$$

en posant $$\Gamma = C(1 - i).$$

on a aussi : $$m_{p+1} = m_p \frac{1}{1-i} = m_p \left(1 + \frac{i}{1-i}\right).$$

On peut donc considérer les obligations comme ayant un capital nominal $\Gamma = C(1 - i)$ et un tableau d'amortissement établi d'après le taux $i' = \frac{i}{1-i}$, ce qui les fait rentrer dans le cas ordinaire pour tous les calculs.

Il n'y aura aucune difficulté à opérer les calculs des valeurs actuelles sur de telles obligations, en modifiant comme il vient d'être indiqué les conditions nominales des titres.

C'est le cas des titres soumis aux « Anticipativen Zinsen » ; les formules précédentes ne sont d'ailleurs que la reproduction de celles données au n° 134.

171. **Obligations à coupons semestriels perdant droit au coupon lors du remboursement.** — Soient N_p le nombre d'obligations en circulation dans la p^{me} année après l'émission, m_p et m_{p+1} les nombres d'obligations amorties dans les p^{me} et $(p+1)^{mes}$ années ; l'annuité de l'emprunt sera constante si :

$$a = N_p \frac{Ci}{2} + (N_p - m_p)\frac{Ci}{2} + m_p C = (N_p - m_p)\frac{Ci}{2}$$

$$+ (N_p - m_p - m_{p+1})\frac{Ci}{2} + m_{p+1} C;$$

d'où ;
$$m_p\left(C + \frac{Ci}{2}\right) = m_{p+1}\left(C - \frac{Ci}{2}\right),$$

$$m_{p+1} = m_p \frac{2+i}{2-i}.$$

Les amortissements suivent une loi de progression géométrique croissante de raison $\frac{2+i}{2-i} > 1$.

Le 1er amortissement de m_1 titres sera déterminé par l'égalité :

$$N = m_1 \left[1 + \frac{2+i}{2-i} + \frac{(2+i)^2}{(2-i)^2} + \dots + \frac{(2+i)^{n-1}}{(2-i)^{n-1}} \right]$$

$$= m_1 \frac{(2+i)^n - (2-i)^n}{2i(2-i)^{n-1}} ;$$

d'où : $$m_1 = \frac{2Ni(2-i)^{n-1}}{(2+i)^n - (2-i)^n}.$$

La 1re annuité sera :

$$a = \frac{NCi}{2} + \frac{(N - m_1)}{2} Ci + m_1 C = NCi + m_1 C \left(1 - \frac{i}{2}\right)$$

$$a = NCi \left[1 + \frac{(2-i)^n}{(2+i)^n - (2-i)^n} \right]$$

$$= NCi \frac{(2+i)^n}{(2+i)^n - (2-i)^n}.$$

Ce serait l'annuité amortissant le capital $NC\left(1 - \frac{i}{2}\right)$ au taux x tel que : $1 + x = \frac{2+i}{2-i}$.

On aurait en effet : $x = \frac{2+i}{2-i} - 1 = \frac{2i}{2-i}$, et l'annuité amortissant le capital serait :

$$\frac{Ax(1+x)^n}{(1+x)^n - 1} = \frac{NCi(2+i)^n}{(2+i)^n - (2-i)^n}.$$

On est donc ramené à un cas particulier des « Anticipativen Zinsen », dans lequel l'anticipation d'intérêt est égale à la moitié du premier payement.

EXEMPLE. — *Etablir le tableau d'amortissement de* 1.000 *obligations* 500 *fr.* 3 %, *à coupons semestriels de* 7 *fr* 50, *amor-*

issables en 5ans par annuités constantes, sachant que ces obligations perdent le droit au coupon au moment du remboursement.

Quelle est lavaleur de ces titres au taux de 4 %?

On a :

$$a = 1.000 \times 500 \times 0{,}03 \frac{\overline{2{,}03}^{5}}{\overline{2{,}03}^{5} - \overline{1{,}97}^{5}} = 107.679 \text{ fr, } 94.$$

Le 1er amortissement en nombre d'obligations est :

$$m_1 = \frac{2 \times 1.000 \times 0{,}03 \times \overline{1{,}97}^{4}}{\overline{2{,}03}^{5} - \overline{1{,}97}^{5}} = \frac{903{,}683.10}{4{,}802.161} = 188{,}182.$$

Il peut s'obtenir aussi en partant de l'annuité :

$$m_1 = \frac{107.679{,}94 - 15.0\ 0}{500 - 7{,}50} = 188{,}182.$$

La raison de la progression des amortissements est :

$$\frac{2{,}03}{1{,}97} = 1{,}030.456.8.$$

Avec ces données il est facile d'établir le tableau d'amortissement suivant, qui est calculé complètement en tenant compte des restes annuels sur les annuités.

ANNÉES	SOMME DUE AU COMMENCEMENT DE CHAQUE ANNÉE	NOMBRES DE TITRES PORTANT INTÉRÊTS	INTÉRÊTS	ANNUITÉ DISPONIBLE	SOMME DISPONIBLE POUR L'AMORTISSEMENT	AMORTISSEMENTS EFFECTIFS — Nombres	AMORTISSEMENTS EFFECTIFS — Sommes	RESTE DISPONIBLE	RESTE ET INTÉRÊTS à 3,04568
1	500 000	1 000 812	7 500 » 6 090 »	107 679,94	94 089,94	188	94 000	89,94	92,68
2	406 000	812 618	6 090 » 4 635 »	107 772,62	97 047,62	194	97 000	47,62	49,07
3	309 000	618 419	4 635 » 3 142,50	107 729,01	99 951,51	199	99 500	451,51	465,27
4	209 500	419 213	3 142,50 1 597,50	108 145,21	103 405,21	206	103 000	405,21	417,56
5	106 500	213 »	1 597,50 »	108 097,50	106 500 »	213	106 500	»	»

Dans la construction de ce tableau, le taux d'intérêt à appliquer au reste annuel est le taux 3,045.68 % et non 3 %.

172. **Obligations à lots.** — En général, les lots forment une somme qui vient s'ajouter à l'annuité, et qui est répartie entre les premiers numéros des titres sortis au tirage, suivant une convention indiquée sur les obligations.

Le nombre de titres, appelé à bénéficier de ces lots, est le plus souvent assez faible, de telle sorte que la chance de gain est elle-même petite ; mais, comme le nombre d'obligations primées reste fixe, et que le nombre de titres diminue au fur et à mesure des tirages, la probabilité de gain augmente pour chacun des tirages successifs considéré séparément.

Soit p le nombre de titres primés ; la probabilité de gagner un lot est évidemment à l'origine $\frac{p}{N}$, c'est : le produit de la probabilité $\frac{p_1}{N}$ de sortie d'un titre au premier tirage par la probabilité de sortie $\frac{p}{p_1}$ du titre parmi les p premiers, soit :

$$\frac{p_1}{N} \times \frac{p}{p_1} = \frac{p}{N}.$$

Ce procédé de calcul peut s'appliquer à chaque tirage.

La plus-value donnée par les lots à la valeur de l'obligation s'obtiendra en divisant la valeur actuelle de l'annuité de loterie par le nombre de titres restant à amortir.

Soit L l'annuité de loterie, la plus value quand il restera encore p années d'amortissement sera :

$$\theta = \frac{L\dfrac{(1+x)^p - 1}{x(1+x)^p}}{N\dfrac{(1+i)^n - (1+i)^{n-p}}{(1+i)^n - 1}} = \frac{L}{N}\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \cdot \frac{\dfrac{(1+x)^p - 1}{x(1+x)^p}}{\dfrac{(1+i)^p - 1}{i(1+i)^p}}.$$

Cette transformation se fait sans difficulté et met en évidence le rapport des valeurs actuelles de p annuités aux taux x et i.

Or la quantité :

$$\frac{\dfrac{(1+x)^p - 1}{x(1+x)^p}}{\dfrac{(1+i)^p - 1}{i(1+i)^p}} = \frac{i(1+i)^p}{(1+i)^p - 1} \times \frac{(1+x)^p - 1}{x(1+x)^p}$$

représente la valeur actuelle au taux x de p annuités amortissant 1 fr. au taux i.

On a vu (voir n° 153, p. 245) que cette valeur décroît quand p augmente.

La valeur de θ décroît donc aussi avec p.

Quand $p = n$, c'est-à-dire au premier tirage :

$$\theta_n = \frac{L}{N} \cdot \frac{(1+x)^n - 1}{x(1+x)^n}.$$

Quand $p = 1$, c'est-à-dire au dernier tirage :

$$\theta_1 = \frac{L}{N} \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \cdot \frac{1+i}{1+x}.$$

Le rapport :

$$\frac{\theta_n}{\theta_1} = \frac{i(i+i)^n}{(1+i)^n - 1} \times \frac{(1+x)^n - 1}{x(1+x)^n} \cdot \frac{1+x}{1+i}$$

est très voisin du rapport de V à C ; on a en effet en remplaçant :

$$\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1} \times \frac{(1+x)^n-1}{x(1+x)^n} \quad \text{par} \quad \frac{V}{C};$$

$$\frac{\theta_n}{\theta_1} = \frac{V}{C} \times \frac{1+x}{1+i}.$$

Exemple. — *Une commune contracte un emprunt à 6 %, chez un banquier, sous la condition de faire le remboursement par 30 annuités fixes de 1.530.000 fr.*

Le banquier, sous cette garantie, émet des obligations 500 fr. 4 %, à coupons et amortissements annuels, et donnant droit à des remboursements par tirages au sort, les 5 premières obligations recevant une somme constituant un lot.

Quelle est la valeur de ces lots et le prix d'émission des titres, sachant que le souscripteur réalise un placement à 5 % et que le banquier réalise un bénéfice de 50 fr. par titre à l'émission ?

Soient N, L et V, le nombre de titres, la valeur de l'annuité des lots et enfin le prix d'émission par le souscripteur.

La commune doit recevoir la valeur actuelle à 6 % des 30 annuités de 1.530.000 fr., soit :

$$1.530.000 \times \frac{\overline{1,06}^{30} - 1}{0,06 \times \overline{1,06}^{30}} = 21.060.191,66.$$

La somme payée par les obligations NV comprendra la somme précédente et 50 fr. par titre perçus par le banquier, donc :

$$(1) \qquad NV = 21.060.191,66 + 50\,N.$$

L'annuité de 1.530.000 fr. doit servir à payer l'annuité totale des obligations, c'est-à-dire l'intérêt, l'amortissement et les lots.

On aura donc :

$$(2) \qquad 1.530.000 = \frac{N \times 500 \times 0,04 \times \overline{1,04}^{30}}{\overline{1,04}^{30} - 1} + L.$$

De plus, le souscripteur recevant 5 % de son prêt, la valeur actuelle des 30 annuités de 1.530.000 fr. escomptées à 5 % doit reproduire NV, d'où :

$$(3) \qquad NV = 1.530.000 \times \frac{\overline{1{,}05}^{30} - 1}{0{,}05 \times \overline{1{,}05}^{30}}.$$

La comparaison des deux valeurs de NV donne immédiatement :

$$21.060.191{,}66 + 50\,N = 1.530.000 \times 15{,}372.451.03\,;$$

d'où : $N = 49.193$ titres.

De la seconde égalité on déduira :

$$L = 1.530.000 - 49.193 \times 28{,}915.05 = 107.582 \text{ fr.}$$

et enfin : $V = \dfrac{21.060.191{,}66}{49.193} + 50 = 478{,}11.$

A l'origine, la valeur des lots est :

$$107.582 \times \frac{\overline{1.05}^{30} - 1}{0{,}05 \times \overline{1{,}05}^{30}} = 1.653.799{,}02.$$

Soit pour un titre :

$$\frac{1.653.799{,}02}{49.193} = 3{,}36.$$

Au dernier tirage il sortira un nombre de titres égal à :

$$\frac{49.193 \times 0{,}04 \times \overline{1{,}04}^{30}}{\overline{1{,}04}^{30} - 1} \times \frac{1}{1{,}04} = 2.735,$$

et la valeur des lots sera un an avant ce tirage :

$$\frac{107.582}{2.735 \times 1{,}05} = 3{,}74 \text{ par titre.}$$

173. Obligations à lots, remboursées par ces lots. — Dans la généralité des cas, toute obligation primée est, de ce fait, remboursée.

Pour faire aisément les calculs relatifs à ces titres, il suffit évidemment de diminuer la valeur de l'annuité L du montant du remboursement des titres au pair, de manière à ne pas apporter de trouble dans les annuités de l'emprunt ; on suppose ensuite que tous les titres sont remboursés au pair comme dans les conditions ordinaires.

174. Obligations ne donnant droit à aucun intérêt, mais dont le capital remboursé croît chaque année d'une quantité fixe. — Ce type d'obligations est assez rare : on peut citer comme exemple les bons à lots du Congo.

Le nombre d'obligations amorties chaque année est réglé comme suit, pour que les annuités soient sensiblement constantes.

Soient $m_1, m_2, \ldots, m_n$ les nombres de titres à rembourser, C le capital primitif, p l'augmentation annuelle constante on aura :

$$m_1 C = m_2(C + p) = m_3(C + 2p) = m_n[C + (n - 1)p],$$

ou :

$$\frac{m_1}{\frac{1}{C}} = \frac{m_2}{\frac{1}{C+p}} = \ldots = \frac{m_n}{\frac{1}{C + (n-1)p}}$$

$$= \frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}{\frac{1}{C} + \frac{1}{C+p} + \ldots + \frac{1}{C + (n-1)p}} = \frac{N}{D},$$

en désignant par D la somme :

$$\frac{1}{C} + \frac{1}{C+p} + \ldots + \frac{1}{C + (n-1)p}.$$

On déduit facilement des égalités précédentes les valeurs de m_1, m_2, ... qui vont nécessairement en décroissant.

Le calcul de la valeur moyenne d'un titre, évaluée au taux d'intérêt x, se fera en divisant la valeur actuelle des annuités restant à payer par le nombre de titres restant à rembourser.

175. **Obligations dont les prix de remboursement varient par périodes.** — On a émis des titres remboursables en n années donnant droit à des intérêts Ci, mais dont les capitaux de remboursement sont variables et généralement croissants.

Pour calculer les tableaux d'amortissement, en supposant les annuités constantes, on écrit les valeurs successives de ces annuités en fonction des amortissements.

On évalue, à l'aide des égalités obtenues, les amortissements en fonction du premier ; la somme des amortissements devant reproduire le nombre de titres à amortir ; on calculera le 1er amortissement.

Exemple. — *Dresser le tableau d'amortissement de* 1.000 *obligations rapportant* 10 *fr. d'intérêts par an et remboursables en* 5 *ans à* 300 *fr.,* 350 *fr.,* 400 *fr.,* 450 *fr.,* 500 *fr., de telle manière que les annuités payées soient constantes.*

On aura :

$$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 = 1.000 = \mathrm{N}\,;$$

puis :
$$\begin{aligned} a &= \mathrm{N} \times 10 + 300\,m_1 \\ &= (\mathrm{N} - m_1)\,10 + 350\,m_2 \\ &= (\mathrm{N} - m_1 - m_2)\,10 + 400\,m_3 \\ &= (\mathrm{N} - m_1 - m_2 - m_3) \times 10 + 450\,m_4 \\ &= 10\,m_5 + 500\,m_5 = 510\,m_5. \end{aligned}$$

La comparaison des deux premières égalités donne :

$$\mathrm{N} \times 10 + 300\,m_1 = (\mathrm{N} - m_1) \times 10 + 350\,m_2\,;$$
$$300\,m_1 + m_1 \times 10 = 350\,m_2\,;$$

d'où :
$$m_2 = \frac{310}{350} m_1.$$

On aura aussi :

$$(N - m_1) \times 10 + 350\, m_2 = (N - m_1 - m_2) \times 10 + 400\, m_3$$
$$350\, m_2 + 10\, m_2 = 400\, m_3,$$
$$m_3 = \frac{360}{400} m_2 = \frac{360}{400} \times \frac{310}{350} m_1.$$

De même :

$$m_4 = \frac{410}{450} \times \frac{360}{400} \times \frac{310}{350} m_1,$$
$$m_5 = \frac{460}{500} \times \frac{410}{450} \times \frac{360}{400} \times \frac{310}{350} m_1.$$

D'où :

$$1.000 = m_1 \left[1 + \frac{31}{35} + \frac{36}{40} \times \frac{31}{35} + \cdots \right.$$
$$\left. + \frac{46}{50} \times \frac{41}{45} \times \frac{36}{40} \times \frac{31}{35} \right];$$

et par suite : $m_1 = 245{,}26.$

D'où le tableau d'amortissement suivant réduit à ses colonnes essentielles.

ANNÉES	NOMBRE DE TITRES EN CIRCULATION AU COMMENCEMENT DE CHAQUE ANNÉE	NOMBRE DE TITRES AMORTIS	INTÉRÊTS	AMORTISSEMENTS	ANNUITÉ TOTALE	
1	1 000	245	10 000	73 500	83 500	
2	755	217	7 550	75 950	83 500	
3	538	196	5 380	78 400	83 780	
4	342	178	3 420	80 100	83 520	
5	164	164	1 640	82 000	83 640	
	2 799	1 000	27 990	389 950	417 940	

La valeur moyenne de ces titres s'obtiendra en divisant comme précédemment la valeur actuelle des annuités restant à recevoir par le nombre de titres en circulation. Elle variera suivant les conditions de l'emprunt.

176. **Titres dont les annuités sont variables.** — Il arrive quelquefois que des titres sont émis avec des tableaux d'amortissement donnant des annuités variables. On peut citer comme exemple l'emprunt de la Compagnie Paris-Lyon, émis en 1852, et dont la moitié du capital nominal a été amortie à fin 1905, la seconde moitié devant être amortie de 1906 à 1954.

Le calcul de la valeur moyenne des titres de pareils emprunts ne présente aucune difficulté, sauf la longueur des calculs qui peuvent se simplifier si la loi de variation des annuités le permet.

La valeur de ces titres varie beaucoup lorsqu'on approche d'un point critique du tableau d'amortissement; ils donnent lieu à des opérations d'arbitrage très intéressantes pour ceux qui connaissent ces particularités.

Les actions des Sociétés rentrent dans cette catégorie avec cette complication que le revenu est indéterminé et qu'elles ont droit à la fin de la Société à une part de l'excédent d'actif, s'il existe.

Aussi, est-il très difficile d'évaluer le prix réel d'une action : même, dans le cas des titres des Compagnies de chemins de fer dont le revenu est garanti dans certaines conditions, il est à près impossible de donner des calculs mathématiques permettant une évaluation rationnelle; on serait amené à faire des hypothèses dans l'examen raisonné du bilan détaillé, lequel permet de coter la valeur, avec un aléa important, d'ailleurs.

Cependant on doit observer les règles générales suivantes :

Examiner la valeur de l'actif net probable réalisable à la fin de la Société ; le ramener à la valeur actuelle à l'époque d'évaluation en escomptant au taux maximum d'intérêt du marché.

Evaluer les intérêts probables des titres pendant cette période en les ramenant à leur valeur actuelle au taux ci-dessus. Le total des deux valeurs actuelles ainsi trouvées, fournira le prix probable du titre.

Il est nécessaire de bien connaître les conventions et les traités particuliers et l'estimation ne peut être faite que par des personnes très au courant de l'affaire à étudier.

177. **Titres émis au-dessus du pair, ou dépassant le pair.** — Tout ce qui a été dit précédemment suppose, ce qui est le cas général, que le cours est inférieur au capital nominal et que, par suite, le taux d'emprunt est supérieur au taux nominal.

Mais les formules s'appliqueraient dans les hypothèses inverses qui se présentent assez rarement dans la pratique.

178. **Perte au remboursement. Assurance contre le remboursement au pair.** — Quand un titre est coté au-dessus du pair, on subit une perte au moment du remboursement ; les Sociétés de crédit assurent contre cette perte en promettant de payer la différence entre le cours coté et le pair, en cas de sortie.

Si elles assuraient tous les titres, leur opération reviendrait à payer une annuité complémentaire croissante dont la valeur actuelle serait évidemment proportionnelle à la nue propriété, en supposant que le cours restât fixe ; en réalité, ce cours décroîtra peu à peu pour arriver à la valeur C à la fin de l'amortissement.

Pratiquement, l'opération d'assurance est effectuée soit pour un seul tirage, soit pour les tirages d'une année. Les Sociétés se réservent le droit de fournir un titre semblable à celui sorti ou de payer en espèces la valeur du titre au cours de la Bourse le jour du tirage. Elles optent pour le premier procédé si elles ont en portefeuille des titres achetés bon marché, et, au contraire, elles payent en numéraire si les titres n'existant pas en portefeuille se négocient très rarement.

Soit Γ, le cours de la Bourse quand il reste encore p tirages à effectuer et un nombre de titres :

$$N \frac{(1+i)^n - (1+i)^{n-p}}{(1+i)^n - 1} \text{ en circulation.}$$

La chance de sortie d'un titre au 1er de ces p tirages est :

$$\frac{N \dfrac{i(1+i)^{n-p}}{(1+i)^n - 1}}{N \dfrac{(1+i)^n - (1+i)^{n-p}}{(1+i)^n - 1}} = \frac{i}{(1+i)^p - 1} \quad \text{(voir n° 147, 1°, p. 235).}$$

La valeur de la prime à payer est donc :

$$\pi = \frac{i(\Gamma - C)}{(1+i)^p - 1} \times \frac{1}{1+x}.$$

Cette prime augmente lorsque p diminue, et lorsque p égale 1 elle devient $\frac{\Gamma - C}{1+x}$, ce qui était évident.

Exemple. — *Les obligations Lyon-Méditerranée* 5 °/₀ *se négocient* 636 fr. *et sont remboursables à* 625 fr.

Quelle est le 1er *janvier* 1907, *la prime à payer contre le remboursement au pair, sachant que ces obligations sont amortissables à partir du* 1er *avril* 1907 *et que le tableau d'amortissement constate* 292 *titres à amortir à ce tirage sur* 54.658 *en circulation ? Taux réel d'escompte* 3 °/₀.

La différence entre le pair 625 fr. et le cours coté 636 fr. est de 11 fr. ; la prime théorique sera donc :

$$\pi = \frac{292 \times 11}{54.658} \times \frac{1}{(1,03)^{1/4}} = 0 \text{ fr., } 058.$$

Ce serait la prime si les tirages s'effectuaient par unités, mais, en réalité, les tirages s'effectuent par séries de 100, de telle sorte que, par le jeu des tirages antérieurs, les probabilités de sorties sont entièrement modifiées.

En effet, il y avait à l'origine 1.200 séries de 100 titres sur lesquelles un certain nombre, que l'on pourrait dénombrer par un dépouillement patient des tableaux de tirages, a été entièrement amorti dans les précédents tirages, soit par exemple 500 sur les 660 qui pourraient être amorties si les tirages avaient été réguliers et suivis.

Il reste donc 700 séries : on en tirera trois au moins pour amortir les 292 titres et peut-être, si les séries favorisées sont incomplètes, faudra-t-il appeler 5, 6 séries ou plus, de telle sorte que la probabilité de sortie d'une série peut varier de :

$$\frac{3}{700} = 0{,}004 \text{ à } \frac{7}{700} = 0{,}01 \text{ au plus.}$$

Dans ce cas, la prime devrait être, en remplacant $(1{,}03)^{1/4}$ par 1,007 :

$$0{,}01 \times \frac{11}{1{,}007} = 0 \text{ fr. } 11.$$

De plus, la Société de crédit n'assurant pas *tous les titres*, ses chances de perte sont augmentées par ce fait que ce sont les porteurs de grosses coupures dont les numéros se suivent qui s'assurent et dont le remboursement au pair peut coûter fort cher.

Aussi sera-t-il sage de *charger* la prime ci-dessus, mais, la valeur des chargements est absolument laissée à l'appréciation de l'assureur.

En fait ces titres étaient assurés, à l'époque indiquée :

Par le Crédit lyonnais, pour 0 fr. 50 ;

Par la Société générale, pour 0 fr. 50 ;

Par le Crédit industriel et commercial, pour 0 fr. 35.

CHAPITRE IV

INFLUENCE DES TAXES SUR LE PRIX DES VALEURS

179. **Taxes frappant les valeurs mobilières.** — Les taxes frappant les obligations sont les suivantes :

Impôt du timbre à la charge des

Ce livre venait de paraître quand la loi du 29 mars 1914 a modifié les impôts comme suit :

Les droits de timbre (n° 180) ont été portés de 1,20 et 0,06 à 1,80 et 0,09.

Le droit de mutation des titres au porteur en titres nominatifs est porté de 0,75 % à 0,90 %.

L'impôt de circulation (n° 182) est porté de 0,25 % à 0,30 %.

---

au payement immédiat de 1 fr. 20 % ou d'une annuité de 0 fr. 06 %. Cette équivalence n'existe en réalité que pour un taux déterminé, si le nombre d'années d'amortissement de l'emprunt est déterminé.

Pour se rendre compte s'il y a intérêt ou non à choisir l'abonnement, il suffit de comparer la valeur actuelle, escomptée à un taux déterminé, de l'abonnement au timbre, à la valeur du payement immédiat.

La valeur des payements de timbre étant proportion-

Ce serait la prime si les tirages s'effectuaient par unités, mais, en réalité, les tirages s'effectuent par séries de 100, de telle sorte que, par le jeu des tirages antérieurs, les probabilités de sorties sont entièrement modifiées.

En effet, il y avait à l'origine 1.200 séries de 100 titres sur lesquelles un certain nombre, que l'on pourrait dénombrer par un dépouillement patient des tableaux de tirages,

fort cher.

Aussi sera-t-il sage de *charger* la prime ci-dessus, mais, la valeur des chargements est absolument laissée à l'appréciation de l'assureur.

En fait ces titres étaient assurés, à l'époque indiquée :

Par le Crédit lyonnais, pour 0 fr. 50 ;

Par la Société générale, pour 0 fr. 50 ;

Par le Crédit industriel et commercial, pour 0 fr. 35.

CHAPITRE IV

INFLUENCE DES TAXES SUR LE PRIX DES VALEURS

179. **Taxes frappant les valeurs mobilières.** — Les taxes frappant les obligations sont les suivantes :

Impôt du timbre à la charge des emprunteurs.

Impôt sur le revenu, les primes au remboursement et les lots à la charge des obligataires.

Impôt de transmission ou de circulation à la charge des obligataires.

Impôt sur les opérations de bourse.

180. **Influence de l'impôt du timbre.** — Cet impôt, établi par les articles 27 à 32 de la loi des 7, 22 mars et 5 juin 1850, est de 1 % du montant du titre, payé au moment même de l'émission.

Ce droit peut être remplacé par un abonnement de 0 fr. 05 par titre en circulation et par an.

Ces impôts ont été frappés d'un double décime par les lois du 23 août 1871 et 30 mars 1872 (art. 3) et sont actuellement de 1 fr. 20 % et 0 fr. 06 %.

L'État admet donc l'équivalence du payement immédiat de 1 fr. 20 % ou d'une annuité de 0 fr. 06 %. Cette équivalence n'existe en réalité que pour un taux déterminé, si le nombre d'années d'amortissement de l'emprunt est déterminé.

Pour se rendre compte s'il y a intérêt ou non à choisir l'abonnement, il suffit de comparer la valeur actuelle, escomptée à un taux déterminé, de l'abonnement au timbre, à la valeur du payement immédiat.

La valeur des payements de timbre étant proportion-

nelle à celle des payements d'intérêts, on la trouve par la formule :
$$T_1 = I \times \frac{0,06}{100\,i}.$$
et, si l'on veut tenir compte de la trimestrialité des paiements de timbre, on devra calculer :
$$T = I \times \frac{0,06}{100\,i} \times \frac{1}{4} \times \frac{x}{y},$$
y désignant le taux trimestriel équivalent au taux x.

Pour que le payement par abonnement soit avantageux il suffit donc que :
$$T = I \times \frac{0,06}{100\,i} \times \frac{1}{4}\frac{x}{y} < \frac{1 \text{ fr. } 20 \times C}{100}.$$

Si l'on prend, par exemple, comme type, les obligations 500 fr. 3 %, on aura à chercher les valeurs de n [n = durée d'amortissement des obligations] pour lesquelles :
$$I \times \frac{0,06}{100 \times 0,03} \times \frac{1}{4}\frac{x}{y} < \frac{1,20 \times 500}{100},$$
$$I \times \frac{x}{y} < 1.200.$$

En se servant des tables des valeurs de I, il est alors facile de dresser le tableau suivant :

TAUX % RÉEL DU MARCHÉ	TAUX % TRIMESTRIEL y	RAPPORT $\frac{y}{x}$	$1200\frac{y}{x} = I$	VALEUR DE I LA PLUS VOISINE ET INFÉRIEURE	VALEUR DE n
2 1/2	0,619	0,248	297,6	297,60	48
2 3/4	0,681	0,248	297,6	295,56	50
3	0,742	0,248	297,6	292,58	52
3 1/4	0,803	0,248	297,6	295,56	56
3 1/2	0,864	0,246	295,2	293,16	53
3 3/	0,925	0,246	295,2	294,44	63
4	0,985	0,246	295,2	295,08	70
4 1/2	1,106	0,246	295,2	294,88	88

Relativement à l'augmentation du taux de charge d'emprunt, causée aux banquiers par cet impôt, il suffit d'écrire que chaque coupon Ci est augmenté de la valeur du timbre, et la détermination du taux réel d'emprunt d'une obligation de 500 fr., par exemple, à coupons semestriels, résultera de l'équation :

$$V = I\left[\frac{1}{2}\frac{x}{(1+x)^{\frac{1}{2}}-1}+\frac{1}{4i}\frac{x \times 0{,}000.6}{(1+x)^{\frac{1}{4}}-1}\right]+A.$$

Pratiquement la résolution de cette équation ne peut se faire directement. On commence par calculer des valeurs V_1 correspondant au taux x_1, sans tenir compte des majorations dues à la semestrialité des coupons et à l'impôt du timbre. On majore ensuite la valeur I_1 obtenue dans ces conditions, et l'on trouve une valeur V'_1. Un second essai avec le taux x_2 donne une valeur analogue V'_2, qui permet, par une simple interpolation proportionnelle, de trouver le taux :

$$\frac{V - V'_1}{V'_2 - V'_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

La valeur de x trouvée par ce calcul est toujours trop élevée.

Exemple. — *Quel est le taux réel d'emprunt d'une Compagnie de chemin de fer qui émet des obligations 500 fr. 3 %₀ à coupons semestriels au cours de 422, sachant qu'elles sont remboursables en 55 ans ?*

On trouve dans les tables que :
au taux de 3,875 % l'obligation à coupons annuels vaut :

$$266{,}16 + 156{,}21 = 422{,}37\ ;$$

au taux de 4 $^0/_0$ l'obligation à coupons annuels vaut :

$$261,39 + 151,48 = 412,87.$$

Donc, en tenant compte des taxes, ces titres vaudront : à 3,875 $^0/_0$:

$$266,16 \times \left[\frac{1}{2}\,\frac{0,03875}{1,019.19 - 1} + \frac{0,01}{4 \times 0,03} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{0,038.75 \times 0,06}{1,009.55 - 1}\right] + 156,21 = 430,33\,;$$

à 4 $^0/_0$:

$$261,39 \times \left[\frac{1}{2}\,\frac{0,04}{1,019.80 - 1} + \frac{1}{2} \times \frac{0,0004}{1,009.85 - 1}\right]$$
$$+ 151,48 = 420,82.$$

D'où, par interpolation :

$$x = 0,03875 + \frac{430,33 - 422}{430,33 - 420,82} \times (0,04 - 0,038.75)$$
$$= 0,039.84.$$

On sait (155) que ce résultat est un peu trop élevé.

On avait trouvé que le taux d'intérêt effectif correspondant à une obligation à coupons annuels, était de 3,88 $^0/_0$. La charge supplémentaire, due à l'avance d'un coupon et au payement du timbre, augmente ce taux d'emprunt de

$$3,98\ {}^0/_0 - 3,88\ {}^0/_0 = 0,10\ {}^0/_0.$$

L'emprunteur doit tenir compte pour le calcul des charges réelles d'un emprunt *des frais de service des titres*. Ils sont évalués en général à 0 fr. 10 par titre en circulation et par an, et leur échéance est le plus souvent mensuelle.

Il s'ensuit qu'en désignant par I l'usufruit des titres supposés à coupons annuels, on a en appelant F la valeur actuelle des frais de service :

$$F = I \times \frac{0,10}{C \times i} \times \frac{1}{12}\,\frac{x}{x_m}$$

x_m désignant le taux mensuel équivalent au taux annuel x.

Si l'on veut déduire F de la valeur des payements du timbre par abonnement, on écrira, en désignant par T cette dernière valeur, laquelle a été calculée plus haut :

$$F = \frac{T}{0{,}000.06} \times \frac{0{,}10}{C} \times \frac{1}{3} \times \frac{y}{x_m}.$$

181. **Influence de l'impôt sur le revenu.** — Cet impôt frappe le revenu direct, c'est-à-dire l'intérêt proprement dit rapporté par les titres, et le revenu indirect formé par la prime au remboursement dans le cas de titres émis au-dessous du pair. Il est actuellement de 4 % du revenu.

A. *Impôt sur le revenu proprement dit.*

Cet impôt est le plus souvent à la charge du porteur de titres. Il a été établi en France par la loi du 29 juin 1872 et fixé à 3 %. La loi du 26 décembre 1890 l'a élevé à 4 %. Chaque coupon Ci est réduit de 0,04 et devient 0,96 Ci. Il en résulte que la valeur de I est réduite à 0,96 I, et la vraie valeur du titre, s'il doit rapporter le taux x, ne sera que :

$$V' = I \times 0{,}96 + A.$$

B. *Impôt sur la prime au remboursement et sur les lots.*

Cet impôt a été établi par les lois du 21 juin 1875 et 26 décembre 1890, et modifié en ce qui concerne les lots par la loi du 20 février 1901. Il est actuellement de 4 % sur les primes au remboursement, et de 8 % sur les lots.

Lorsque le prix d'émission E d'un titre est inférieur au capital nominal, l'obligataire reçoit une prime (C — E) lors du remboursement.

En réalité, cette somme représente, ainsi qu'on l'a déjà vu, de l'intérêt capitalisé. Les souscripteurs consentent en effet à recevoir un intérêt assez faible, dans l'espoir d'une plus value résultant d'un prochain remboursement.

Pour tenir compte de l'impôt qui est égal à $0,04\,(C-E)$, il suffit de calculer sa valeur actuelle probable ; or, la valeur actuelle probable du remboursement C est A ; celle de l'impôt payable au moment du remboursement sera par simple proportion : $0,04\,(C-E)\,\frac{A}{C}$, et la valeur réelle de l'obligation devra être diminuée d'autant pour tenir compte de l'impôt.

En définitive, l'impôt sur le revenu diminue la valeur V de $0,04\,I$ et de $0,04\,(C-E)\,\frac{A}{C}$, et le prix que l'on doit payer un titre, en tenant compte de cet impôt, est :

$$
\begin{aligned}
V' &= I + A - 0,04\,I - 0,04\,(C-E)\,\frac{A}{C} \\
&= 0,96\,V + 0,04\,\frac{AE}{C}.
\end{aligned}
$$

Exemple. — *Quel est le prix d'une obligation de* 500 fr. 3 %, *remboursable par tirage au sort en* 52 *ans, à coupons semestriels, si le taux effectif du marché est* 3 1/2 % ? *Le prix d'émission moyen a été* 420 fr.

On a comme première approximation :

$$
V = \frac{500 \times 0,03 \times \overline{1,03}^{52}}{\overline{1,03}^{52} - 1} \times \frac{\overline{1,035}^{52} - 1}{0,035 \times \overline{1,035}^{52}} = 454,70.
$$

On en tire : $I = 271,80$ et $A = 182,90$.

Il faut d'abord corriger I pour tenir compte de la semestrialité des coupons ; la valeur du taux semestriel équivalent à 3 1/2 % est :

$$
y = \sqrt{1,035} - 1 = 0,017.349.50.
$$

On aura :

$$I' = 271{,}80 \times 1{,}008.67 = 274{,}16\,;$$

et enfin :

$$V' = 0{,}96\,(274{,}16 + 182{,}90) + 0{,}04\,\frac{182{,}90 \times 420}{500}$$

$$= 444{,}93.$$

On peut constater la variation du taux d'intérêt effectif due à l'impôt.

Dans les tables des valeurs des obligations à coupons semestriels du type 500 fr., 3 % remboursables en 52 ans, on trouve que :

à 3,75 %	la valeur est. . .	436,87
à 3,625 %	» . . .	446,78.

Le taux correspondant à 444 fr. 93 sera donc :

$$x = 0{,}036.25 + \frac{446{,}78 - 444{,}93}{446{,}78 - 436{,}87} \times 0{,}001.25 = 0{,}0365.$$

La diminution du taux est donc :

$$3{,}65 - 3{,}50 = 0{,}15\ \%.$$

La valeur de l'obligation à coupons semestriels serait sans impôt :

$$274{,}16 + 182{,}90 = 457{,}06.$$

présentant avec la valeur ci-dessus une différence de :

$$457{,}06 - 444{,}93 = 12{,}13$$

qui correspond à la diminution de 0,15 %.

182. **Influence de l'impôt de circulation.** — L'impôt ou taxe de circulation a été établi par la loi du 23 juin 1857, qui frappait toute cession de titres d'un droit de mutation de 0 fr. 50 par 100 fr. de la valeur négociée pour le titre nominatif, et de 0 fr. 12 % du cours

moyen de l'année précédente pour le titre au porteur. Cette dernière taxe fut portée à 0 fr. 20 % par la loi du 29 juin 1872.

Ces différentes taxes ont été modifiées le 1er janvier 1909. Le droit de mutation des titres au porteur en titres nominatifs ou de nominatif en nominatif a été porté à 0 fr. 75 % de la valeur négociée et le droit de mutation du porteur au nominatif a été supprimé. Le droit de circulation des titres au porteur a été élevé à 0 fr. 25 %.

On voit que ces droits supposent que les titres nominatifs se transmettent tous les 3 ans environ.

La taxe de circulation se calcule sur le cours moyen de l'année précédente arrondi à 20 fr., en forçant. Elle est donc fonction du cours et il en résulte que sa valeur ne peut être calculée exactement.

Méthode de calcul de M. Achard. — M. Achard a donné une méthode de calcul très intéressante en admettant la fixité du taux réel.

Les valeurs successives V_p et V_{p-1} des titres d'un même emprunt, sont liées par la relation suivante, dans laquelle N_p et N_{p-1} représentent le nombre de titres en circulation p et $p - 1$ années avant la fin de l'amortissement, et α la valeur de la taxe de circulation frappant les coupons.

Le prix $N_p V_p$ des titres en circulation dans la p^{me} année comprend :

1° l'intérêt à payer dans cet exercice, déduction faite de l'impôt, soit :

$$\frac{Ci - \alpha V_p}{1 + x} N_p,$$

en supposant que l'assiette de la taxe soit la valeur inconnue du titre :

2° l'amortissement de l'exercice :

$$C \times \frac{N_p - N_{p-1}}{1 + x};$$

3° la valeur des N_{p-1} titres restant en circulation à la fin de l'année considérée, soit :

$$\frac{N_{p-1} \cdot V_{p-1}}{1 + x}.$$

On a donc :

$$(1 + x)N_p V_p = (Ci - \alpha V_p)N_p + C(N_p - N_{p-1}) + \\ + N_{p-1} V_{p-1}.$$

En posant : $\frac{(1 + i)^p - 1}{i(1 + i)^p} = f_p$, on sait que N_p et N_{p-1} sont proportionnels à f_p et f_{p-1}, et l'on trouve en remplaçant dans la 1^re^ égalité N_p et N_{p-1} par ces valeurs proportionnelles :

$$(1 + x) \times f_p \times V_p = (Ci - \alpha V_p)f_p + C(f_p - f_{p-1}) + \\ + f_{p-1} V_{p-1};$$

ou :

$$(1 + x + \alpha)f_p V_p = [(1 + i)f_p - f_{p-1}] C + f_{p-1} V_{p-1}.$$

Or, on remarque que :

$$(1 + i)f_p - f_{p-1} = (1 + i) \frac{(1 + i)^p - 1}{i(1 + i)^p} - \\ - \frac{(1 + i)^{p-1} - 1}{i(1 + i)^{p-1}} = 1.$$

Donc, on a, en définitive, la relation suivante entre V_p et V_{p-1} :

$$(1 + x + \alpha)f_p V_p = C + f_{p-1} V_{p-1},$$

et successivement :

$$(1 + x + \alpha)f_{p-1} V_{p-1} = C + f_{p-2} V_{p-2},$$
$$(1 + x + \alpha)f_{p-2} V_{p-2} = C + f_{p-3} V_{p-3},$$

. . . .

. . . .

$$(1 + x + \alpha)f_2 V_2 = C + f_1 V_1,$$
$$(1 + x + \alpha)f_1 V_1 = C + f_0 V_0.$$

Or : $$f_0 = 0.$$

En tenant compte de cette relation, on voit qu'il est possible de calculer V_p en fonction de C, x et α, en éliminant toutes les valeurs intermédiaires de V_1, V_2, V_3, ...

Il suffit, en effet, de multiplier les deux termes de chaque équation par :

$$1, \quad (1 + x + \alpha), \quad (1 + x + \alpha)^2, \ \ldots \ (1 + x + \alpha)^{p-1},$$

et de les additionner.

Tous les termes en V_1, V_2, ... disparaissent et il reste :

$$(1 + x + \alpha)^p f_p V_p = C[(1 + x + \alpha)^{p-1} + \ldots + \\ + (1 + x + \alpha) + 1];$$

d'où : $$f_p V_p = C \frac{(1 + x + \alpha)^p - 1}{(x + \alpha)(1 + x + \alpha)^p},$$

$$V_p = \frac{Ci(1 + i)^p}{(1 + i)^p - 1} \times \frac{(1 + x + \alpha)^p - 1}{(x + \alpha)(1 + x + \alpha)^p}.$$

On voit donc que pour tenir compte de la taxe de circulation il suffit de calculer la valeur actuelle des annuités normales au taux $x + \alpha$, c'est-à-dire d'évaluer l'obligation d'après le taux réel augmenté de la taxe rapportée à 1 fr. Cette propriété constitue le théorème très remarquable de M. Achard.

Exemple. — *Quel est le cours d'un titre 500 fr. 3 $^0/_0$, remboursable en 52 ans, en tenant compte de tous les impôts à la charge du porteur si l'on désire obtenir un taux réel d'intérêt de 3,75 $^0/_0$?*

En évaluant le titre au taux de 3 fr. 75 $^0/_0$, on aura :

$$V = \frac{500 \times 0,03 \times \overline{1,03}^{52}}{\overline{1,03}^{52} - 1} \times \frac{\overline{1,0375}^{52} - 1}{0,0375 \times \overline{1,0375}^{52}} = 434,43.$$

Mais on n'a pas tenu compte ainsi :

1° de la plus value due à la semestrialité des coupons ;

2° de l'impôt sur le revenu.

S'il n'y avait pas de taxe de transmission la valeur du titre à coupon annuel serait 454,70 comprenant :

$$I = 271,80 \qquad A = 182,90,$$

Cette valeur de 182,90 est contenue dans les 434 fr. 43 et l'usufruit réel, en tenant compte de la taxe de circulation, est de :

$$434,43 - 182,90 = 251,53$$

Il faut remarquer que les impôts sur le revenu et de transmission sont indépendants et frappent le coupon primitif.

L'usufruit primitif 271,80 donne :

$$0,04 \times 271,80 = 10,87$$

pour la valeur de l'impôt de 4 %.

L'usufruit réel, supposé annuel est donc seulement :

$$251,53 - 10,87 = 240,66.$$

et l'usufruit semestriel :

$$240,66\left(1 + \frac{y}{2}\right) = 240,66 \times 1,008.675 = 242,75.$$

en désignant par y le taux semestriel $\left(\sqrt{1,035} - 1\right)$.

Quant à la nue propriété, si le cours d'émission a été 420, comme on l'a supposé dans les exemples précédents, elle devient :

$$A - 0,04(C - E)\frac{A}{C} = A \times 0,96 + 0,04\frac{EA}{C} = 181,73.$$

La valeur de l'obligation est donc enfin :

$$242,75 + 181,73 = 424,48.$$

183. **Formule générale tenant compte de toutes les taxes.** — On peut établir ainsi que l'a fait M. Kakosky, une formule générale qui tient compte de tous les impôts en se servant de la méthode de M. Achard ; pour plus de géné–

ralité, nous supposerons même les coupons semestriels et l'amortissement annuel, ce qui est le cas général des obligations de chemins de fer.

Soient α le taux de l'impôt de circulation et θ le taux de l'impôt sur le revenu, E le prix d'émission, y le taux semestriel équivalent au taux effectif x; on pourra écrire comme précédemment :

$$(1 + x)N_pV_p = (Ci - \alpha V_p - \theta Ci)\left(1 + \frac{y}{2}\right)N_p + \\ + [C - \theta(C - E)](N_p - N_{p-1}) + N_{p-1}V_{p-1}.$$

En remplaçant N_p et N_{p-1} par les quantités f_p et f_{p-1} qui leur sont proportionnelles et $\frac{y}{2}$ par z, on a :

$$(1 + x + \alpha + \alpha z)f_pV_p = C(1 - \theta)(1 + z)if_p + \\ + [C(1 - \theta) + \theta E](f_p - f_{p-1}) + f_{p-1}V_{p-1}.$$

Or :
$$if_p = 1 - \frac{1}{(1 + i)^p}$$

et :
$$f_p - f_{p-1} = \frac{1}{(1 + i)^p}.$$

Donc on aura en définitive :

$$(1 + x + \alpha + \alpha z)f_pV_p = C(1 - \theta)(1 + z) + \\ + \frac{\theta E - C(1 - \theta)z}{(1 + i)^p} + f_{p-1}V_{p-1}.$$

Cette formule de récurrence donnera en remplaçant p par $(p - 1)$, ..., 2, 1.

$$(1 + x + \alpha + \alpha z)f_{p-1}V_{p-1} = C(1 - \theta)(1 + z) + \\ + \frac{\theta E - C(1 - \theta)z}{(1 + i)^{p-1}} + f_{p-2}V_{p-2}$$

. . . .

. . . .

$$(1 + x + \alpha + \alpha z)f_1V_1 = C(1 - \theta)(1 + z) + \\ + \frac{\theta E - C(1 - \theta)z}{(1 + i)} + f_0V_0 \quad \text{(terme nul).}$$

L'élimination des termes en V_1, V_2, ... se fera en multipliant les deux termes de l'avant-dernière équation par :

$$(1 + x + \alpha + \alpha z),$$

ceux de l'antépénultième par $(1 + x + \alpha + \alpha z)^2$, etc. ... et ceux de la 1^re^ par $(1 + x + \alpha + \alpha z)^{p-1}$. En additionnant les nouvelles équations membre à membre et en remarquant que les termes en V_{p-1}, V_{p-2}, etc... se détruisent, il reste

$$(1+x+\alpha+\alpha z)^p f_p V_p = C(1-\theta)(1+z)\frac{(1+x+\alpha+\alpha z)^p - 1}{x+\alpha+\alpha z} +$$
$$+ [\theta E - C(1-\theta)z]\frac{(1+x+\alpha+\alpha z)^p - (1+i)^p}{(1+i)^p(x+\alpha+\alpha z - i)}$$

d'où enfin :

$$V_p = C(1-\theta)(1+z)\frac{i(1+i)^p}{(1+i)^p - 1}\cdot\frac{(1+x+\alpha+\alpha z)^p - 1}{(x+\alpha+\alpha z)(1+x+\alpha+\alpha z)^p} +$$
$$+ [\theta E - C(1-\theta)z]\frac{i}{(1+i)^p - 1} \times \frac{(1+x+\alpha+\alpha z)^p - (1+i)^p}{(x+\alpha+\alpha z - i)(1+x+\alpha+\alpha z)^p}.$$

La 1^re^ partie de la formule représente la valeur d'une obligation à coupons annuels de capital $C(1 - \theta)(1 + z)$, de taux nominal i et évaluée au taux réel $(x + \alpha + \alpha z)$.

Cette valeur se lit dans les tables.

Quant à la seconde quantité, qui sert de terme correctif, il suffit de se reporter à la formule de la page 256 (n° 159) pour constater qu'elle représente la nue-propriété d'une obligation évaluée au taux $(x + \alpha + \alpha z)$ et dont le capital nominal est $\theta E - C(1 - \theta)z$; cette valeur se lit également dans les tables.

Ainsi, en désignant par O la valeur de l'obligation à intérêts et amortissements annuels de capital C amortissable dans les conditions données, évaluée au taux $(x + \alpha + \alpha z)$ et par A sa nue-propriété (évaluée au même taux), la valeur de l'obligation envisagée est :

$$(1) \quad V = O(1 - \theta)(1 + z) + A\left[\theta\frac{E}{C} - (1 - \theta)z\right].$$

Si l'on désigne par I l'usufruit correspondant, la formule précédente peut encore s'écrire :

$$V = I(1 - \theta)(1 + z) + A\left[\theta\frac{E}{C} + (1 - \theta)\right].$$

On peut remarquer que le terme correctif :

$$A\left[\theta\frac{E}{C} - (1 - \theta)z\right]$$

qui figure dans la formule (1) est positif dans les conditions normales.

Quand l'obligation est à intérêts et amortissements semestriels la formule se simplifie et devient :

$$V = O(1 - \theta) + A\theta\frac{E}{C} \tag{2}$$

Pratiquement on peut négliger le terme αz qui est très petit, en effet $\alpha = 0{,}002.5$ et z est voisin de $0{,}01$; donc :

αz est voisin de 0,000.025.

En négligeant ce terme, on commet une erreur de 15 à 20 centimes en trop dans la valeur de l'obligation.

Exemple. — *Quel est le cours d'une obligation* 500 *fr.* 3 % *émise à* 420 *fr. à coupons semestriels, en tenant compte des taxes, si le taux réel est* 3,5 % *et si la durée d'amortissement est* 52 *ans ?*

L'obligation auxiliaire O évaluée au taux de 3,752.17 % vaut :

$$O = 434{,}26$$

et :

$$A = 172{,}07$$

d'où :

$$V = 434{,}26 \times 0{,}96 \times 1{,}008.675 +$$
$$+ 172{,}07\left[0{,}04\,\frac{420}{500} - 0{,}96 \times 0{,}008.675\right] = 424{,}86.$$

Avec le taux de 3 75, en négligeant z, on aurait trouvé 425,02 soit 0,16 de trop.

184. **Recherche du taux réel de placement. Parités.** — Les exemples qui précèdent montrent les calculs à effectuer pour trouver la valeur des cours, mais le problème qui se pose le plus souvent dans la pratique est le problème inverse, consistant à rechercher le taux réel de placement des valeurs afin de les comparer et de voir si elles sont en *parité*.

On dit que deux titres sont en parité si les taux effectifs d'intérêt qu'ils rapportent sont égaux.

Les calculs relatifs à ce problème sont toujours assez laborieux : on commence par déterminer le taux réel d'emprunt du titre, qui paraît le moins difficile à rechercher, par la méthode des approximations successives.

On évalue le second titre à ce taux : si la valeur obtenue est inférieure au cours donné on a avantage à acheter le 1er titre ; si elle lui est égale, les deux titres sont en parité ; si elle lui est supérieure, l'achat du second titre est plus avantageux.

Exemple. — *Le 1er octobre 1913 les obligations P. L. M. 3 % fusion bleue et 2 1/2 % se négocient 403 et 372. Quel est celui de ces titres qui offre le meilleur placement?*

On trouve dans l'annuaire des agents de change les caractéristiques de ces deux emprunts :

P. L. M, 3 % fusion bleue : 500 fr.. coupons semestriels en avril-octobre, amortissement annuel en octobre, le dernier ayant lieu le 1er octobre 1958, soit 45 tirages, les tirages ayant lieu au mois de juin de chaque année (le 15 juin en 1913). Cours d'émission 350.

P. L. M. 2 1/2 % 500 fr. coupons et amortissements semestriels en mai-novembre, le dernier amortissement ayant lieu le 1er novembre 1958, soit 90 tirages ceux-ci ayant lieu au mois de janvier et au mois de juin de chaque année (les 15 janvier et 15 juin en 1913) Cours moyen d'émission 410.

Il n'y a pas lieu d'arrondir à 20 fr. ces prix d'émission car l'Administration arrondit à 20 fr. le montant total de l'émission seule et non la valeur unitaire d'un titre.

Les calculs relatifs au 2 1/2 % étant les plus simples, on va déterminer le taux de placement réel correspondant à 372 fr.

Les titres devant être remboursés au 1er novembre 1913 sont sortis au tirage du 15 juin. Pour avoir la valeur exacte d'une obligation 2 1/2 % au 1er octobre il faut calculer d'abord sa valeur au 1er novembre 1913 et la ramener ensuite au 1er octobre.

Il suffit de regarder une table de valeurs d'obligations 2 1/2 %. pour constater que, sans impôts, 372 fr. correspondent à 4,37 % environ ; or on sait que les impôts actuels diminuent le taux de rendement d'environ 0,42 %. On est donc conduit à essayer le taux 4,37 — 0,42 = 3,95 ou plutôt le taux semestriel équivalent 1,95 %.

On doit tenir compte que, les coupons étant semestriels, la valeur de α doit correspondre à un semestre, soit :

$$\alpha = 0{,}001.25$$

Donc :

$$x + \alpha = 0{,}019.5 + 0{,}001.25 = 0{,}020.75.$$

On aura ainsi (Voir la formule (2) page 306) :

$$O = 500 \times \frac{0{,}012.5 \times \overline{1{,}012.5}^{90}}{\overline{1{,}012.5}^{90} - 1} \times$$

$$\times \frac{\overline{1{,}020.75}^{90} - 1}{0{,}020.75 \times \overline{1{,}020.75}^{90}}$$

$$= 9{,}285.73 \times 40{,}602.85 = 377{,}03$$

$$A = \frac{377.03 \times 0{,}020.75 - 6{,}25}{0{,}020.75 - 0{,}0125} = 190{,}71.$$

$$V = 377{,}03 \times 0{,}96 + 190{,}71 \times 0{,}04 \times \frac{410}{500}$$

$$= 361{,}95 + 6{,}25 = 368{,}20 \text{ au 1}^{\text{er}} \text{ novembre 1913.}$$

Au 31 octobre cette valeur est de :

$$368,20 + 6,25 = 374,45$$

et au 1^{er} octobre :

$$\frac{374,45}{\sqrt[6]{1,020.75}} = \frac{374,45}{1,003\,429} = 373,17$$

valeur un peu supérieure au cours 372 ; le taux de 1,95 est donc un peu trop faible.

On calcule la valeur pour 1,96 %.

On aura comme précédemment en remarquant que :

$$x + \alpha = 0,019.6 + 0,001.25 = 0,020.85$$

$$O = 500 \times \frac{0,012.5 \times \overline{1,012.5}^{90}}{\overline{1,012.5}^{90} - 1} \times \frac{\overline{1.020.85}^{90} - 1}{0,020.85 \times \overline{1,020.85}^{90}}$$

$$= 9,285.73 \times 40,474.42 = 375,83.$$

$$A = \frac{375,83 \times 0,020.85 - 6,25}{0,020.85 - 0,012.5} = 189,95$$

$$V = 375,83 \times 0,96 + 189,95 \times 0,04 \times \frac{410}{500}$$

$$= 360,80 + 6,23 = 367,03 \text{ au } 1^{\text{er}} \text{ novembre } 1913.$$

Au 31 octobre cette valeur est de :

$$367,03 + 6,25 = 373,28$$

et au 1^{er} octobre :

$$\frac{373,28}{\sqrt[6]{1,020.85}} = \frac{373,28}{1,003.445} = 371.99.$$

Le taux est donc compris entre 1,95 et 1,96, mais très voisin de 1,96. Il convient également de remarquer que les calculs précédents ont été conduits en arrondissant tous les résultats intermédiaires au centime ; il n'y a donc pas lieu de s'arrêter à la différence de 0,01 trouvée dans l'essai du taux 1,96. Sans faire l'interpolation qui, dans les conditions du problème actuel, et par suite de la remarque précédente, n'aurait pas grand sens, nous essaierons, à titre de contrôle, et pour obtenir une décimale de plus, le taux 1,959.

$$x + \alpha = 0{,}019.59 + 0{,}001.25 = 0{,}020.84$$

$$O = 500 \times \frac{0{,}012.5 \times \overline{1{,}012.5}^{90}}{\overline{1{,}012.5}^{90} - 1} \times$$

$$\times \frac{\overline{1{,}020.84}^{90} - 1}{0{,}020.84 \times \overline{1{,}020.84}^{90}} = 375{,}95$$

$$A = \frac{375{,}95 \times 0{,}020.84 - 6{,}25}{0{,}020.84 - 0{,}012.5} = 190{,}02$$

$$V = 375{,}95 \times 0{,}96 + 190{,}02 \times 0{,}04 \times \frac{410}{500}$$

$$= 360{,}91 + 6{,}23 = 367{,}14 \text{ au 1}^{\text{er}} \text{ novembre 1913.}$$

Au 31 octobre cette valeur est de :

$$367{,}14 + 6{,}25 = 373{,}39$$

et au 1er octobre :

$$\frac{373{,}39}{\sqrt[6]{1{,}020.84}} = \frac{373{,}39}{1{,}003.443.5} = 372{,}10$$

On conclut que le taux 0,019.60 est exact à $\frac{1}{100.000}$ près. L'approximation est très suffisante.

Il faut évaluer maintenant le titre 500 fr. 3 % au taux annuel équivalent au taux semestriel 0,019.60 savoir :

$$\overline{1{,}019.6}^2 - 1 = 0{,}039.584.$$

En appliquant la formule (1) page 305 et en remarquant que le taux $x + \alpha + \alpha z$ qui figure dans cette formule est ici égal à :

$$0{,}039.584 + 0{,}002.5 + 0{,}002.5 \times \frac{0{,}019.60}{2}$$

soit : $0,042.108,$

on a:

$$O = 500 \times \frac{0,03 \times \overline{1,03}^{45}}{\overline{1,03}^{45} - 1} \times \frac{\overline{1,042.108}^{45} - 1}{0,042.108 \times \overline{1,042.108}^{45}}$$

$$= 20,392.59 \times 20,036.84 = 408,60$$

$$A = \frac{408,60 \times 0,042.108 - 15}{0,042.108 - 0,03} = 182,14$$

$$V = 408,60 \times 0,96 \times 1,009.8 +$$

$$+ 182,14 \left[0,04 \times \frac{350}{500} - 0,96 \times 0,009.8\right]$$

$$= 396,10 + 3,39 = 399,49.$$

Le cours effectif étant de 403, on a avantage à acheter des obligations 2 1/2 %.

TROISIÈME PARTIE

COMPTABILITÉ DES OPÉRATIONS FINANCIÈRES A LONG TERME.

CHAPITRE PREMIER

COMPTABILITÉ DES PRÊTS HYPOTHÉCAIRES

185. **Prêt.** — Lors de la réalisation du prêt, l'emprunteur doit se reconnaître débiteur envers son créancier, et la comptabilité doit débiter la Caisse par le crédit du créancier ou mieux d'un compte « *Prêts hypothécaires* », qui figurera au passif de l'emprunteur.

186. **Remboursements.** — Chacun des payements faits par l'emprunteur comprend de l'intérêt et de l'amortissement.

Les intérêts doivent être imputés au débit du compte de « *Profits et pertes* » et constituent une charge réelle pour le débiteur, qui passera l'écriture de contre-partie au crédit du créancier dont le compte sera ensuite soldé par l'écriture de caisse constatant le payement effectif.

Quant aux amortissements successifs, on les passe en même temps que les intérêts au crédit du créancier par le débit du compte « *Prêts hypothécaires* » qui s'amortit ainsi au fur et à mesure des paiements.

CHAPITRE II

COMPTABILITÉ DES EMPRUNTS PAR OBLIGATIONS

187. **Émission.** — Les écritures d'émission sont différentes, suivant que l'emprunt est émis par l'intermédiaire de Sociétés de crédit ou directement,

La valeur de l'emprunt peut figurer au passif de l'emprunteur, soit pour sa valeur nominale, soit pour la somme réellement encaissée.

Dans ce dernier cas, il n'y a pas trace des commissions payées aux intermédiaires qui peuvent apparaître dans le premier cas, à moins qu'un artifice d'écriture ne les fasse confondre dans les « *Frais de premier établissement à amortir* », compte trop souvent employé.

188, **Émission par des intermédiaires.** — Les Sociétés de crédit qui émettent l'emprunt ouvrent des comptes courants à l'emprunteur, et réciproquement celui-ci débite ces Sociétés du montant des sommes reçues, par le crédit d'un compte constatant sa créance envers les obligataires, par exemple « *Emprunts, Émission de tel titre...* »

Si l'emprunteur désire constater la créance *nominale*, il crédite le compte « *Emprunts* » par le débit d'un compte à amortir, tel que « *Primes au remboursement sur obligations de tel emprunt, à amortir* » de la différence entre le montant du capital nominal des titres émis et le total des sommes reçues.

Quand, au contraire, il y a prime sur le capital nominal, — ce qui arrive rarement pour les obligations, mais peut arriver pour les actions, — on constate le capital nominal au crédit du compte « *Emprunts* » et le montant de la prime au crédit d'un compte de « *Bénéfices sur réalisations de titres* »...

Dans la généralité des cas, on ne fait pas apparaître les commissions, l'emprunteur n'encaissant que le net après déduction de tous les frais.

Si, cependant, les commissions n'étaient payées qu'après l'encaissement, on débiterait le compte « *Emprunts* », par le crédit des banquiers, du montant de ces ristournes.

189. **Émission directe.** — Si la Société émet directement elle crédite le compte « *Emprunts — Émission de tels titres* », au fur et à mesure des négociations et de l'émission, qui peut durer fort longtemps et même se faire constamment (Compagnies de chemin de fer français).

Il se présente une difficulté provenant de ce fait qu'en France on cote les valeurs en comprenant dans le cours les intérêts courus depuis la dernière échéance jusqu'au jour de vente.

Il en résulte que, théoriquement, le cours d'émission devrait croître chaque jour de l'intérêt acquis ; mais, pour la commodité des agences, le cours reste fixe pendant des périodes plus ou moins longues.

En tout cas, le prix encaissé comprend théoriquement une partie du prochain coupon à payer par la Société : il est donc naturel de déduire cet intérêt acquis (couru) du montant de la négociation, afin de le restituer à l'obligataire à l'échéance suivante dans le payement du coupon.

L'écriture à passer consistera à débiter le compte « *Emprunts...* » par le crédit du compte « *Charges des emprunts...* », qui sera débité de la totalité des coupons payés.

La confection des titres et leur émission entraînent des frais (matières et personnel), qui sont en général entreposés pendant chaque exercice dans des comptes spéciaux lesquels, en fin d'année, sont crédités par le débit du compte « *Emprunts...* » de la valeur estimée des frais afférents aux titres négociés.

Les dépenses de matières comprennent : les frais de modèles de titres, de clichage, d'impression, de collage, de roues de tirages, de bulletins, etc., etc...

Les dépenses de personnel comprennent : les traitements, gratifications, frais de bureau, de loyer... du personnel attaché directement à l'émission des titres, ainsi qu'une part approximative des dépenses afférentes au personnel supérieur.

Exemple. — *Passer les écritures afférentes à l'émission de* 2.598 *titres émis pour* 1.211.605 *fr. Les frais d'émission s'élèvent à* 4.383 *fr*, 92, *les intérêts courus à* 5.491,97 *et les frais de confection à* 852,43.

Au fur et à mesure des négociations, on passera au Journal l'écriture :

Caisse à *Emprunts*, *émission de...*

Négociation de... titres à... pour le compte de

Le total des sommes inscrites s'élèvera à 1.211.605 fr.

Pour constater les intérêts courus et frais divers, on passera en fin d'exercice, ou mensuellement si cela paraît utile :

Emprunts, émission de... aux *suivants :*	
Frais divers afférents à l'émission des 2.598 titres émis en... et intérêts courus au jour de la vente des titres	10.728.32
à *Dépenses de personnel.*	
Traitements, gratifications, etc.	4.383,92
à *Charges des emprunts,* § *Intérêts.*	
Intérêts courus au jour de la vente des titres	5.491,97
à *Confection des titres.*	
Frais d'impression, etc. des 2.598 titres émis	852,43
	10.728,32

En définitive le compte « *Emprunts...* » crédité de 1.211.605 fr. et débité de 10.728 fr. 32 présentera un solde créditeur de :

$$1.211.605 - 10.728,32 = 1.200.876,68.$$

Si la Société désire constater au passif de son bilan la dette future à payer elle devra passer l'écriture suivante :

Prime de remboursement
sur obligations à amortir à *Emprunts.*

Différence entre la valeur nominale des titres émis à 500 fr. chacun et le montant net de leur négociation :

$$1.294.000 - 1.200.876,68 = 93.123,32.$$

190. **Payement des coupons**. — Les Sociétés font le plus souvent elles-mêmes leur service de titres, coupons et amortissements ; mais si elles n'ont pas de succursales ou d'agences organisées, elles passent des traités avec des Établissements de crédit qui, moyennant une commission,

effectuent les opérations de trésorerie et de contentieux relatives aux titres en circulation.

En règle générale, les Sociétés tiennent leur comptabilité d'après leurs recettes et dépenses *échues*, sans distinguer celles qui sont effectivement *réglées* en trésorerie : elles établissent ainsi leur compte de « *Profits et pertes* » en lui imputant le montant des charges en intérêts et amortissements qui sont échues à la date de l'arrêt des comptes ; si, par exemple, des titres ont leurs coupons et amortissements payables à partir du 1^{er} Janvier c'est-à-dire au lendemain de la clôture d'un exercice, ce qui est le cas le plus fréquent, la totalité de l'échéance sera par provision imputée comme charge de l'exercice écoulé.

La complexité des comptes et des relations ne permet pas, sauf rare exception, l'imputation directe des charges au débit du compte de « *Profits et pertes* », et la plupart des Sociétés imputent provisoirement les sommes à payer à un compte tel que : « *Charges des emprunts de telle série... à appliquer* » divisé par natures d'emprunts et qui comprend plusieurs paragraphes permettant de distinguer :

Intérêts, *Amortissement*, *Timbre et frais de service*.

Ce compte permet d'opérer ensuite une ventilation définitive des charges entre les divers comptes qui doivent recevoir une part de dépense, car ce n'est pas nécessairement le seul compte « *Profits et pertes* » qui doit supporter l'ensemble des charges des emprunts.

En fin d'exercice, le compte « *Charges des emprunts...* » est aussi crédité du montant des intérêts courus lors de la vente des titres.

Pour suivre les opérations relatives au *payement* des coupons, on ouvre un compte tel que « *Intérêts sur obligations de telle série... à payer.* »

Au moment de l'échéance, ce compte est crédité de la valeur des coupons à payer par le débit du compte « *Charges des emprunts* ».

Au fur et à mesure des payements ce compte est débité par caisse du montant *net* des coupons payés, déduction faite des impôts de circulation et sur le revenu.

Il est ensuite débité du montant de ces impôts par le crédit des comptes d'impôts à payer à l'État.

Enfin, tous les cinq ans, le compte ouvert à chaque échéance est soldé, et le montant des coupons prescrits est porté au crédit du compte des exercices clos.

EXEMPLE. — *Passer les écritures afférentes au coupon de* 2.598 *titres* 500 *fr.* 3 $^0/_0$, *dont* 1.359 *sont nominatifs (cours moyen, année précédente, des titres de même nature* 452 *fr.).*

Charges de l'emprunt... à *Intérêts sur obligations...*
§ Intérêts *à payer.*

2.598 coupons à 7,50 . . . . 19.485

Emprunts... à *Charges de l'emprunt,*
§ Intérêts.

Intérêts courus au jour de la vente des titres . 10.728,32

Intérêts sur obligations... à *Caisse.*
à payer

1.359 coupons nominatifs à :
(7,50 — 0,30) = 7,20 . . . . . . 9.784,80
1.239 coupons au porteur à
(7,20 — 0,565) = 6,635 . . . . 8.220,76

18.005,56

Intérêts sur obligations... à payer aux *suivants* :

à *Impôt sur le revenu* (coupons).

4 % de 2.598 × 7,5 soit 0,04 × 19.485 =	779,40
à *Impôt de circulation.*	
1.239 coupons au porteur à 0,565.	700.04
	1.479,44

191. **Amortissement.** — On procède, en général, comme pour les intérêts, en créditant un compte servant à constater les opérations de trésorerie : « *Amortissement de telle série... Échéance du...* » par le débit du paragraphe « *Amortissement,* » du compte d'application provisoire « *Charges de l'emprunt....* »

Le 1er compte est débité au fur et à mesure des payements par la caisse de la somme à rembourser, déduction faite de l'impôt sur la prime de remboursement, s'il y a lieu.

Dans ce cas, on débite encore le compte « *Amortissement de telle série...* » par le crédit du compte « *Impôts sur le revenu* (*primes au remboursement*) », lequel est soldé lors du payement à l'État.

Après trente ans écoulés, la prescription étant acquise pour les rembousements non opérés, on solde le compte « *Amortissement de telle série...* » par le crédit du compte d'exercices clos.

Les écritures qui précèdent sont très suffisantes pour obtenir à chaque instant la situation de la Société relativement à ses obligataires : le tableau d'amortissement complète d'ailleurs les renseignements désirés.

Or, on n'a pas fait jouer le compte « *Primes au rembour-*

sement... » dont il a été parlé précédemment : c'est une preuve du peu d'intérêt qu'il présente dans la pratique.

Si ce compte a été ouvert, on passe une écriture *d'ordre* ne correspondant à aucun fait matériel :

Emprunts... à *Primes au remboursement...*

Certaines Sociétés, opérant comme on l'a fait pour les Prêts hypothécaires, diminuent leur passif obligations du montant des remboursements effectués en débitant le compte « *Emprunts...* » par le crédit de l'un des comptes d'actif représentant les dépenses faites avec le produit des émissions.

L'utilité de ces écritures est très contestable ; elles présentent même l'inconvénient de ne pas laisser apparaître au bilan le montant des émissions faites par la Société, qui indique aussi le taux de ses emprunts, donne des renseignements historiques sur son crédit antérieur, etc.

Si l'on veut constater au bilan le nombre de titres amortis, une simple note donnera la décomposition du nombre de titres émis en : amortis et en circulation ; un tableau pourra même compléter ce renseignement, qui se trouve sur l'annuaire des agents de change.

Exemple. — *Passer les écritures de l'amortissement de 43 obligations 500 fr. 3 °/₀ émises à 445 fr.*

Charges de l'emprunt... *§ Amortissement*	à	*Amortissement de telle série,* *Echéance du... à payer.*

43 obligations amorties à 500 fr. 21.500

Amortissement de telle série, *Echéance du... à payer*	à *Caisse.*	

Paiement de 43 titres à 497,80, déduction faite de l'impôt sur la prime au remboursement. 21.405,40

Amortissement de telle série, à *Impôts sur le revenu,*
Échéance du... à payer *Primes au remboursement.*

Impôt sur la prime au remboursement de 43 titres émis à 445 fr., et sortis à 500 fr. soit :

$$(43 \times 500 - 43 \times 445) \times 0{,}04 = 94{,}60.$$

192. **Amortissement du matériel.** — Dans certaines industries, le matériel construit avec les fonds provenant d'émission se trouve détruit par l'usure avant que cette émission soit complètement amortie : c'est le cas du matériel roulant des Compagnies de chemin de fer, de l'outillage des industries de transformation, des bâtiments des Compagnies de navigation, etc.

Toutes ces industries ne conservent pas à leur actif la valeur de ce matériel devenu impropre à tout service, et elles le démolissent en portant sa valeur (sauf le bénéfice de vente de vieille matière) en dépenses d'exploitation de l'exercice de démolition.

Or, puisque les emprunts s'amortissent automatiquement par le jeu des tirages, le matériel construit avec leur produit s'amortit aussi, et il semble y avoir deux amortissements de ce matériel : l'un dû à l'amortissement des obligations ; le second, d'ailleurs bénévole, provenant de la mise en dépense du matériel hors service.

En réalité, on ne doit pas appliquer l'amortissement des titres au matériel démoli, mais bien au matériel qui existera lors de l'extinction complète des titres et qui se trouvera lui-même entièrement amorti à cette époque : on peut dire aussi que les amortissements prélevés sur les résultats annuels de l'exploitation, et rendus nécessaires par l'usure, laissent disponibles des ressources provenant de l'émission des titres et permettent ainsi de construire du matériel nouveau destiné à remplacer le matériel démoli.

LIVRE III

OPÉRATIONS FINANCIÈRES DE BOURSE ET DE HAUTE BANQUE

PREMIÈRE PARTIE

OPÉRATIONS FINANCIÈRES DE BOURSE

CHAPITRE PREMIER

GÉNÉRALITÉS

192. **Généralités.** — Dans le livre II, on a étudié le prix théorique des valeurs mobilières d'après le taux réel d'emprunt ; il reste à indiquer la nature des transactions effectives qui s'effectuent dans les Bourses de valeurs.

Les mathématiques n'interviennent, à tort peut-être, que fort peu dans ces opérations mais l'habitude des affaires crée un sens spécial qui fait concevoir sans calculs effectifs le résultat d'une entreprise ; cependant des calculs exacts sont effectués dans les bureaux des grands établissements et, quoique inconnus du public, ils n'en exercent pas moins une influence occulte, mais réelle, sur le cours des valeurs.

On peut donc admettre que, en général, l'évaluation du prix des titres négociables a été faite conformément aux règles exposées précédemment : il y a exception lors d'une émission, les cours pouvant être faussés complètement par les manœuvres des syndicats de banquiers chargés du placement des titres.

193. **Nature des titres.** — Les valeurs mobilières se classent, au point de vue des affaires, en diverses catégories telles que : fonds publics, actions de capital, actions de jouissance, parts de fondateur, obligations, délégations, bons, etc.

Chacune des catégories jouit de privilèges spéciaux indiqués en général sur le papier représentant le titre, et qui sont énumérés dans l'annuaire publié par la Chambre syndicale des agents de change ; cet ouvrage donne, par exemple, la date d'émission, le tableau d'amortissement, le nombre de titres émis et amortis, les cours, les intérêts et dividendes, etc., en général toutes les indications qui permettraient, le cas échéant, de calculer très exactement par les méthodes générales, la valeur du titre d'après un taux réel donné.

194. **Forme des titres.** — Les titres peuvent être au *porteurs*, *nominatifs* ou *mixtes*.

Les titres *au porteur* se transmettent soit directement, soit avec l'aide d'un intermédiaire (agent de change) ; le bordereau certifiant l'achat ou l'échange est le titre de propriété ; les coupons et les amortissements se payent au porteur, sans autre justification.

Les titres *nominatifs* sont la propriété exclusive de la personne dont ils portent le nom, et ils ne peuvent se transmettre que par une formalité particulière appelée *transfert*, exécutée par les Sociétés ayant émis les titres ou leurs mandataires.

Les coupons et amortissements ne peuvent être payés qu'au titulaire sur présentation du titre, ou plutôt du certificat qui le représente, et ne porte pas de coupons.

Les titres *mixtes* sont des titres *nominatifs* possédant une feuille de coupons *au porteur* payables à celui qui les présente sans aucune formalité.

L'amortissement ne peut être payé qu'au titulaire.

195. **Négociation des titres.** — La négociation des titres s'opère en général dans des Bourses définies, en France, par l'article 71 du Code de commerce : « réunion qui a lieu entre des commerçants, capitaines de navire, agents de change et courtiers. Le résultat des négociations et des transactions qui s'opèrent à la Bourses, détermine le cours du change des marchandises, des assurances, du fret ou nolis, du prix des transports, *des effets publics et autres* dont le prix est susceptible d'être coté. »

A la Bourse de Paris, les négociations sont opérées par l'intermédiaire des agents de change, officiers ministériels assermentés, qui constatent les cours pratiqués à inscrire sur la *cote officielle* des valeurs.

196. **Variation des Cours.** — Quel que soit le nom d'une valeur mobilière on peut toujours, étant données les conditions financières qu'elle porte inscrites sur sa feuille représentative, calculer sa valeur à un taux d'intérêt déterminé. Mais ce taux peut, à une époque déterminée, être très différent pour les diverses valeurs, et

même il peut varier pour des valeurs presque identiques au point de vue des garanties.

La raison de cette différence provient du risque couru, de la réussite ou de la non réussite de l'affaire pour laquelle elles ont été émises, ou du crédit qui lui est attaché.

Suivant l'appréciation faite de ces divers risques, on prendra un taux réel d'intérêt différent pour évaluer le prix d'un titre : il en résultera des variations de cote de francs et même de dizaines de francs.

Les influences ordinaires et générales, telle que la loi de l'offre et de la demande, apporteront également des modifications de cours ; les réactions de la politique sur le taux d'escompte des Banques, un événement heureux, les résultats d'une expédition militaire, une catastrophe, etc. produisent aussi des variations importantes impossibles à prévoir et à peser exactement : aussi, en définitive, les cours diffèrent-ils souvent de ceux qui résulteraient d'une étude raisonnée et purement mathématique indépendante des causes extérieures.

Enfin, la hausse ou la baisse des cours est provoquée souvent par l'influence occulte résultant de la position de grands banquiers, qui créent le sens de la variation ; mais, cependant, on doit remarquer que, à certaines époques de l'année, les cours ont une tendance à suivre une marche déterminée : on constate, par exemple, qu'à la veille d'époques d'échéances importantes, les cours baissent, c'est-à-dire que le taux d'intérêt augmente à cause de la demande de numéraire.

Rappelons enfin que, à la Bourse de Paris, les cours tiennent compte de l'intérêt acquis depuis le détachement du dernier coupon. Ils varient par 0,05 pour les rentes françaises et par 0,25 pour les obligations de chemins de fer, par francs pour la plupart des actions, par 5 francs.

197. **Classification des opérations de Bourse.** — On classe les opérations de Bourse en :

Opérations au *comptant*, qui sont le plus souvent des opérations *de placement*, et opérations *à terme*, faites en général dans un but de *spéculation*.

Mais cependant le comptant peut être un résultat de la spéculation et réciproquement quelques opérations à terme sont faites en vue de placement.

198. **Opérations au comptant.** — Elles consistent en achats ou ventes contre remise d'espèces et se distinguent d'après la nature de l'ordre donné à l'intermédiaire : *au mieux*, c'est-à-dire au cours pratiqué à la réception de l'ordre ; *au cours moyen* déterminé par les commis d'agents de change par la moyenne arithmétique des plus haut et plus bas cours cotés entre midi et trois heures : si aucun cours n'a été coté, l'ordre est annulé ; à *un cours limité* donné comme maximum ; au *premier cours* ou au *dernier cours* coté.

La durée des ordres de Bourse doit toujours être indiquée : ils peuvent être donnés aussi jusqu'à *révocation*, mais en général ils se terminent à la fin du mois.

199. **Opérations à terme.** — On appelle ainsi toute négociation devant se régler à une époque déterminée appelée *liquidation*.

Les liquidations s'opèrent le 1er de chaque mois pour les rentes françaises, les actions de la Banque de France, du Crédit foncier, des grandes Compagnies de chemins de fer. Pour toutes les autres valeurs, les liquidations se font le 1er et le 16 de chaque mois.

La veille de ces jours s'appelle *jour de la réponse des primes*. Quand le jour de la liquidation ou la veille de ce jour tombe un jour férié, les opérations sont retardées d'une journée.

Les ordres se donnent comme ceux du comptant, sauf au cours moyen ; ils ne peuvent s'opérer que pour des quantités minima de titres déterminées par la Chambre syndicale des agents de change : 1.500 francs de rente française 3 %; 2.500 francs de rente brésilienne ; 25 actions Nord etc.

La variation des cours est fixée par multiples de 0 fr. 025 pour les rentes, par francs entiers pour les autres valeurs, sauf pour les actions de la Banque de France pour lesquelles la variation minimum est 5 francs.

200. **Différence entre les cours du comptant et à terme.** — Une des causes les plus importantes de la différence entre les cours du comptant et du terme réside dans la manière de coter les titres suivant que l'on tient compte ou non des intérêt courus depuis le détachement du dernier coupon.

En France, le cours doit comprendre les intérêts courus, et théoriquement le cours du comptant doit augmenter quotidiennement de la portion de coupon acquise : il en résulte donc que le cours du terme doit être normalement plus élevé que le cours du comptant ; la différence entre ces cours s'appelle *report* ; si le cours du terme est inférieur à celui du comptant, ce qui peut arriver s'il y a beaucoup de ventes à découvert, on dit qu'il y a *déport*.

Dans les Bourses du type français : Bruxelles, Rome, Genève, Londres, le *report* sera donc la règle générale et le *déport* l'indice d'une situation exceptionnelle.

Les places allemandes cotent autrement : elles déduisent les intérêts courus, et les font bonifier au vendeur ; cela revient à vendre les titres plus cher et à un cours analogue à celui qui serait coté dans les Bourse françaises. Mais il en résulte que, normalement, les cours du comptant et du terme sont égaux et que le report et le déport peuvent indifféremment se produire sans qu'il y ait une situation anormale du marché.

La loi de l'offre et de la demande joue naturellement un rôle important dans la fixation des cours ; certaines valeurs cotées tous les jours à terme sont, exceptionnellement, prises au comptant et le cours du comptant n'a aucune relation avec le cours à terme : il est fixé un peu au hasard.

Des achats répétés au comptant font souvent hausser une valeur, et cependant le cours du terme reste invariable, et réciproquement.

201. **Opérations élémentaires du terme. Couverture.** — Les deux opérations élémentaires sont l'achat à terme et la vente à terme. Dans la généralité des cas, ces opérations étant de pures spéculations, les joueurs n'ont pas les fonds nécessaires pour *lever* les titres, (c'est-à-dire en prendre livraison), et n'ont pas les titres qui devraient être livrés.

On conçoit, en effet, que les opérations élémentaires ne se fassent pas une à une : elles sont toujours liées entre elles et, par suite, peuvent se compenser de telle sorte qu'il y ait seulement une *différence* à régler sans qu'il y ait un mouvement énorme de capitaux ou de titres.

Le numéraire destiné à régler éventuellement ces différences doit être déposé chez l'agent de change ou le banquier intermédiaire, et cette somme prend le nom de *couverture* ; elle est naturellement d'autant plus élevée que la solvabilité du spéculateur paraît moins certaine à l'intermédiaire.

202. **Spéculation**. — L'intervention des spéculateurs engageant des capitaux importants et responsables seulement de sommes relativement faibles, a très souvent pour effet de fausser les cours et de provoquer des mouvements de hausse ou de baisse absolument inexplicables, le taux moyen général des bonnes valeurs n'ayant pas varié.

La réalisation d'un bénéfice par un spéculateur n'implique pas nécessairement une perte pour la contre-partie, car cette dernière (spéculateur aussi le plus souvent) peut avoir réalisé un bénéfice sur son opération arrêtée à l'époque qu'il a jugée convenable. Mais on doit énergiquement se défendre de dire que tout bénéfice doit être considéré comme une augmentation de la fortune publique : on a vu des actions (au nombre de 800.000) passer en un an de 1.300 à 2.000, soit une augmentation de 560 millions; quelques années après, le cours de 1.300 était difficile à maintenir. La fortune publique n'avait certes pas varié, en gain ou en perte, de plus de 500 millions pendant cette période !

Les deux opinions précédentes, sont donc exagérées et la vérité est que la spéculation (c'est-à-dire le terme), quand elle n'est pas déraisonnée, est un régulateur excellent des cours de titres que l'on ne saurait coter d'après les quelques ventes ou achats épars du comptant : c'est un mal utile, mais nullement obligatoire. Bien d'autres marchandises, de consommation courante il est vrai, ont des cours bien assis sans que la spéculation ait besoin d'intervenir : peut-être aurait-on pu trouver une combinaison permettant de s'en passer pour les valeurs mobilières ?

203. **Frais accessoires.** — Toutes les opérations de Bourse donnent lieu à la perception d'un courtage pour rémunérer l'intermédiaire et d'une taxe prélevée par l'État sur toute opération de Bourse.

Ces frais accessoires grèvent lourdement les spéculateurs et leur enlèvent une partie notable des bénéfices qu'ils escomptent.

204. **Tarif du droit de courtage.** — Les droits de courtages ont été réglementés par l'article 38 du décret du 7 octobre 1890 et l'article 1er du décret du 12 juillet 1901.

Voici ce tarif, qui est obligatoire ainsi que l'indique la note placée en tête :

(*Toute réduction sur les droits indiqués dans le tarif ci-dessous rendrait l'agent de change passible de pénalités très sévères de la part de la Chambre syndicale.*)

Négociations effectuées en vertu de pièces contentieuses : 0,25 % du montant de la négociation.

Négociations au comptant sur toutes valeurs, y compris la Rente française : 0,10 % du montant de la négociation, avec minimum de 0,50 *par bordereau*.

Négociations à terme.

Rente française : 12 fr. 50 par 1.500 fr. de rente 3 % perpétuelle ou amortissable, soit 0,025 par 3 fr. de rente.

Fonds d'Etats étrangers se négociant en capital ou en rentes : 25 fr. pour la plus petite coupure négociable à terme, et successivement dans la même proportion.

Actions et obligations.

Pour les actions et obligations lorsque le cours est inférieur à 250 fr. : 0,25 par action ou obligation.

Pour les actions et obligations lorsque le cours est compris entre 250 et 500 fr. : 0,50 par action ou obligation.

Pour les actions et obligations dont le cours dépasse 500 fr. : 0,10 % du montant de la négociation.

Opérations de reports.

Rente française : 12 fr. 50 par 1.500 fr. de rente 3 % perpétuelle ou amortissable.

Sur toutes autres valeurs.

Pour toutes les valeurs soumises à la double liquidation: $^1/_{20}$ % du montant de la négociation.

Pour les valeurs soumises à la liquidation mensuelle : $^1/_{12}$ % du montant de la négociation.

A titre exceptionnel, sur les fonds d'Etats étrangers dont le cours est supérieur à 60 fr. : 15 fr. pour la plus petite coupure négociable à terme, et successivement dans la même proportion.

Fonds d'Etats étrangers dont le cours est inférieur à 60 fr. : $^1/_{20}$ du montant de la négociation.

DISPOSITIONS SPÉCIALES

Les tarifs ci-dessus sont applicables à toutes les certifications de signatures données par les agents de change lorsqu'elles ne se rapportent ni à un achat ni à une vente (Décret du 7 octobre 1890).

Pour les valeurs non entièrement libérées, les maxima indiqués ci-dessus sont réduits proportionnellement à la partie non versée.

Pour les reports : $^1/_{20}$ $^0/_0$ du montant versé ou 0,05 $^0/_0$ si ce montant est inférieur à 60 fr.

Lorsque deux opérations en sens contraire ont été effectuées en vertu du même ordre et dans la même Bourse, les maxima ci-dessus ne sont calculés que sur l'opération donnant lieu au courtage le plus élevé.

En vertu d'une décision de la Chambre syndicale, la disposition qui précède est applicable à tous les donneurs d'ordre.

205. **Impôt sur les opérations de Bourse.** — Cet impôt a été fixé par les lois des 28 avril 1893 et 28 décembre 1895 et enfin par la loi de finances du 31 décembre 1907 aux chiffres du tarif ci-après :

Sur toute opération d'achat ou de vente au comptant ou à terme :

Pour la rente française : 0,0125 $^0/_{00}$ ou fraction de 1.000 fr. du montant de la négociation.

Pour toutes les autres valeurs (françaises ou étrangères) : 0,10 $^0/_{00}$ ou fraction de 1.000 fr. du montant de la négociation.

Sur les opérations de report :

Pour la rente française : 0,006.25 $^0/_{00}$ ou fraction de 1.000 fr. du montant de l'achat ou de la vente du côté le plus élevé.

Pour toutes les autres valeurs (françaises ou étrangères) : 0,025 $^0/_{00}$ ou fraction de 1.000 fr. sur le montant de l'achat ou de la vente du côté le plus élevé.

Sur les opérations faites à l'étranger :

0,20 $^0/_{00}$ ou fraction de 1.000 fr. sur le montant de l'achat ou de la vente.

DISPOSITIONS DIVERSES

Le droit étant établi par 1.000 fr. ou fraction de 1.000 fr., le montant de la perception ne peut être inférieur au taux même du droit ou à ses multiples.

Toute fraction de centime dans la liquidation du droit donne lieu à la perception du centime entier.

Pour les valeurs non libérées, le droit est calculé sur le montant de la négociation, déduction faite du non versé.

Pour les opérations à primes, le droit n'est perçu, en cas d'abandon du marché, que sur le montant de la prime abandonnée.

Les opérations d'escompte ou de compensation ne donnent lieu à la perception d'aucun droit.

206. **Cote des cours pratiqués.** — Les Bourses des différentes villes ont adopté des dispositions spéciales pour indiquer au public les cours pratiqués : les tableaux résumant ces cours s'appellent *cotes officielles*.

Les renseignements qu'elles donnent sont très différents suivant les places : tantôt elles contiennent la suite des cours pratiqués, tantôt un cours d'offre et un cours de demande ; en tout cas elles ne peuvent jamais renseigner complètement sur une valeur, sauf au point de vue de son prix, et il y a lieu de se reporter aux annuaires spéciaux décrivant les titres et donnant les conditions d'émission, d'intérêt, d'amortissement, pour suivre une valeur et apprécier si sa cote est à peu près normale.

La cote de Paris contient deux parties principales appelées première et deuxième partie du *Bulletin de la cote*.

La première partie se subdivise elle-même en deux, relatives aux valeurs sur lesquelles on fait des opérations à terme et aux valeurs qui ne se négocient normalement qu'au comptant ; elle est complétée par divers renseignements sur le cours des changes, sur les devises étrangères, les cotes des matières d'or et d'argent, le taux des bons du trésor et le taux d'escompte et d'avances de la Banque de France.

Enfin, elle donne quelques dépêches télégraphiques indiquant les cours pratiqués à Londres et à Vienne : des renseignements plus complets sont donnés sur les cours à l'étranger par une autre cote appelée la *cote européenne*.

La seconde partie de la cote contient simplement le cours au comptant de diverses valeurs ne figurant pas à la cote officielle.

1re PARTIE. — La partie de la cote donnant les renseignements afférents aux titres qui se négocient à terme est disposée comme suit :

La colonne 1 indique le plus souvent « Divers » ; elle ne sert d'ailleurs pas à grand'chose, sauf pour les titres nouvellement émis.

Les colonnes 2, 3, 4 « Reports » donnent la valeur du « Report » (voir ci-après, 216), conclu du comptant à la liquidation courante, du comptant à la liquidation prochaine, c'est-à-dire à celle qui suit la courante (opération assez rare), et enfin d'une liquidation à la suivante.

On lit quelquefois dans ces colonnes un nombre suivi de la lettre B, abréviation de *boni* ; dans ce cas le report se change en *déport* (voir ci-après, 216).

Enfin, s'il y a plusieurs nombres dans la colonne, le prix du report est la moyenne des divers chiffres.

La colonne 5 donne le cours de compensation (voir ci-après, 218), auquel se règlent toutes les opérations de report.

Dans la colonne 6, on porte la désignation des valeurs en donnant assez de détails pour qu'elles puissent être distinguées clairement, mais cependant insuffisants pour permettre d'effectuer des calculs de parité.

TAUX D'ÉMISSION	REPORTS			COURS DE COMPENSATION	DÉSIGNATION DES VALEURS	JOUISSANCE	AU COMPTANT
	COMPTANT		liq. à l'autre.				
	liq.	liq. préc.					
1	2	3	4	5	6	7	8

A TERME					CLOTURE de la veille		INTÉRÊTS et dividendes	
	Premier cours.	Plus haut.	Plus bas.	Dernier cours.	Comptant.	Terme.	Ex. préc.	Acompte.
9	10	11	12	13	14	15	16	17

Le classement des titres est le suivant :

Fonds d'État français, fonds garantis par le gouvernement français, emprunts de colonies et protectorats, emprunts de villes, valeurs françaises, fonds d'États étrangers, valeurs étrangères.

La colonne 7 rappelle la date du dernier coupon payé.

La colonne 8, *au comptant*, donne les divers cours pratiqués dans la Bourse du jour et relevés par des employés spéciaux appelés les « coteurs ». Ces cours sont relevés dans l'ordre même de leur venue ; ainsi on trouvera :

Ville de Paris, 1904, remb. à 500 fr. tout payé
avr. 1907 : 425, 424 50, 424, 423, 422, 423, 424

Les colonnes 9 à 13 sont relatives aux opérations à terme.

La colonne 9 ne porte pas d'en-tête ; elle sert à porter en face des valeurs une ou plusieurs des indications suivantes :

En liq., c'est-à-dire cours coté pour la liquidation courante ;

Fin cour., c'est-à-dire cours coté pour la fin du mois pour les valeurs soumises à la liquidation mensuelle (voir n° 199).

Au 15 / Au 30 : c'est-à-dire cours coté pour le 15 ou le 30 pour les valeurs soumises à la double liquidation mensuelle (voir n° 199).

Pr. dem., prime pour le lendemain.

Pr. fin p,, prime pour la fin du mois / Pr. fin c., prime pour fin courant : valeurs soumises à une liquidation mensuelle.

Pr. au 15, prime pour le 15 / Pr. au 30, prime pour le 30 : valeurs soumises à la liquidation de quinzaine.

Les colonnes 10, 11, 12, 13 s'expliquent d'elles-mêmes ; les colonnes 11 et 13 contiennent les valeurs des primes précédées de la lettre *d*, (dont) (voir n° 219).

Le cours de clôture de la veille (comptant et terme) est rappelé dans les colonnes 14 et 15, et enfin les intérêts et dividendes payés dans l'exercice précédent ainsi que l'acompte payé dans l'exercice courant sont indiqués dans les colonnes 16 et 17.

Pour un certain nombre de valeurs qui ne se négocient qu'au comptant les indications sont réduites à celles du tableau ci-après qui s'explique à simple lecture :

TAUX D'ÉMISSION	DÉSIGNATION DES VALEURS	JOUISSANCE	AU COMPTANT	CLOTURE DE LA VEILLE	INTÉRÊTS ET DIVIDENDES	
					Ex. préc.	Acompte

La dernière colonne de ce tableau est même supprimée pour diverses valeurs.

2ᵉ PARTIE. — Le tableau relatif aux valeurs inscrites dans cette seconde partie est réduit à ce qui suit :

DÉSIGNATION DES VALEURS	COMPTANT

207. **Cotes étrangères.** — Les cotes étrangères sont en général assez différentes de la cote de Paris, qui est certainement la plus complète, bien qu'elle présente une lacune en ce sens qu'elle n'indique pas nettement les cours d'offre et de demande.

La cote d'Amsterdam qui se lit sans difficulté est disposée comme suit :

JOUISSANCE	FONDS	COURS PRÉC.	PLUS BAS	PLUS HAUT

Dans la cote de Berlin on distingue les cours de demande, d'offre et de réalisation : les premiers sont suivis de la lettre B (initiale de *Brief*, demande) ; les seconds de G (*Geld*, offert), et les derniers de b (*bezahlt*, traité à).

Augsburg 7 fl.-Loose	—	à Stück	31.90 b.
Bad. Präm.-Anl. 1867	4	1. Febr. 1. Aug.	155 b.
Braunsch. 20 Thir.-L.	—	à Stück	165.20 b.
Cöln-Mind. Pr.-A.-Sch.	$3\frac{1}{2}$	1. April 1. Oct.	133.80 b. G.
Hambg. Pr.-A. 1866.	3	1. Marz	146 b. B.
Lübecker Präm.-Anl.	$3\frac{1}{2}$	1. April	151.75 b.
Meininger Loose.	—	à Stück	32.90 B.
Oldenburg, 40 Thlr.-L.	3	1. Febr.	126 B.
Pappenheimer 7 fl.-L.	—	à Stück	— —

CHAPITRE II

MARCHÉS FERMES

208. **Opérations effectives de Bourse.** — La veille du jour de la liquidation s'appelle *jour de la réponse des primes* ; le jour même, le 30 par exemple, on liquide effectivement, c'est le premier jour de liquidation.

Les 2e et 3e jours on dresse les comptes et les agents procèdent aux compensations.

Le 4e jour les débiteurs payent ; le 5e jour les créanciers encaissent.

La liquidation du 15 ne dure que quatre jours, les agents n'ayant qu'un jour pour arrêter leurs comptes.

209. **Achat à terme ferme.** — Si l'on prévoit une hausse très réelle sur les titres, supérieure bien entendu à l'augmentation normale due à l'acquisition des intérêts, on achète à terme, c'est-à-dire à un cours déterminé, fixé, avec promesse de livraison à la prochaine liquidation.

Si, à cette époque, les prévisions se sont réalisées, la vente au comptant des titres permet de réaliser un bénéfice en tenant compte toutefois des courtages.

Exemple. — *Etablir le bordereau de A acheteur le 8 juin de 25 Nord à 1770 à livrer à la prochaine liquidation* (*2 juillet*).

Si le 2 juillet A dit à son agent de change qu'il lève les

25 Nord, il versera la somme décomptée ci-après et recevra ses titres le 4 juillet.

A., s/ c^{te} de liquidation du 30 juin, chez X..., agent de change.

DOIT. AVOIR.

DATES	COLONNES de valeurs. NORD			COURS	CAPITAL	COURTAGE ET IMPOTS	DATES	COLONNES de valeurs.			COURS	CAPITAL	COURTAGE ET IMPOTS
8/6	25			1770	44.250 »								
	Courtage 1 $^0/_{00}$					44,25							
	Impôts 0,10 $^0/_{00}$					2,25							
	Timbre quittance					0,10							
					48,85	48,85							
	Total.				44.298,85								

210. **Vente à terme ferme.** — Si l'on prévoit au contraire une baisse, on vend avec promesse de livraison à la prochaine liquidation ; à cette époque un achat au cours en baisse permettra de livrer les titres et de réaliser un bénéfice.

211. **Droit d'escompte.** — Tout acheteur à terme ferme a le droit *d'escompter* le vendeur, c'est-à-dire de lever ses titres avant la liquidation en prévenant cinq jours à l'avance et en faisant afficher sa demande à la Bourse.

Cette opération se fait lorsqu'on pressent des ventes à découvert : le vendeur étant obligé de se procurer des titres, la demande est supérieure à l'offre et le cours monte à cause de la raréfaction des titres.

212. **Formules du résultat de l'achat à terme ferme.** — Soient a le cours d'achat, l le cours de liquidation, n le nombre d'unités de titres (une coupure de 3 fr. de rente, une action, etc.), et f les frais de courtage ; le résultat de l'opération sera :

$y = n(l - a) - f$; la valeur de f étant donnée ci-après:

On voit que y est un multiple de n et que par suite il est commode de supposer $n = 1$; dans ces conditions, le résultat de l'opération sera donné par la formule :

$y = l(1 - 0{,}001.012.5) - 0{,}025 - a(1 + 0{,}000.012.5)$, pour les rentes françaises ;

$y = l(1 - 0{,}001.1) - 0{,}05 - a(1 + 0{,}000.1)$, pour les rentes étrangères;

$y = l(1 - 0{,}001.1) - 0{,}25 - a(1 + 0{,}000.1)$, pour les autres valeurs dont le cours est inférieur à 250 fr.

$y = l(1 - 0{,}001.1) - 0{,}50 - a(1 + 0{,}000.1)$, pour les valeurs dont le cours est compris entre 250 et 500 fr.

$y = l(1 - 0{,}001.1) - a(1 + 0{,}001.1)$, pour les valeurs dont le cours est supérieur à 500 fr.

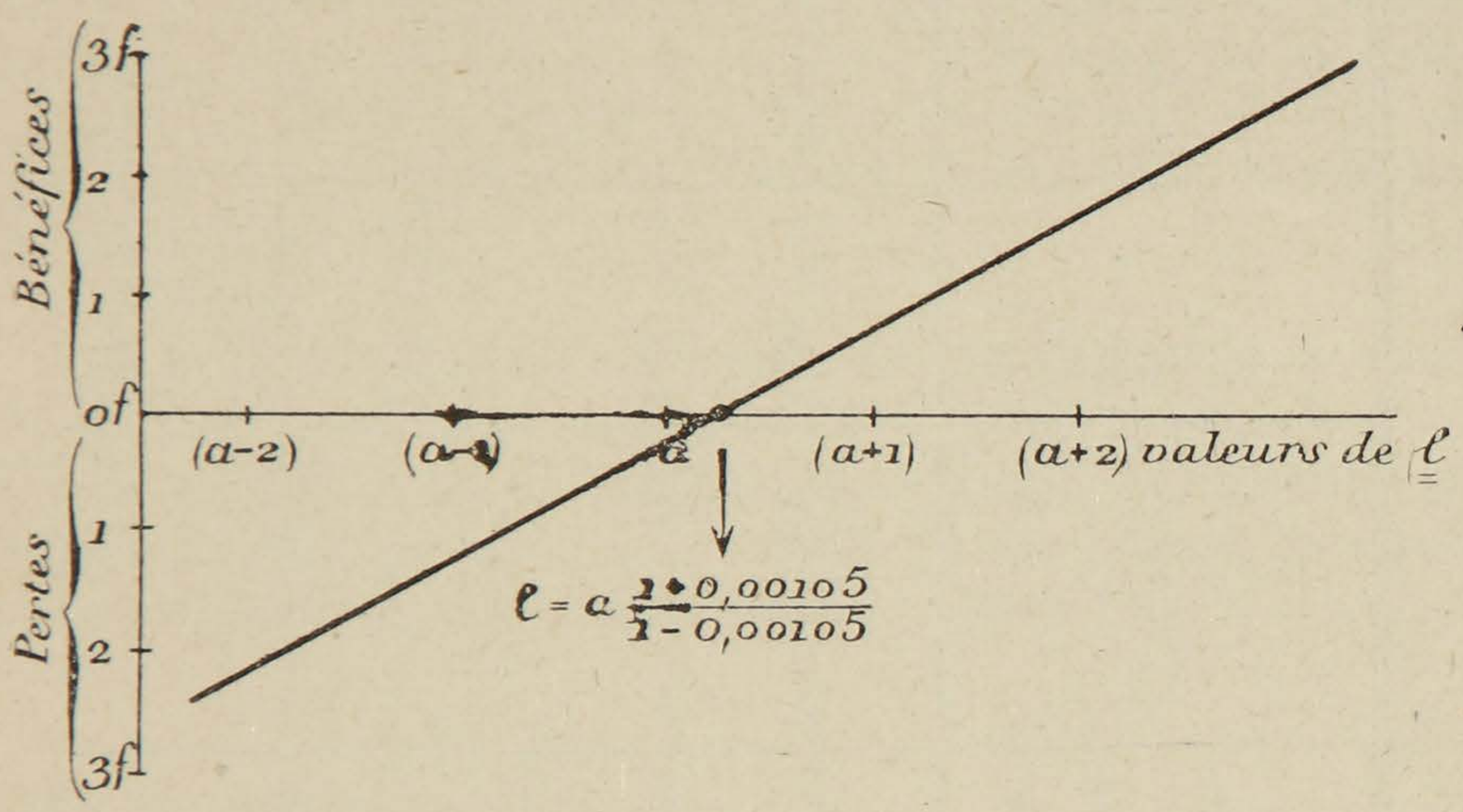
Ces formules permettent de déterminer sans difficulté le cours de liquidation à partir duquel le bénéfice est réel, c'est-à-dire supérieur à zéro.

On voit qu'il est facile de représenter graphiquement ce bénéfice en partant d'un cours donné d'achat a : il suffit de porter en abscisses les cours de liquidation et en ordonnées les bénéfices : l'équation précédente représente alors, dans

	COURTAGES		TIMBRE	TOTAL : f
	DE L'ACHAT A TERME	DE LA VENTE AU COMPTANT		
Rente française.	$n \times 0,025$	$n \times l \times 0,001$	$n(a + l)\ \frac{0,0125}{1\,000}$	$\frac{n}{1\,000}\ (25 + l \times 1.0125 + a \times 0,0125)$
Rentes étrangères.	$n \times 0,05$	$n \times l \times 0,001$	$n(a + l) \times \frac{0,10}{1\,000}$	$\frac{n}{1\,000}\ (50 + l \times 1,10 + a \times 0,10)$
Actions et obligations dont le cours est :				
inférieur à 250 f.	$n \times 0.25$			$\frac{n}{1\,000}\ (250 + l \times 1,10 + a \times 0,10)$
compris entre 250 et 500 f. . .	$n \times 0,50$	$n \times l \times 0,001$	$n(a + l) \times \frac{0,10}{1\,000}$	$\frac{n}{1\,000}\ (500 + l \times 1,10 + a \times 0,10)$
supérieur à 500 f.	$n \times a \times 0,001$			$\frac{n}{1\,000}\ (l + a) \times 1,10$

tous les cas, une droite, et une simple lecture du graphique ainsi construit donne le bénéfice réalisé.

Voici par exemple le graphique relatif aux obligations et actions de valeur nominale supérieure à 500 fr.



Dès que l dépasse le cours $a \times \frac{1 + 0{,}001.1}{1 - 0{,}001.1}$, soit à peu près $a \times 1{,}002.2$ (2 $^0/_{00}$ en sus de a), il y a bénéfice ; au-dessous de ce cours, il y a perte ; ainsi au cours $l = a$ on perd les courtages.

213. **Formules du résultat de la vente à terme ferme.** — Soient v le cours de vente, l le cours de liquidation, on voit facilement qu'il suffit de modifier légèrement les formules précédentes de l'achat ferme à terme.

On aura ainsi comme bénéfice :

$y = v(1 - 0{,}000.012.5) - 0{,}025 - l(1 + 0{,}001.012.5)$, pour les rentes françaises ;

$y = v(1 - 0{,}000.1) - 0{,}05 - l(1 + 0{,}001.1)$, pour les rentes étrangères ;

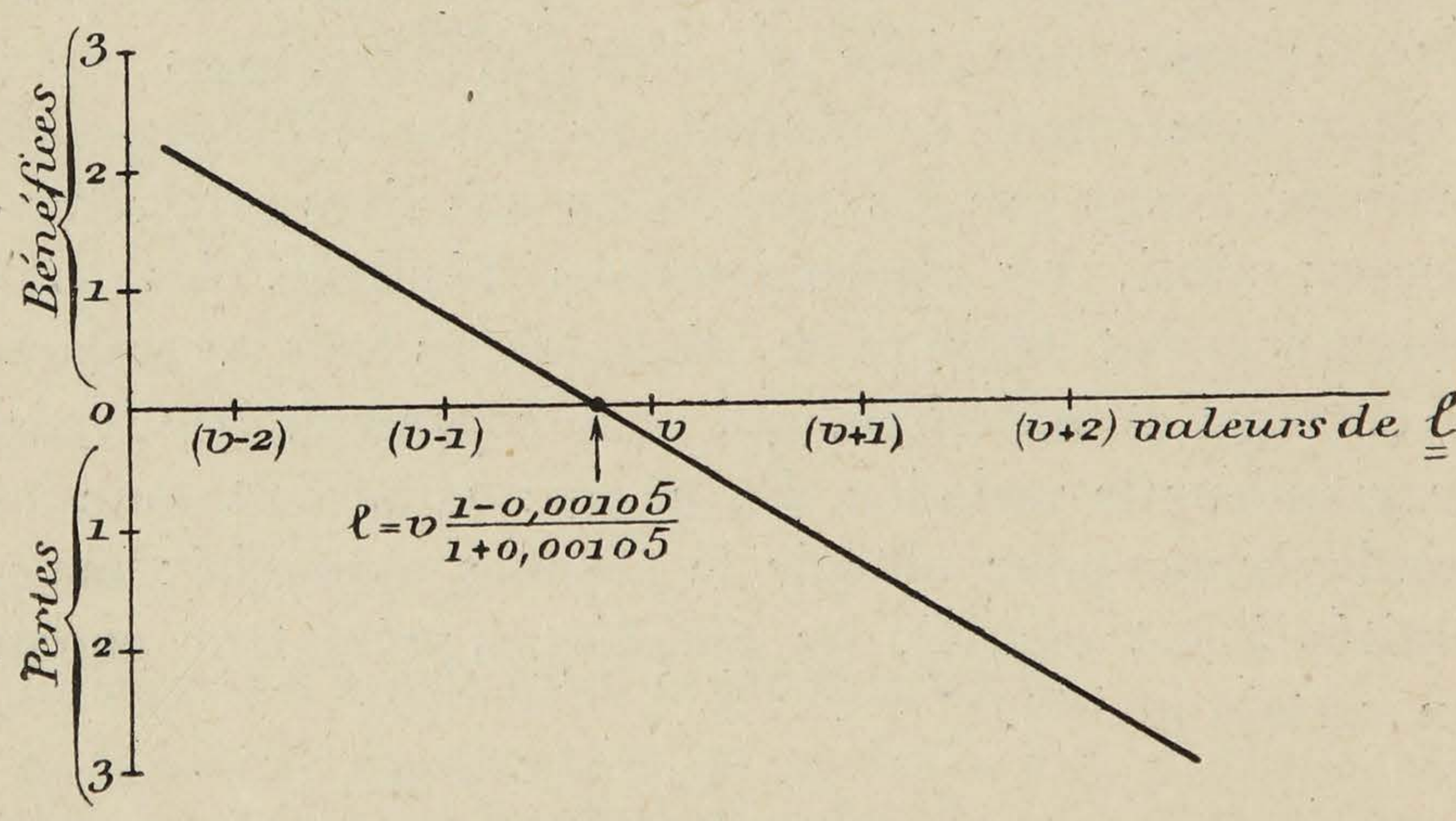
$y = v(1 - 0{,}000.1) - 0{,}25 - l(1 + 0{,}001.1)$, pour les autres valeurs dont le cours est inférieur à 250 fr. ;

$y = v(1 - 0{,}000.1) - 0{,}50 - l(1 + 0{,}001.1)$, pour les valeurs dont le cours est compris entre 250 et 500 fr. ;

$y = v(1 - 0{,}001.1) - l(1 + 0{,}001.1)$, pour les valeurs dont le cours est supérieur à 500 fr.

On représenterait par le graphique suivant le bénéfice de la vente ferme à terme de valeurs diverses dont le cours est supérieur à 500 fr. ; la perte commençant dès que

$$l > v\frac{1 - 0{,}001.1}{1 + 0{,}001.1}, \quad \text{soit à peu près} \quad l > v(1 - 0{,}002.2).$$



214. **Combinaisons des marchés à terme ferme.** — Dans la pratique, les opérations à terme ne sont pas isolées, mais continues, le spéculateur cherchant à profiter des variations successives des cours et quelquefois à se couvrir ou à se remettre des pertes possibles, si la tendance à la hausse qu'il avait prévue se change en tendance à la baisse.

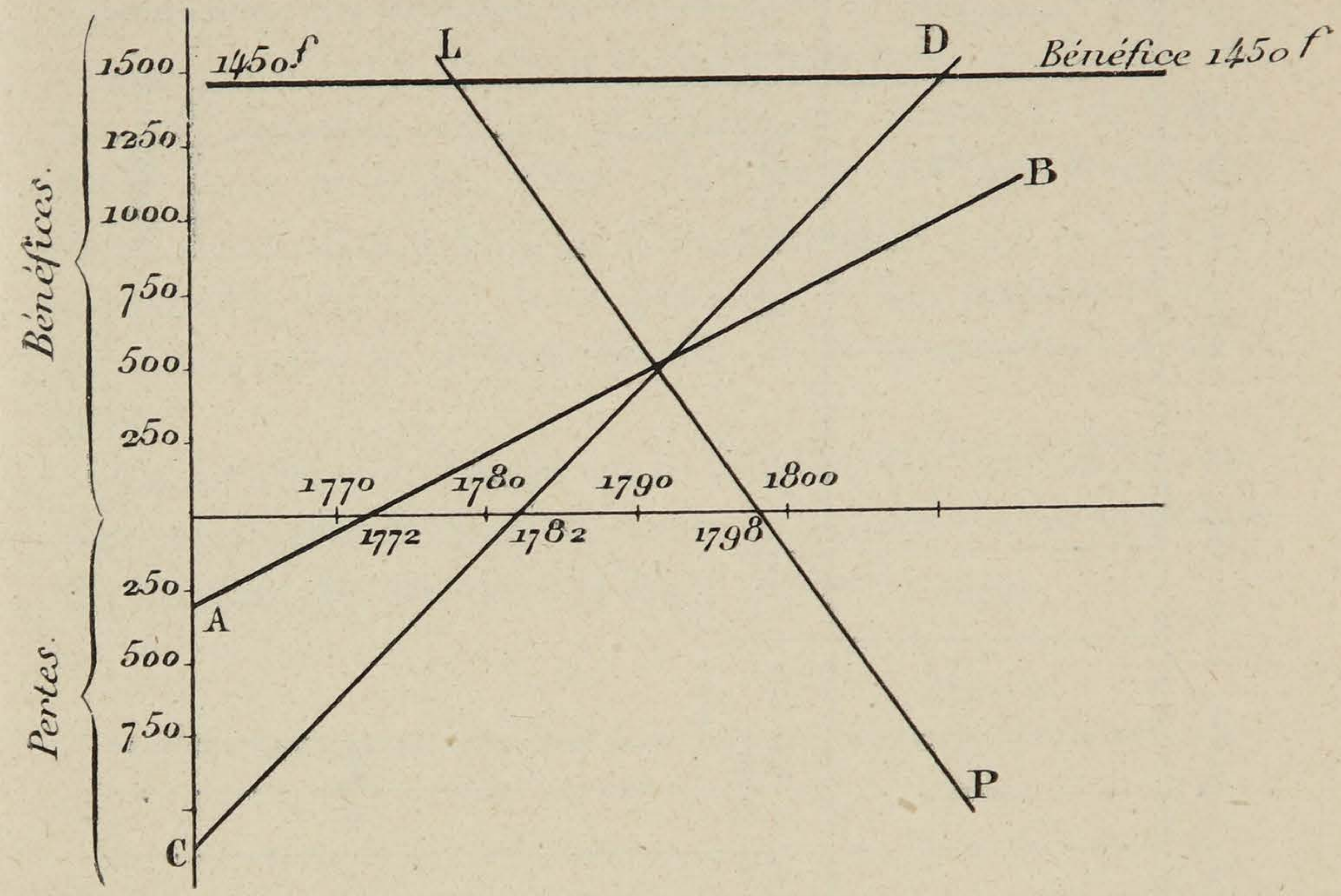
La méthode graphique se prête très heureusement à la représentation de la suite de ces combinaisons, mais à la condition toutefois de changer l'échelle des bénéfices qui a été supposée relative à un titre ; les marchés s'opèrent, comme on l'a vu précédemment, sur un nombre minimum de titres : 1.500 fr. de rente 3 °/₀, par exemple. Si donc l'échelle des bénéfices est graduée pour cette nouvelle unité, les graphiques se construiront facilement : malheureusement, pour qu'ils soient lisibles, il faudrait que l'échelle des bénéfices soit suffisamment grande ; pratiquement, ces représentations graphiques ne servent à rien, et, d'ailleurs, d'une manière générale, les graphiques ne peuvent servir, en opérations financières, qu'à donner une idée du résultat final, mais non à chiffrer exactement ce résultat. Ils donnent des approximations, tandis que les opérations effectives sont rigoureuses ; ainsi, les approximations résultant des graphiques seront telles qu'on négligera les frais accessoires de courtage et de timbre, qui sont cependant de l'ordre de grandeur de variation des cours : on ne doit donc les employer que pour obtenir le résultat approché ; mais, limités à cet emploi, les graphiques présentent encore un certain intérêt.

EXEMPLE. — A *achète à terme ferme : le* 3 *juin*, 25 *Nord à* 1.770 ; *le* 5, 50 *Nord à* 1.780 ; *le* 8, *il vend ferme* 75 *Nord à* 1.800. *Quelle est sa situation au* 2 *juillet à la liquidation* ?

Les cours à partir desquels il y aura bénéfice seront approximativement :

1er achat	1.770 + 1,77 = 1.772	(en chiffres ronds) ;
2me achat	1.780 + 1,78 = 1.782	»
Vente	1.800 — 1,80 = 1.798	»

Les ordonnées 250, 500, 750 représentent le bénéfice obtenu par 25 titres (unité de négociation) si l'action Nord monte de 10 fr.



La ligne AB représentera le premier achat ;

La ligne CD représentera le second achat, l'échelle est double puisqu'il y a 50 titres négociés ($50 = 2 \times 25$) ;

La ligne EF représentera la vente à une échelle triple pour les bénéfices, puisqu'il y a $75 = 25 \times 3$ titres négociés.

Il suffit ensuite de chercher la résultante des droites indiquées c'est-à-dire d'additionner pour chaque cours de liquidation la valeur des 3 ordonnées qui lui correspond.

Dans le cas particulier étudié, cette somme est constante comme le montrent les formules ci-après, et le bénéfice est, graphiquement, de 1.450 fr. environ.

Le compte exact s'établirait comme suit (voir p. 348) :

DOIT A., s/ compte de liquidation au 2 juillet 1907, chez X..., agent de change. AVOIR

DATES	NORD			PRIX UNITAIRE	CAPITAL	COURTAGE	IMPÔT	DATES	NORD			PRIX UNITAIRE	CAPITAL	COURTAGE	IMPÔT
3 juin	25			1770	44.250 »	44 25	4 45	8/6	75			1800	135.000 »	135 »	13 50
5 juin	50			1780	89.000 »	89 »	8 90								
	Courtages et impôts du crédit.					135 »	13 50								
	Courtages et impôts.				295 10										
	Timbre quittance. . .				» 10										
	Solde créditeur. . . .				1.454 80										
					135.000 »								135 000 »		

215. **Faculté à la hausse ou faculté à la baisse.** — Il existe sur certaines places étrangères, notamment en Allemagne, un marché à terme ferme appelé *faculté*. Il consiste à donner le droit à l'acheteur à terme ferme, de lever le double ou un multiple du nombre de titres qu'il avait achetés. Ainsi l'acheteur de 50 Reinische Bank à 105 Rm a le droit d'en demander 100 si le cours est passé à 107 Rm ; il se garderait bien, naturellement, de demander la même faveur si le cours était tombé à 103.

La faculté à la baisse est le marché par lequel le vendeur se réserve le droit de livrer le double ou un multiple du nombre des titres qu'il avait vendus.

CHAPITRE III

REPORTS

216. **Définitions**. — Un acheteur A ferme à terme, étant supposé, pour plus de simplicité, faire une opération unique, peut, au moment de la liquidation, n'être pas en mesure de lever les titres ou simplement ne pas vouloir liquider sa situation en vue d'une hausse probable lui permettant de vendre plus cher : il demande à se faire *reporter*, c'est-à-dire à rester acheteur jusqu'à la liquidation prochaine.

L'agent de change de l'acheteur s'adresse à des capitalistes possédant des fonds disponibles, et leur demande de se substituer à A dans son achat comptant afin de liquider cette opération, et de lui revendre à terme les titres à la prochaine liquidation, moyennant une commission appelée *report*.

Cette opération sera étudiée plus loin, en la considérant comme placement de fonds pour le capitaliste.

En ce qui concerne le reporté A, il devient vendeur ferme au comptant au *cours de compensation* (voir ci-après) suivant une règle établie par les agents, et acheteur à terme ferme des titres au cours de compensation augmenté du report.

Exemple. — A *achète le* 3 *juin* 25 *Nord à* 1.770.

Le 2 *juillet le cours du comptant étant* 1.760, *il perdrait en liquidant son marché : il propose un report au cours de compensation fixé à* 1.765. *Le report étant de* 10 *fr.*, *il se trouve ven-*

deur à 1.765 au 2 juillet et acheteur au 2 août à 1.775 fr.; si à cette époque le cours est de 1.785, le compte de liquidation de cette affaire est indiqué ci-après (p. 352) :

Le vendeur à terme ferme peut également demander à se faire reporter, et demander à un capitaliste possesseur de titres de prêter ses titres pour la durée de la liquidation.

En pratique, les agents de change effectuent la compensation des reports demandés par les acheteurs à terme avec ceux des vendeurs ; les premiers laissant des titres disponibles et les seconds en désirant, l'opération se fait facilement.

Lorsqu'il y a lieu de demander effectivement aux détenteurs de titres un prêt de titres et par suite de payer un loyer de ces titres, ce loyer s'appelle *déport*, il est assez rare que l'on ait recours à des prêteurs de titres : il faut que des tendances à la baisse aient encouragé des ventes à découvert dont les auteurs manquent de contre-partie.

Le plus généralement, cette contre-partie existe, et le vendeur à découvert remplaçant purement et simplement le capitaliste reporteur profite du report que ce dernier aurait eu et profite aussi des titres sans payer effectivement de loyer ; le cours du marché au comptant est alors supérieur à celui du marché à terme.

217. **Variation du report.** — Il semble illogique que les engagements ne se balancent pas dans les marchés, puisqu'à tout acheteur correspond un vendeur ; mais on doit tenir compte que les acheteurs ferme qui arrêtent la spéculation en levant les titres raréfient les valeurs, et les vendeurs à découvert sont nécessairement obligés de cher-

DOIT. AVOIR

DATES	NORD		COURS	CAPITAL	COURTAGES ET IMPÔT	DATES	NORD		COURS	CAPITAL	COURTAGES ET IMPÔT
3/6	25	(1er achat)	1.770	44.250 »	44,25 4,50	2/7	25	Report	1765	44.125 »	»
2/7	25	Achat à terme du report	1.775	44.375 »	37 » 1,10	2/8	25	Vente au compt.	1785	44.625 »	44,65 4,50
		Timbre quittance			» 10						
	Report des courtages et impôts du crédit				49,15						
	Ensemble des courtages et impôts			136,10			Perte solde débiteur			11,10	
				88.761,10						88.761,10	

cher des titres ; de plus, les acheteurs ne se faisant pas reporter, les capitalistes possesseurs d'espèces offrent leurs capitaux à meilleur compte : le prix du report baisse, le report se *détend* et le déport, même, peut se produire dans des cas extrêmes.

Si, au contraire, les haussiers sont en majorité, les acheteurs cherchent à se faire reporter ; la demande de capitaux augmente et le prix du report augmente : le report se *tend*. Il arrive même quelquefois que les agents de change, craignant une augmentation exagérée de ce prix de report, raréfient les titres en les mettant *en pension* chez les capitalistes, c'est-à-dire en les faisant reporter pendant plusieurs liquidations de suite : c'est ce que l'on appelle un *prêt lombard*.

Le report peut être au pair si les engagements des acheteurs et des vendeurs sont identiques : tous les calculs se font au cours de compensation ; ce cas est assez rare.

218. **Cours de compensation.** — Afin de simplifier les calculs, les agents de change établissent pour chaque valeur négociable un cours qui sert à liquider les opérations en cours au moment de chaque liquidation : ce cours est généralement le cours moyen du comptant de la séance du premier jour de la liquidation, il s'appelle cours de *compensation*.

L'introduction de cours arbitraire semble compliquer les opérations ; mais si l'on se souvient qu'il s'agit de milliers de transactions dont la liquidation doit être faite très rapidement, on voit que ce cours intermédiaire évitera de nombreux calculs de différences.

Le cours de compensation est affiché en Bourse à la fin de la séance ; il fixe le montant du report ou du déport par sa différence avec le cours du terme.

Ce cours présente un intérêt réel, car il sert à calculer les différences à payer, aussi les acheteurs (haussiers) ont-ils intérêt à le voir fixer le plus haut possible pour encaisser de suite des différences plus élevées ; au contraire, les vendeurs et les capitalistes reporteurs préfèrent que ce cours soit fixé aussi bas que possible.

Il est très rare qu'il soit fixé *au-dessous* du cours moyen du comptant ; une crise seule, comme celle de 1848, peut faire admettre cette dérogation aux règles de la Chambre syndicale des agents de change.

CHAPITRE IV

MARCHÉS A PRIMES

219. **Marché à terme et à prime pour lever.** — L'acheteur à terme qui se liquide peut perdre des sommes considérables en cas de baisse importante, et le vendeur à terme qui doit livrer et ne peut se faire reporter, comme on le verra plus loin, peut également être ruiné s'il doit acheter des titres en hausse. Le marché à prime remédie à cette éventualité en limitant la perte à une somme fixée à l'avance appelée *prime* qui représente le dédit qui devra être payé par l'acheteur à son vendeur pour avoir le droit de résilier son marché.

L'acheteur indique sa décision en *levant* les titres, c'est-à-dire en transformant son achat à prime en achat ferme, ou en *abandonnant* sa prime, c'est-à-dire en résiliant le marché.

La valeur de cette prime de résiliation est variable suivant les valeurs ; en langage de Bourse, elle s'exprime par la locution :

« Prime dont..... » au lieu de « prime de..... », et elle s'indique après le cours en la séparant par une barre.

Ainsi 3.000 3 % à 98,75/50 veut dire 3.000 francs de rente 3 % au cours de 98,75 dont 0,50 de prime en cas de dédit.

La valeur de la prime est ordinairement de 2 fr. 50, 5 fr. 10 et 20 fr. mais elle peut atteindre 100 fr. et plus pour des titres à cours variables, des titres de spéculation :

elle représente dans ce cas une sorte de compensation offerte au vendeur (dans le cas d'un achat à prime), car son gain peut se trouver très diminué par le fait de la résiliation.

Les opérations à primes sont liquidées la veille de la liquidation, le jour dit de la *réponse des primes* à une heure et demie, et les cours pratiqués à ce moment servent de bases aux liquidations ; on conçoit que les efforts des acheteurs à prime soient dirigés vers une hausse dans les instants qui précèdent une heure et demie, et que réciproquement les vendeurs essaient de provoquer une baisse.

Les courtages et impôts relatifs à ces marchés sont ceux des marchés à terme ; cependant, si la prime est abandonnée, l'impôt n'est perçu que sur cette prime et non sur la valeur de négociation.

On devrait donc tenir compte des impôts dans les calculs qui permettent de savoir si l'on doit lever ou abandonner ; cependant il est d'usage de considérer les titres comme levés si le cours de la réponse des primes est supérieur à celui de la négociation diminué de la prime et on admet que la prime est abandonnée dans le cas contraire ; le cours de négociation diminué de la prime s'appelle le *pied de prime*.

Le vendeur se trouve naturellement désavantagé, puisque son bénéfice est limité par l'abandon de la prime que peut faire l'acheteur qui a seul droit d'option, mais il peut compenser ce désavantage en faisant payer plus cher les titres et d'autant plus cher que la prime est plus faible, c'est-à-dire que l'acheteur lui restreint sa marge possible de bénéfice.

Ainsi, le cours de négociation varie suivant l'importance de la prime et il est d'autant plus élevé que la prime est plus faible.

Par exemple, le Nord valant 1770 ferme au 3 juin, on achètera à 1.780/20, à 1.787/10, et peut-être même à 1.795/5.

La différence entre le cours du marché à prime et celui du terme s'appelle *écart* : cet écart est par suite d'autant plus grand que la prime est plus faible ; il subit naturellement la loi de l'offre et de la demande, et les écarts ne sont aucunement en relation simple avec la valeur des primes.

L'écart diminue naturellement au fur et à mesure que l'on se rapproche de la liquidation.

220. Relation théorique entre l'écart et la prime. — Soient :

a/p le cours d'achat et la prime ;

f le cours du ferme au moment de l'achat ;

ε l'écart, c'est-à-dire $a - f$;

l le cours de la réponse des primes supposé égal au cours de liquidation du ferme, ce qui est, en général, exact.

Si l'acheteur avait conclu un marché ferme au cours f, il aurait payé ε en moins, mais il aurait été en perte de $(f - l)$ si le cours de liquidation était descendu au-dessous de f.

Dans le marché à prime, contre l'engagement de payer ε en sus du cours du ferme, le spéculateur est garanti contre toute perte dépassant p ; ε est donc l'équivalent de la valeur probable de toutes les pertes possibles surpassant p, c'est-à-dire de toutes les différences $a - l - p$.

Afin d'éviter l'influence de la valeur de la prime sur le cours a/p on prendra pour variable la différence entre le cours du ferme et le cours de liquidation ; la probabilité d'une perte $x = f - l$ peut être assimilée à la probabiltié d'un écart (au sens mathématique de ce mot) et par suite elle est : $\frac{h'}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}$.

Dans cette formule, h désigne le module de précision de x, soit : $\frac{1}{m\sqrt{\pi}}$, m étant la moyenne d'un grand nombre de valeurs de $x = f - l$ observées dans les liquidations antérieures et prises en valeurs absolues.

L'écart ε, garantissant contre les différences $a - l - p$ ou $a - (f - x) - p = a - f + x - p = \varepsilon + x - p$, représente la somme des espérances mathématiques de ces différences depuis la valeur o pour $x = p - \varepsilon$ jusqu'à la plus grande valeur possible qui a lieu pour $l = 0$ ou $x = f$.

Mais, en remarquant que si x augmente, la probabilité de cette valeur et l'espérance mathématique de la perte diminuent très rapidement ; que, de plus, l est déjà une valeur très grande par rapport à x, on conclut que l'on ne fera pas d'erreur appréciable en étendant le calcul de la somme des espérances mathématiques jusqu'à une perte infinie. Cette perte, correspondant à $l = \infty$, suppose en somme que la responsabilité de l'acheteur est illimitée en cas de faillite de la société ayant émis le titre négocié.

On aura donc :

$$\varepsilon = \int_{p-\varepsilon}^{\infty} (\varepsilon - p + x) \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}\, dx =$$

$$= \frac{(\varepsilon - p)h}{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^{\infty} e^{-h^2x^2}\, dx - \int_0^{p-\varepsilon} e^{-h^2x^2}\, dx \right) +$$

$$+ \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{p-\varepsilon}^{\infty} x e^{-h^2x^2}\, dx.$$

En posant $hx = z$ dans le 1^er^ terme on a :

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon - p}{\sqrt{\pi}} h \left[\frac{1}{h} \int_0^{\infty} e^{-z^2}\, dz - \frac{1}{h} \int_0^{h(p-\varepsilon)} e^{-z^2}\, dz \right] +$$

$$+ \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{p-\varepsilon}^{\infty} - \frac{1}{2h^2} \cdot (-2hx^2) e^{-h^2x^2}\, dx.$$

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon - p}{2} - \frac{\varepsilon - p}{2} \Theta[h(p - \varepsilon)] + \frac{1}{2h\sqrt{\pi}} e^{-h^2(p-\varepsilon)^2};$$

d'où :

$$2\varepsilon - (\varepsilon - p)\left[1 - \Theta[h(p-\varepsilon)]\right] - \frac{1}{h\sqrt{\pi}\, e^{h^2(p-\varepsilon)^2}} = 0,$$

telle est l'équation qui lie l'écart ε et la prime p.

Si l'on suppose une prime p infinie correspondant à la transformation du marché à prime en marché à terme, on tire de l'équation précédente $\varepsilon = 0$, en remarquant que $\Theta(\alpha)$ tend très rapidement vers 1 dès que α augmente et plus rapidement que α n'augmente lui-même.

Quand $p = \varepsilon$, c'est-à-dire quand la prime égale juste l'écart, on a : $2\varepsilon = \dfrac{1}{h\sqrt{\pi}} = m,$

d'où : $\varepsilon = \dfrac{m}{2}$ soit la moitié de l'oscillation moyenne des différences possibles prises en valeur absolue entre le cours de liquidation et le cours du ferme.

Si l'écart est supérieur à cette valeur moyenne, la prime théorique sera inférieure à l'écart et réciproquement.

Exemple. — *Calculer la valeur théorique de la prime relative à une valeur présentant un écart de 10 fr., sachant que la moyenne des différences des cours du ferme et de liquidation a été de 12 fr.*

On calcule d'abord :

$$h = \frac{1}{12\sqrt{\pi}} = 0{,}047 \quad \text{et} \quad h^2 = 0{,}002.2.$$

L'équation donnant p ne peut être résolue que par tâtonnements, mais on sait déjà que la prime théorique est inférieure à l'écart (10 fr.), car cet écart est supérieur à $\dfrac{m}{2} = 6$.

L'équation s'écrit :

$$20 - (10 - p)\left[1 + \Theta[0{,}047(10-p)]\right] -$$
$$- \frac{12}{e^{0{,}002.2(10-p)^2}} = 0\,;$$

et l'on voit qu'en remplaçant p par 10 le premier membre est > 0.

Remplaçons p par 5 à titre d'essai ; il vient :

$$\alpha_5 = 20 - 5[1 + \Theta(0{,}047 \times 5)] - \frac{12}{e^{-0{,}002.2\times 25}}.$$

En calculant d'après les tables des valeurs de Θ, on a : $\Theta(0{,}235) = 0{,}260$, et par suite on trouve :

$$\alpha_5 = 20 - 5(1 + 260) - 11{,}35 = 2{,}35 > 0,$$

donc $p = 5$ est trop fort.

En remplaçant p par 4 on trouve $\alpha_4 = 1{,}06$.

» p par 3 on trouve $\alpha_3 = -0{,}28$.

La prime théorique est donc un peu supérieure à 3 fr. ; elle est très faible parce que l'amplitude de la différence entre les cours du ferme et de liquidation est considérable.

221. **Formules du résultat de l'achat à terme et à prime.** — Soient a/p le cours d'achat et sa prime, l le cours de liquidation auquel se fera la vente des titres, et f les frais de l'opération.

Le bénéfice sera donné pour n titres par la formule :

$$y = n[l - a] - f.$$

Mais la perte ne sera pas donnée par cette même formule et elle sera au plus égale à $np + f'$; il faut remarquer que les frais sont différents si l'on abandonne la prime, l'impôt sur les opérations de bourse n'étant alors calculé que sur la prime abandonnée.

La valeur de f est absolument la même que celle indiquée pour les marchés à terme ferme, tant que l'acheteur lève ses titres, c'est-à-dire rend ferme son marché.

Si l'acheteur résilie, en abandonnant la prime, la valeur de sa perte est la suivante :

$$np + n \times 0{,}025 + np \times \frac{0{,}012.5}{1.000}.$$

pour la rente française ;

$$np + n \times 0{,}05 + np \times \frac{0{,}10}{1.000},$$

pour les fonds d'Etats étrangers ;

$$np + n \times 0{,}25 + np \times \frac{0{,}10}{1.000},$$

pour les valeurs diverses dont le cours est inférieur à 250 fr.;

$$np + n \times 0{,}50 + np \times \frac{0{,}10}{1.000},$$

pour les valeurs dont le cours est compris entre 250 et 500 fr. ;

$$np + na \times 0{,}001 + np \times \frac{0{,}10}{1.000},$$

pour les valeurs dont le cours est supérieur à 500 fr.

Comme dans le cas des opérations à terme ferme, le bénéfice ou la perte sont proportionnels au nombre de titres achetés et la représentation graphique peut s'opérer.

Il est convenu, dans les usages de Bourse, que si $l > a - p$ on lève les titres et si $l \leqslant a - p$ on abandonne la prime ; de telle sorte que le cours $(a - p)$ est bien un cours limite, ce qui justifie son nom de *pied de la prime* indiqué précédemment.

Il faut d'ailleurs remarquer qu'en pratique, on a toujours avantage à abandonner la prime au cours limite du pied de la prime.

En effet, si on lève à ce cours, le résultat de l'opération est une perte donnée par la formule indiquée précédemment pour les achats à terme ferme. Ainsi, pour les valeurs dont le cours est supérieur à 500 fr., la perte sera :

$$z = np + n(2a - p)0{,}001.1,$$

ou, pour $n = 1$:

$$z = a \times 0{,}002.2 + p(1 - 0{,}001.1).$$

Si, au contraire, on abandonne la prime, on évite le courtage sur l'opération de vente au comptant et on ne paye l'impôt que sur le montant de la prime abandonnée; la perte est alors : $z' = p(1 + 0{,}000.1) + a \times 0{,}001$, inférieure à la perte provenant de l'opération de levée des titres, et l'on a : $z - z' = a \times 0{,}001.2 - p \times 0{,}001.2$.

Il est facile de chercher le cours de liquidation pour lequel la levée des titres ou l'abandon de la prime est indifférente.

Il faut que :

$$a(1 + 0{,}000.012.5) + 0{,}025 - l(1 - 0{,}001.012.5)$$
$$= 0{,}025 + p(1 + 0{,}000.012.5)$$

ou : $l = (a - p)\dfrac{1 + 0{,}000.012.5}{1 - 0{,}001.012.5}$ pour les rentes françaises;

$$a(1 + 0{,}000.1) + 0{,}05 - l(1 - 0{,}001.1)$$
$$= 0{,}05 + p(1 + 0{,}000.1)$$

ou : $l = (a - p)\dfrac{1 + 0{,}000.1}{1 - 0{,}001.1}$ pour les rentes étrangères;

$$a(1 + 0{,}000.1) + 0{,}25 - l(1 - 0{,}001.1)$$
$$= p(1 + 0{,}000.1) + 0{,}25$$

ou : $l = (a - p)\dfrac{1 + 0{,}000.1}{1 - 0{,}001.1}$ pour les valeurs dont le cours est inférieur à 250 fr.

On peut remarquer que la formule du pied réel de prime est la même pour ces dernières valeurs que pour les rentes étrangères; on trouverait également cette formule pour les valeurs dont le cours est compris entre 250 et 500 fr.

Enfin pour les valeurs dont le cours est supérieur à 500 fr. il faut que :

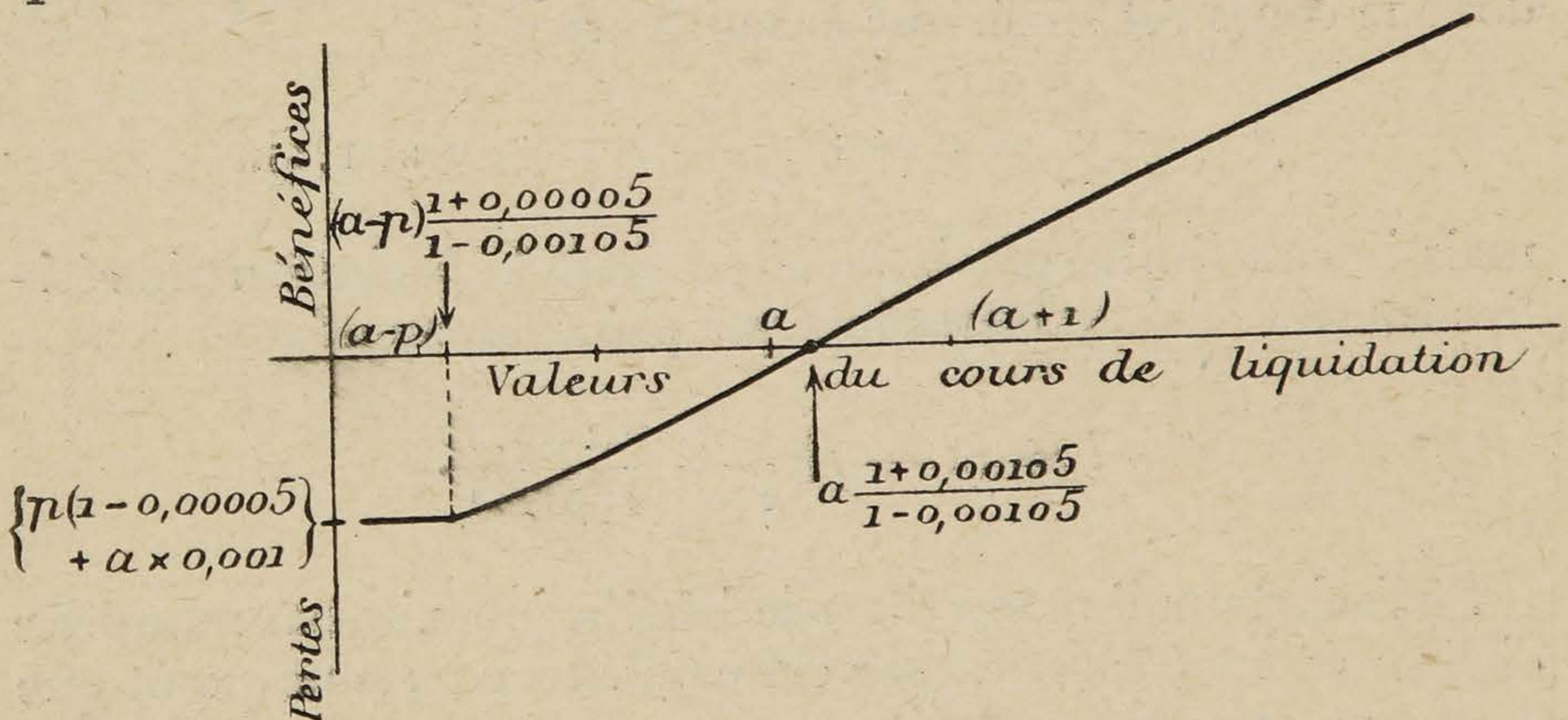
$$a(1 + 0{,}001.1) - l(1 - 0{,}001.1)$$
$$= a \times 0{,}001 + p(1 + 0{,}000.1);$$

d'où $l = (a - p)\dfrac{1 + 0{,}000.1}{1 - 0{,}001.1}$, soit encore la même formule que précédemment.

Enfin, comme dans les marchés à terme ferme, le gain du spéculateur ne commence qu'à partir d'un certain cours $a + \varphi$, φ résultant des frais de courtage et de timbre relatifs aux deux opérations d'achat à terme et de vente au comptant.

222. **Représentation graphique de l'achat à terme et à prime.** — Il devient facile de construire le graphique des pertes ou des gains d'un marché à prime pour une unité négociée.

Voici par exemple celui relatif aux titres de valeur supérieure à 500 fr.



La perte commencera pour $l = a \dfrac{1 + 0{,}001.1}{1 - 0{,}001.1}$, ainsi qu'on le voit en égalant à zéro le bénéfice y donné par la formule indiquée aux marchés à terme ferme.

La perte maximum $p\,(1 + 0{,}0001) + a \times 0{,}001$, sera obtenue pour le cours $l = (a - p)\,\dfrac{1 + 0{,}000.1}{1 - 0{,}001.1}$ supérieur à $(a - p)$ d'environ $1/1.000$.

Si l'on suit les usages de la Bourse en continuant à lever tant que le cours est supérieur à $(a - p)$, la perte est légèrement plus élevée, ainsi qu'on l'a vu plus haut, jusqu'à ce que le cours de liquidation arrive à la valeur du pied de prime à partir de laquelle la perte reste constante et égale à la valeur ci-dessus indiquée.

223. **Formules du résultat de la vente à terme et à prime.** — Soient v/p le cours de la vente à prime et l le cours de réponse des primes auquel le vendeur devra racheter comptant ses titres s'il opère à découvert et si les titres sont levés.

Les formules relatives à cette opération s'établiront dans chaque cas particulier comme on les a établies pour l'achat à terme et à prime.

C'est ainsi que le bénéfice pour les spéculations sur titres dont le cours est supérieur à 500 fr. sera :

$$y = v[1 - 0{,}001.1] - l[1 + 0{,}001.1],$$

mais il sera limité par la faculté laissée à l'acheteur de résilier son marché au cours indiqué précédemment :

$$l = (a - p)\frac{1 + 0{,}000.1}{1 - 0{,}001.1}.$$

Si l'acheteur lève ses titres le bénéfice maximum sera donc obtenu en remplaçant l par cette valeur en remarquant que $a = v$; on aura par suite :

$$y = v(1 - 0{,}001.1) - (v - p)\frac{1{,}001.1 \times 1{,}000.1}{1 - 0{,}001.1}$$

$$= \frac{p \times 1{,}001.1 \times 1{,}000.1 - v \times 0{,}001.1(3 - 0{,}001) - v \times 0{,}000.1}{1 - 0{,}001.1}$$

Cette valeur est toujours inférieure à p.

Si, au contraire, l'acheteur abandonne la prime, le vendeur touche :

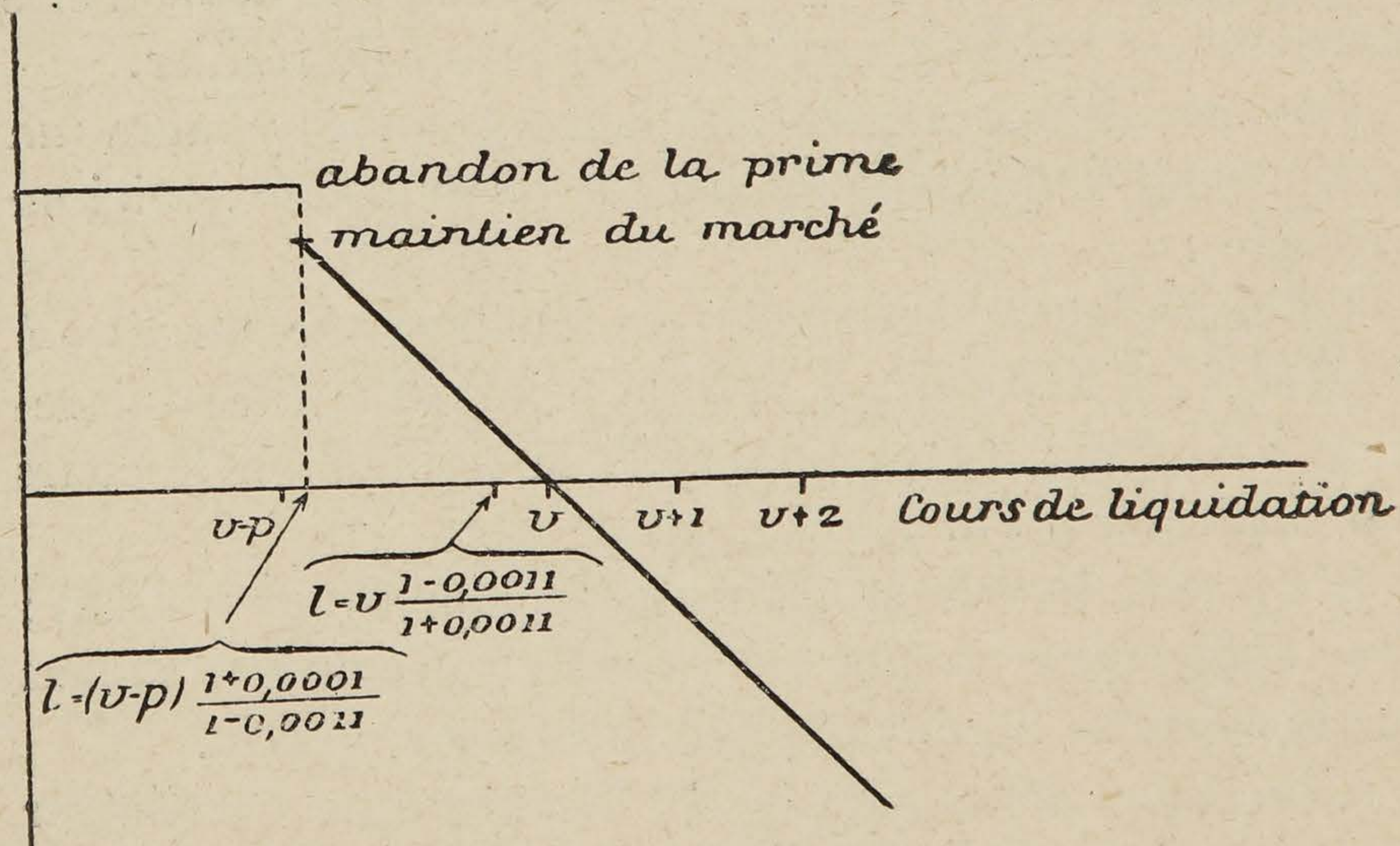
$$y' = p - v \times 0{,}001.1 - p \times 0{,}000.1.$$

Un calcul assez compliqué montrerait qu'il y a toujours avantage pour le vendeur que l'acheteur abandonne sa prime si cet acte est indifférent à ce dernier.

224. **Représentation graphique de la vente à terme et à prime.** — Le graphique de la vente à prime affecte une forme spéciale en raison de la faculté laissée à l'acheteur, pour le cours limite. Le bénéfice varie suivant la décision de l'acheteur.

Le bénéfice se changera en perte à un cours de liquidation identique à celui des opérations à terme ferme.

Le graphique ci-dessous indique le résultat pour une opération sur des titres valant plus de 500 fr.



225. **Combinaisons des marchés à terme et à prime.** — Les marchés à prime sont plus fréquents que les marchés fermes, mais on ne pratique guère en temps ordinaire que l'achat à prime, la position de vendeur de prime à découvert étant trop dangereuse malgré l'élévation du cours de vente.

Les graphiques représentant les opérations successives permettront par leur combinaison de déterminer à chaque instant la position du spéculateur d'après un cours de réponse des primes quelconque.

226. **Combinaisons diverses de l'étranger.** — En France, l'acheteur a *seul* le droit de résilier le marché ; à Londres on pratique une prime dans laquelle le vendeur a *seul* le droit de résilier ; cette combinaison s'appelle *prime pour livrer*, ou *prime indirecte*.

De plus, à Londres et surtout dans les bourses allemandes, on pratique le *stellage*, qui tend à s'introduire en France : c'est un marché qui donne le droit d'être acheteur ou vendeur à volonté, ou même de résilier.

Le spéculateur espère simplement qu'il y aura un mouvement important de hausse ou de baisse ; voici un exemple :

Le spéculateur contracte un stellage sur un titre à 80 Rm/1 ; s'il achète, il paye la prime et le titre lui revient à 81 Rm ; il faut donc qu'à la liquidation le cours soit supérieur à 81.

S'il vend, il paie la prime et ne touche que 79 Rm ; pour qu'il puisse gagner s'il a vendu à découvert, il faut que le cours de liquidation soit inférieur à 79 Rm.

Ainsi, sans tenir compte des courtages, le spéculateur perd si le cours de liquidation est entre 79 et 81.

227. **Combinaisons spéciales.** — Les spéculateurs ont donné à diverses combinaisons de comptant et de ferme ou de prime des noms particuliers, qui expriment en général la nature de la combinaison ; tels sont : achat comptant contre vente à terme ou réciproquement achat

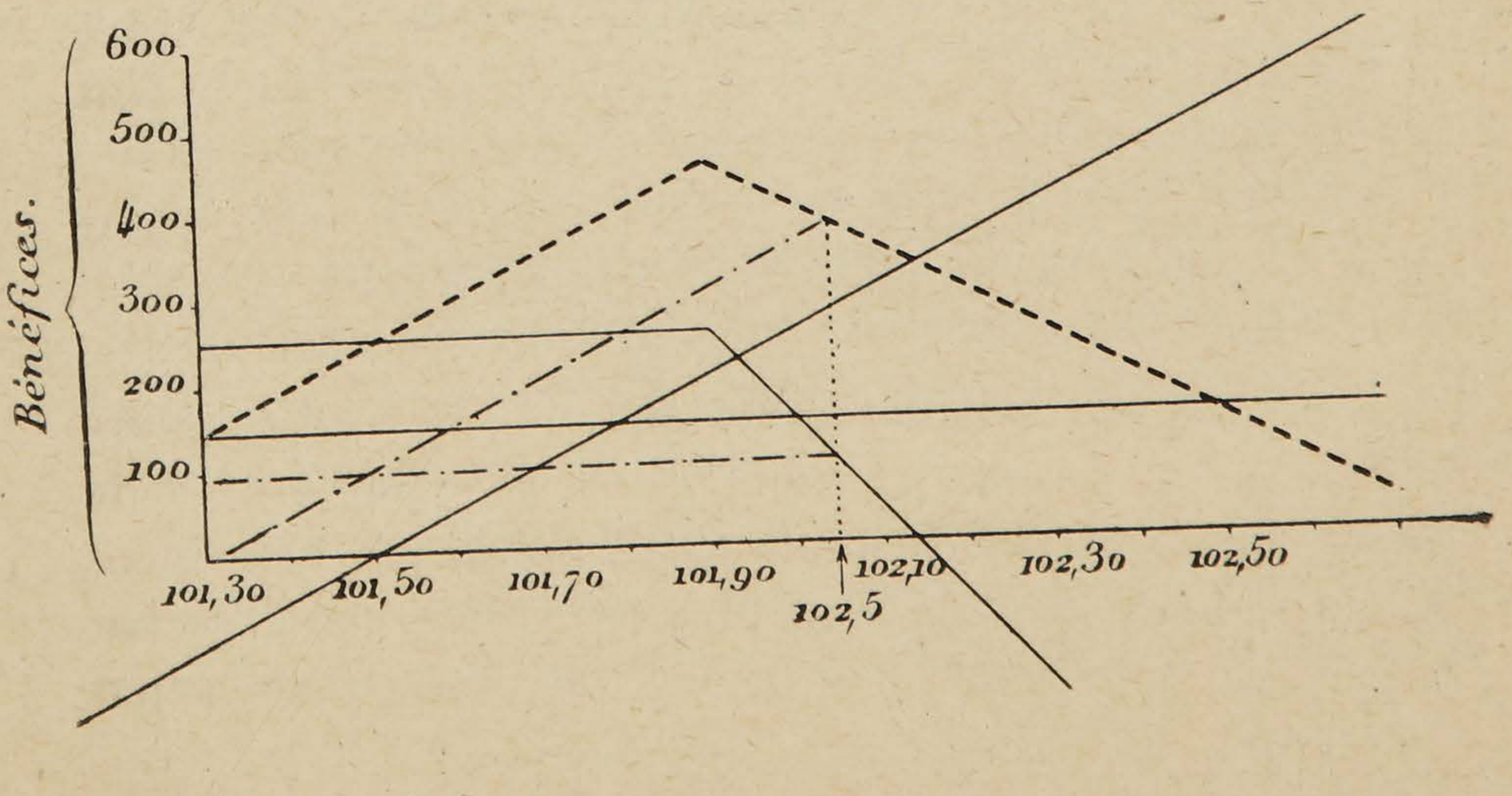
à terme contre vente à terme; achat à prime contre vente ferme; achat de la petite prime contre vente de la grosse, opération à cheval consistant en un achat à prime avec revente immédiate de moitié ferme, échelles de primes consistant en achats et ventes successives en profitant des variations de cours du marché, etc.

Il semble inutile d'exposer en détail chacune de ces opérations : la pratique est, pour chacune d'elles, un guide plus sûr que les formules qui, d'ailleurs ne peuvent servir qu'à constater des faits accomplis, bien souvent hélas, de sens contraire à celui qu'on espérait.

Exemple théorique. — *Un spéculateur achète ferme 1.500 fr. de rente 3 °/₀ au cours de* 101,50 *et vend à prime 3.000 fr. de rente 3 °/₀ à* 102,15/0,25.

Étudier cette spéculation d'après les divers cours de spéculation, sans tenir compte des frais (Institut des actuaires français, 1901).

Si le cours de la rente varie de 1 fr. le résultat varie de 500 fr. pour l'achat et de 1.000 fr. pour la vente; le graphique suivant représentera les opérations.



Le bénéfice maximum aura lieu pour le cours de liquidation de 101,90.

Si l'on veut avoir un bénéfice donné, 150 fr. par exemple, il y aura deux cours de liquidation qui permettront sa réalisation 101,30 et 102,50.

Si, au contraire, on avait désiré un bénéfice donné, 200 fr. par exemple, au cours de 101,70, il aurait fallu que la prime ne soit que de :

$$102,15 - 102,05 = 0,10,$$

On voit que le graphique résout facilement toute question proposée, mais on n'a pas tenu compte des frais de courtage et de timbre pour simplifier le tracé : pratiquement les opérations seraient un peu plus complexes.

DEUXIÈME PARTIE

OPÉRATIONS FINANCIÈRES DE HAUTE BANQUE

CHAPITRE PREMIER

GÉNÉRALITÉS

228. On désigne sous ce nom les opérations de report, d'escompte de papier de Banque, de prêts sur titres et d'émission qui sont effectuées soit par les grands banquiers ou les Banques importantes, soit par de grandes Sociétés financières, telles que les mines, les chemins de fer, etc...

Les Banques possèdent des capitaux provenant des dépôts, des comptes de chèques, etc., qu'elles peuvent employer pour des périodes relativement courtes, afin de pouvoir réaliser facilement en cas d'afflux de demandes de remboursements. Les grandes Sociétés ont généralement émis des emprunts dont elles payent l'intérêt et l'amortissement par semestres avec les produits d'exploitation : elles se trouvent donc posséder pendant plusieurs mois des disponibilités croissantes qu'elles emploient comme les grandes Banques.

En fait, la pratique de ces opérations ne diffère pas de celle des opérations précédemment exposées, mais leur importance considérable nécessite une étude plus complète, surtout en ce qui concerne les reports ; dans la première partie de ce troisième livre, on a examiné le report au point de vue du spéculateur qui se fait reporter : il y a lieu de considérer maintenant le résultat de l'opération pour le reporteur, c'est-à-dire le capitaliste.

CHAPITRE II

OPÉRATIONS DE REPORTS

229. **Mécanisme du report.** — On a vu que, lorsque les cours de liquidation n'étaient pas favorables, les spéculateurs à la hausse désirent rester acheteurs pendant une nouvelle période, c'est-à-dire jusqu'à la liquidation suivante : si l'opération d'achat ne peut être compensée par une vente, la contre-partie devant être liquidée, il devient nécessaire de trouver un tiers consentant à lever les titres à la place des spéculateurs moyennant une commission appelée « *report* ».

On a beaucoup discuté autrefois sur la nature de l'opération de report : on a soutenu que c'était un prêt sur dépôt de titres, mais la jurisprudence paraît fixée définitivement : le report est un achat comptant suivi d'une vente à terme pour le banquier reporteur. Quoi qu'il en soit, on considère maintenant que les deux contrats de l'achat et de la vente sont parfaitement définis, à tel point que le banquier reporteur jouit de tous les droits attachés aux titres reportés : il touche les coupons, profite des lots et remboursements, peut figurer aux assemblées générales, etc.

Les reports sont conclus par les agents de change, qui livrent les titres achetés ou remettent le plus souvent un récépissé endossable de la chambre syndicale des agents de change, indiquant que les titres sont bien en dépôt à cette compagnie.

Pour le capitaliste reporteur, l'opération consiste en fait en un prêt à court terme (quinze jours ou un mois suivant la nature des titres).

On a vu précédemment les courtages et l'impôt qui grèvent ces opérations.

En pratique, les capitalistes indiquent aux agents de change le taux qu'ils désirent obtenir et qu'ils fixent d'après l'état du marché et le taux des escomptes de papier qu'ils peuvent consentir.

En général, si le loyer de l'agent augmente, le taux de report augmente ; mais il n'y a pas un synchronisme absolu entre les mouvements.

Les calculs du taux réel de l'intérêt touché par le capitaliste sont faciles, mais longs, aussi a-t-on établi des barêmes ou des graphiques donnant ces taux en fonctions du cours d'achat et du report effectif.

230. **Taux de report des rentes françaises.** — Les frais de courtage sont de 0 fr. 025 par 3 fr. de rente perpétuelle ou amortissable.

L'impôt est de 0,006.25 pour 1.000 fr. ou fraction de 1.000 fr. du montant de la vente pour une opération mensuelle, et par suite, de :

$$0{,}006.25\ ^0/_{00} \times 12 = 0{,}075\ ^0/_{00},$$

pour une opération annuelle, soit : 0,007.5 $^0/_0$.

L'intérêt réel s'obtiendra donc en retranchant du bénéfice de report pour n titres, $n \times r$, le courtage $n \times 0{,}025$ et l'impôt qui est :

$$\frac{n \times (C + r) \times 0{,}006.25}{1.000}.$$

Le taux d intérêt réel rapporté au capital employé sera pour 1 an, c'est-à-dire pour 12 mois :

$$x = 12 \times \frac{n \times r - n \times 0{,}025 - n \dfrac{(C + r) \times 0{,}006.25}{1.000}}{nC}$$

$$= 12 \frac{r - 0{,}025}{C} - 12 \frac{0{,}006.25}{1.000} - \frac{r \times 0{,}006.25}{1.000\,C} \, 12.$$

Le dernier terme est de valeur négligeable, car le report r est au maximum de 0 fr. 50.

On peut donc écrire :

$$x = 12 \times \frac{r - 0{,}025}{C} - 0{,}000{,}075$$

Exemple, — *Quel est le taux d'intérêt correspondant à un report de 0 fr. 20 sur la rente à 96 fr ?*

$$x = 12 \times \frac{0{,}20 - 0{,}025}{96} - 0{,}000.075 = 0{,}021.8.$$

L'égalité précédente peut s'écrire :

$$Cx = 12r - 0{,}3 - 0{,}000.075\,C$$

ou : $$12r - (x + 0{,}000.075)\,C - 0{,}3 = 0.$$

Pour $x =$ constante, elle représente une droite facile à construire, et quand x prend diverses valeurs le faisceau de droites construites passe par le point :

$$C = 0, \; r = \frac{0{,}3}{12} = 0{,}025.$$

Le graphique représentant ces droites ne serait d'ailleurs utilisable que pour des valeurs limitées de r et de C, par exemple :

$$0{,}10 < r < 0{,}50 \quad \text{et} \quad 80 < C < 110.$$

Ce graphique a été construit pour toutes les valeurs intermédiaires et en se donnant les taux x d'intérêt au centime près ; mais il n'est pas pratique en raison de son étendue considérable résultant des nécessités de lecture.

On peut aussi concevoir des graphiques dont les coordonnées soient r et x, et x et C.

Le 1er donnerait encore des droites représentant les valeurs de C = constante.

Le 2e donnerait des hyperboles équilatères représentant les valeurs de x = constante. Mais il serait facile de le transformer par logarithmes afin de remplacer les hyperboles par des droites.

231. **Taux de report des actions de la Banque de France, du Crédit foncier et des Compagnies de Chemin de fer.** — Le courtage est de 1/12 °/₀ du prix de vente (achat + report) et l'impôt de 0,025 °/₀₀ de ce prix.

Le taux d'intérêt sera donc pour un report sur n titres :

$$x = 12\,\frac{nr - n(C + r)\,\dfrac{\frac{1}{12} + 0{,}0025}{100}}{n\,.\,C}$$

$$= 12\,\frac{nr - nC\,\dfrac{1 + 0{,}03}{1.200}}{nC} - \frac{nr\,\dfrac{1 + 0{,}03}{1.200}}{nC}.$$

On peut négliger le dernier terme et écrire :

$$x = 12\,\frac{r}{C} - \frac{1{,}03}{100}.$$

Cette formule pourrait être représentée par un graphique comme la précédente ; mais, pour que sa lecture soit facile, il faudrait que son format fût très grand ; aussi l'emploi des barèmes est-il préférable.

Exemple. — *Quel est le taux d'intérêt correspondant à un report de* 6,75 *sur une valeur cotée* 1.350 *fr.* ?

$$x = 12 \frac{6,75}{1.350} - 0,010.3 = 0,049.7.$$

232. **Taux de report des fonds d'États étrangers.** — Le courtage pour les rentes étrangères est fixé à 15 fr. sur les plus petites coupures négociables (2.500 fr. de 5 %, 2.250 fr. de 4 1/2 %, 2.000 fr. de 4 %, 1.500 de 3 %) soit en somme 0 fr. 03 par 5 fr., 4 1/2 fr., 4 fr. et 3 fr. de rente (coupure de rente).

L'impôt est de 0,025 ‰ du montant de la vente.

Le taux d'intérêt réel sera donc, en raisonnant comme pour les rentes françaises, mais en remarquant que les rentes étrangères sont soumises à 24 liquidations :

$$x = 24 \frac{n \times r - n \times 0.03 - n \dfrac{(C + r)}{1.000} \times 0,025}{nC},$$

en désignant toujours par n le nombre de coupures achetées et en négligeant comme précédemment $\dfrac{r \times 0,025}{1.000}$;

$$x = 24 \left(\frac{r - 0,03}{C} - 0,000.025\right)$$

$$= 24 \frac{r - 0,03}{C} - 0,000.6.$$

Il y aurait lieu de tenir compte de certaines particularités du change qui influencent le courtage, mais les modifications qui seraient apportées dans les résultats sont insignifiantes.

Exemple. — *Quel est le taux réel d'un report de* 5.000 *Russe* 5 % *à* 104 *fr. dont* 0 *fr.* 15 ?

$$x = 24 \times \frac{0,15 - 0,03}{104} - 0,000.6 = 2,71 \%.$$

233. **Taux de report des valeurs diverses à liquidation de quinzaine.** — Le courtage est 1/20 $^0/_0$ du prix de vente et l'impôt de 0,02.5 $^0/_{00}$. On aura donc :

$$x = 24 \frac{n \times r - \dfrac{n(C+r)}{2.000} - n\dfrac{(C+r) \times 0{,}025}{1.000}}{nC}$$

$$= 24\frac{r}{C} - \frac{24}{2.000}\frac{C+r}{C} - \frac{(C+r)}{C}\frac{0{,}025}{1.000} \times 24.$$

En négligeant encore $\dfrac{r}{C}\left(\dfrac{1}{2.000} + \dfrac{0{,}025}{1.000}\right)$, on aura :

$$x = 24\frac{r}{C} - 0{,}012.6.$$

Exemple. — *Quel est le taux d'intérêt rapporté par une opération de report effectuée à* 3.000 *fr. et un report de* 4 *fr.* 25 ?

$$x = 24\frac{4{,}25}{3.000} - 0{,}012.6 = 0{,}021.4$$

Voici à titre d'exemple la disposition matérielle des bordereaux d'une opération de report au 30 avril 1907 de :

4.000 consolidés anglais à 86,75 report 0,175,
17.280 extérieure à 94,15 » 0,19.

Il y a lieu de remarquer que les consolidés anglais se calculent au change fixe de 25,20.

Le bordereau d'achat sera représenté comme suit (voir p 377) :

Les valeurs précédentes étant soumises à la double liquidation le 15 mai, l'agent recevra les titres et remettra pour

DOIT — X..., S/ compte de liquidation au 30 avril 1907, chez Z... — AVOIR

DATES	ANGLAIS	EXTÉRIEURE		PRIX UNITAIRE	CAPITAL	COURTAGE	IMPÔT	DATES				PRIX UNITAIRE	CAPITAL	COURTAGE	IMPÔT
Av/30	4 000			86,75	87.444 »										
		17 280		94,15	406.728 »										
					494.172 »	à payer par le capitaliste.									

le compte de son client les sommes résultant du bordereau ci-après :

Le résultat de l'opération est un bénéfice de :

$$494.991,80 - 494.172 = 819,80 \text{ pour } 15 \text{ jours.}$$

soit : $$\frac{819,80 \times 24}{494.172} = 3,98\ \%\ \text{l'an}$$

Remarque. — Les formules données ci-dessus pour le calcul du taux de report ne sont valables que pour le reporteur dont le capital est placé en reports pendant une année. Le reporteur occasionnel ne touche pas un taux aussi élevé. En effet, entre la date de payement d'une liquidation et celle de l'encaissement à la liquidation suivante il peut s'écouler un temps plus ou moins considérable, alors que les formules supposent ce temps invariable et égal à 1/24 d'une année soit 15 jours en moyenne. Il s'écoule toujours au moins 16 jours entre les dates ci-dessus et quelquefois même à la liquidation du 15 octobre par exemple si la Toussaint tombe un samedi, on peut compter 19 jours et même 20 jours.

Le taux d'intérêt calculé pour 15 jours doit donc être réduit de 1/16 au moins et cette réduction peut être portée à 1/4 du taux calculé si la période compte 20 jours.

DOIT X..., S/ compte de liquidation au 15 mai 1907, chez Z... AVOIR

DATES				PRIX UNITAIRE	CAPITAL	COURTAGE	IMPÔT	DATES	ANGLAIS	EXTÉRIEURE		PRIX UNITAIRE	CAPITAL	COURTAGE	IMPÔT
								Av/30	4 000			86,925	87.620 40	30 »	2 20
										17 280		94,34	407.548 80	135 »	10 20
	Courtages et impôts.				177 40										
	Solde créditeur. . . .				494 991 80										
					495 169 20								495.169 20		

CHAPITRE III

OPÉRATIONS D'ESCOMPTE ET DE PRÊTS SUR TITRES

234. **Esccmpte de papier.** — Les escomptes de papier effectués par les grands capitalistes, pour employer temporairement leurs disponibilités ne diffèrent pas des escomptes ordinaires, et les calculs sont identiques à ceux indiqués dans la première partie (voir n° 27 p. 44).

En général le papier escompté est du papier dit de banque et non du papier de commerce réel, c'est-à-dire représentant une opération ayant pour effet une vente de marchandise.

Le papier de Banque est représenté par des lettres de change tirées sur un banquier à l'ordre d'un tiers ou à l'ordre du *tireur* lui-même, afin de créer à ce tireur soit des disponibilités immédiates de numéraire, soit un crédit dans une autre Banque.

Ce papier est en général à 90 jours de date au plus et porte deux à trois signatures d'endosseurs, afin d'étendre la responsabilité.

Les affaires y relatives sont traitées par des courtiers de change qui laissent au capitaliste une fiche indiquant :

Le nom du banquier qui remet à l'escompte :

L'importance de l'opération ;

Le taux d'escompte ;

Le jour du payement.

A cette date, on remet les effets inscrits sur un aval (papier libre) détaillant les effets par échéance, le nombre de jours à courir et les intérêts comme le montre l'exemple ci-après :

BANQUE DE L'UNION PARISIENNE — *Aval.* — Courtier, M. X...

50 000	»	Effets n°	25 août	60	30 000
50 000	»	d°	26 »	61	30 500
80 000	»	d°	30 »	65	
15 000	»	d°	30 »	65	94 250
24 000	»	d°	30 »	65	
26 000	»	d°	30 »	65	
45 000	»	d°	1er septembre	67	
55 000	»	d°	1er »	67	100 500
50 000	»	d°	1er »	67	
8 000	»	d°	3 »	69	5 520
100 000	»	d°	5 »	71	71 000
					331 770
503 000	»				
		2 995,15	Escompte à 3 1/4 %, taux convenu.		
		244,50	5 jours à 3 1/2, taux de la Banque de France.		
3 239	65		A recevoir chez A..., le ..		
			Signé :		
499 760	35				

Les banquiers se réservent toujours, lorsque le taux d'escompte est inférieur au taux de la Banque de France, 5 jours d'intérêts à ce dernier taux, afin de pouvoir donner leurs effets à cet établissement pour l'encaissement.

Le taux d'escompte est différent suivant le nom des acceptants : les signatures des grands banquiers (ce que l'on appelle le beau papier) bénéficient d'une différence de 1/8 % sur le papier de nos grands établissements de crédit, et même de 1/4 % sur le papier de second ordre.

235. **Opérations de prêts sur titres.** — Les banquiers ou les particuliers détenteurs de titres ayant besoin de numéraire ou voulant faire une spéculation à la hausse s'adressent à des capitalistes qui prennent en dépôt (en pension) leurs titres en consentant une avance sur leur valeur.

La quotité du prêt dépend naturellement de la sécurité attachée aux titres résultant de la situation de l'établissement qui les a émis : elle est généralement fixée d'après le cours moyen de la Bourse entre 60 et 90 % de ce cours.

Ces opérations font l'objet de contrats spéciaux différents suivant qu'il s'agit de petites opérations ou de véritables opérations de Banque : dans ce dernier cas le contrat de prêt porte le nom d'*aval* sans aucune raison, car il n'y a pas d'avalisation dans le sens propre de ce mot ; il est établi sur papier timbré à 0,60 et indique :

Le détail des titres (ou des effets) pris en pension ;

Le montant de la somme avancée en tenant compte de la marge convenue ;

L'engagement par le déposant de combler de suite toute différence qui résulterait d'une baisse faisant descendre le gage au-dessous du prêt ;

L'échéance du dépôt ;

Le décompte des intérêts ;

L'engagement de rembourser à une époque fixée ;

L'exonération de toutes charges et impôts pour le prêteur.

Enfin, l'indication du droit de vendre les titres déposés en gage, en cas de non remboursement à l'échéance.

Voici un exemple d'aval

Remis a X...

à titre de gage et nantissement, conformément aux articles 91 et suivants du Code de Commerce, les titres ci-après désignés contre son avance de.

moins intérêts à 6 °/₀ de ce jour au . . .

prochain (*jours*) . . . . ___________

Net . . . .

Désignation des Titres

. . . .

. . . .

. . . .

(Voir au verso le détail numérique)

Reçu de X... la somme de

. . . .

. . . .

(Signature)

Timbre quittance annulé

Les titres donnés en garantie sont pris à raison de 90 °/₀ de leur valeur et, pendant toute la durée de l'opération, une marge de 10 °/₀ sera maintenue entre la valeur de ces titres et la somme avancée, et nous fournirons, le cas échéant, le complément de titres nécessaire pour assurer cette marge, dans les trois jours de l'avis qui nous sera donné à cet effet par X..., par lettre recommandée ; à défaut de quoi, la créance deviendra immédiatement exigible et X... pourra faire valoir ses droits.

Nous nous engageons à rembourser à X... la somme de. . . . . le . . . . et à reprendre les titres. L'opération est faite nette de toutes charges et d'impôts pour X....

A défaut de remboursement à l'échéance la somme de. . . . . . . deviendra productive d'intérêts jusqu'à parfait règlement, sans mise en demeure, au taux légal, et X... aura le droit de réaliser son gage huit jours après une simple sommation demeurée sans effet, conformément à l'article 93 du Code de Commerce, tous frais d'exécution restant à notre charge.

A. . . . . . ., le. . . . 19. .

Au verso du présent aval doit figurer le détail numérique des titres mis en dépôt.

Le prêt sur titres permet *théoriquement* de jouer à la hausse en mettant à la disposition du spéculateur une somme très importante.

Soit C le cours des titres possédés, n le nombre de titres et x la somme avancée pour 1 fr. de capital.

L'emprunteur recevra $n \cdot C \cdot x$ et pourra acheter nx titres (en négligeant les frais et en supposant le cours fixe).

Il pourra emprunter à nouveau sur ces nx titres :

$$nx\,C \times x = nCx^2$$

qui lui permettront d'acheter nx^2 titres, etc.

En continuant l'opération jusqu'à la limite, le spéculateur se trouverait posséder et avoir mis en gage :

$$n + nx + nx^2 + \ldots + nx^p + \ldots \text{ titres,}$$

soit $\frac{n}{1 - x}$, puisque $x < 1$ et, en supposant p très grand.

Si, à ce moment, les cours ont monté à C′ le bénéfice sera $\frac{nC'}{1 - x} - \frac{nC}{1 - x}$ (somme empruntée) $- f$ (frais).

En supposant par exemple $x = 0{,}6$ le nombre de titres achetés serait : $\frac{n}{1 - 0{,}6} = \frac{n}{0{,}4} = n \times 2{,}5.$

Le bénéfice qui n'aurait été que $n\,(C' - C)$ est donc passé à :

$$2{,}5\,n\,(C' - C) - f.$$

Il est naturellement d'autant plus élevé que x est plus fort.

En cas de baisse la perte croît rapidement et peut absorber le capital engagé.

En négligeant les frais, il suffirait dans l'exemple précédent que $\frac{n(C - C')}{1 - x} = nC$ pour que le spéculateur soit ruiné entièrement ; on tire de cette égalité :

$$C' = Cx.$$

Si la baisse fait tomber les titres jusqu'à la somme prêtée par titre la perte est totale.

CHAPITRE IV

OPÉRATIONS D'ÉMISSION

236. Les grandes Banques lancent les émissions : soit en achetant ferme à l'emprunteur et en écoulant les titres par *petits paquets* sur le marché ; soit en formant un syndicat de garantie des principales Banques s'engageant à émettre pour le compte de l'emprunteur en un temps déterminé ; soit enfin, ce qui est plus rare, en émettant aux risques et périls de l'emprunteur.

En général, les emprunts sont gagés par des payements périodiques déterminés au contrat d'après le capital à remettre à l'emprunteur.

Le bénéfice des Banques résulte de la différence qui existe entre le taux d'intérêt payé par l'emprunteur et le taux réel d'emprunt de la banque payé au souscripteur des titres.

Les modalités sont très différentes selon la nature des emprunts : les Banques prennent par exemples les titres à x % du capital nominal et les émettent à y % de ce capital, y étant supérieur à x ; ces conditions sont spécifiées dans le premier des exemples suivants ; dans d'autres cas, on donne des conditions qui paraissent plus précises, mais qui, en réalité, se ramènent aux conditions générales précédentes (voir second exemple).

Il n'y a d'ailleurs pas lieu d'insister sur ces opérations qui se traitent avec une grande facilité au point de vue mathématique, mais qui ne laissent pas que d'être fort complexes lorsqu'il s'agit de les établir à l'origine sur des données imprécises et de très vagues pourparlers.

1er Exemple. — *Une banque prend à 90 % du capital nominal un emprunt destiné à :*

1° *fournir 22.500 000 à un gouvernement ;*

2° *former un fonds de réserve égal à une semestrialité de l'émission :*

3° *à payer un droit de timbre de 2 % du capital nominal.*

L'emprunt est supposé remboursable en 100 semestres à 6 % l'an.

Établir les conditions mathématiques, puis les conditions effectives de l'emprunt et calculer :

Le capital nominal et sa répartition.

La semestrialité d'intérêt et d'amortissement.

Le taux réel d'emprunt du gouvernement.

Le bénéfice de la Banque qui est supposée émettre l'emprunt à 95 %.

Le taux réel d'emprunt du souscripteur.

Soit x le capital nominal de l'emprunt qui sera remboursable par 100 semestrialités de :

$$x \times \frac{0{,}03 \times \overline{1{,}03}^{100}}{\overline{1{,}03}^{100} - 1} = 0{,}031.646{,}67x.$$

On aura l'égalité :

$$0{,}9x = 22.500.000 + x \times 0{,}031.646.67 + 0{,}02x,$$

qui exprime que, le gouvernement reconnaissant une dette x, les 9/10 de cette somme serviront à lui donner 22.500.000, à mettre en réserve une semestrialité et à payer le timbre.

On en déduit :

$$x = \frac{22\ 500.000}{0{,}848.353.33} = 26.521.968.$$

Telles sont les conditions mathématiques de l'emprunt ; mais, pratiquement, on ne peut émettre une pareille somme et la Banque proposera un emprunt de 26.600.000 ou même de 27.000.000 : elle modifiera simplement un peu la donnée relative au fonds de réserve, et, en admettant par exemple 26.600.000, ce capital se répartira comme suit :

Versement au gouvernement	22.500.000
Timbre 2 %	532.000
Marge de 10 % admise par le gouvernement .	2.660.000
Réserve de Banque	908.000
	26.600.000

La semestrialité réelle à payer par le gouvernement sera :

$$0{,}031.646.67 \times 26.600.000 = 841.801 \text{ fr.}$$

Le taux réel d'emprunt pour le gouvernement sera un peu différent suivant que l'emprunt sera ou non émis dans le pays et que, par suite, il bénificiera ou non du timbre.

En admettant ce dernier cas, il payera 841.801 fr. pour recevoir 23.032.000 fr. (22.500.000 + 532.000), soit un taux de semestrialité de $\frac{841.801}{23.032.000} = 0{,}036.549$ par franc de capital reçu correspondant à un taux d'intérêt de 3.542 % par semestre ou de 7,209 % par an.

On admet que la réserve de Banque, sera gérée par elle et fera face aux aléas, retard de payement, diminution de taux, etc.

Le souscripteur payant 95 % du nominal donnera :

$$26.600.000 \times 0{,}95 = 25.270.000 \text{ fr.}$$

Recevant 841.801 fr. par semestre, la semestrialité par franc de capital sera $\frac{841.801}{25.270.000} = 0{,}033.312$ correspondant à un taux d'intérêt de 3,187 % par semestre ou de 6,476 % par an.

Le bénéfice de la Banque est de 1.330.000, sans compter la réserve, mais il y a lieu de déduire de cette somme, des commissions payées à divers titres pour arriver à conclure et à enlever l'affaire.

2e EXEMPLE. — *Une commune emprunte à une société financière une somme de 300.000 fr. remboursable en 80 semestres au moyen d'annuités calculées à 4,04 % l'an.*

Pour se procurer les fonds nécessaires, la Société émet des obligations 500 fr. 3 %, avec intérêts et remboursements semestriels, au prix de 462 fr. l'une.

Les frais de l'opération s'élèvent à 7.500 fr. et 8 fr. par titre.

On demande quel est le bénéfice réalisé par la Société dans les deux cas suivants :

Soit un bénéfice unique réalisé dès le début de l'opération sur le capital encaissé ;

Soit un bénéfice semestriel sur les sommes reçues et payées.

Le taux annuel de 4,04 % correspond à 2 % par semestre ; la semestrialité à payer par la commune sera donc :

$$\frac{300.000 \times 0{,}02 \times \overline{1{,}02}^{80}}{\overline{1{,}02}^{80} - 1} = 300.000 \times 0{,}025.160.71$$

$$= 757 \text{ fr. } 21.$$

I. — Si la Société veut faire un bénéfice immédiat, elle émettra un nombre d'obligations tel que les semestrialités à recevoir de la commune lui permettent le payement des charges en intérêts et amortissement de ces titres.

Or une obligation 500 fr. 3 %, à coupons et amortissement semestriels, calculés par suite à 1,50 % par semestre, coûte pour cette période :

$$\frac{500 \times 0{,}015 \times \overline{1{,}015}^{80}}{\overline{1{,}015}^{80} - 1} = 500 \times 0{,}021.548.32 = 10{,}774.16.$$

La Société pourra donc émettre :

$$\frac{7.548{,}21}{10{,}774.16} = 700 \text{ titres sans forcer.}$$

L'émission lui permettra de réaliser, en tenant compte des frais :

$$700\ (462 - 8) - 7.500 = 700 \times 454 - 7.500$$

$$= 317.800 - 7.500 = 310.300 \text{ fr.}$$

Son bénéfice immédiat sera par suite :

$$310.300 - 300.000 = 10.300 \text{ fr.}$$

et elle bénéficiera théoriquement de

$$7.548,21 - 10,774.16 \times 700 = 6 \text{ fr. } 30 \text{ par semestre.}$$

II. — Si la Société préfère réaliser un bénéfice semestriel, elle s'arrangera de manière à émettre un nombre x de titres tel que leur négociation à 462 fr. permette d'obtenir :

$$300.000 + 7.500 + 8x.$$

On aura donc :

$$462x = 307.500 + 8x$$

$$454x = 307.500$$

$$x = \frac{307.500}{454} = 678 \text{ titres } \textit{en forçant.}$$

Ces titres nécessiteront un payement semestriel égal à :

$$678 \times 10,774.16 = 7.304,88$$

et la Société réalisera semestriellement un bénéfice de :

$$7.548,21 - 7.304,88 = 243 \text{ fr. } 33.$$

De plus, comme elle touchera :

$$678 \times 462 = 313.236 \text{ fr.}$$

et qu'elle décaissera :

$$300.000 + 7.500 + 678 \times 8 = 312.924 \text{ fr.}$$

elle réalisera, à l'origine, un petit bénéfice de :

$$313.236 - 312.924 = 312 \text{ fr.}$$

Il n'est pas tout à fait indifférent pour la Société d'employer l'un ou l'autre mode d'émission, car les frais fixes (7.500 fr.) grèvent plus ou moins chaque titre : ainsi, dans le second cas, les frais étant plus élevés par titre, le bénéfice effectif de la Société est un peu moins fort que dans le premier cas.

Si la Société fait un bénéfice immédiat, elle encaisse net 310.300 fr. et paye semestriellement 7.541 fr. 91, d'où il en résulte un taux de semestrialité de $\frac{7.541,91}{310.300} = 0,024.305$ auquel correspond un taux d'intérêt semestriel de 1,885 %.

A ce taux, la valeur actuelle du petit bénéfice semestriel de 6,30 vaut :

$$6,30 \times \frac{310.300}{7.541,91} = 259,20.$$

Le bénfice effectif est donc :

$$10.300 + 259,20 = 10.559,20$$

Dans l'hypothèse d'une réalisation semestrielle des bénéfices, la Société paye 7.304 fr. 88 pour 300.312 fr. touchés effectivement, soit un taux de semestrialité de :

$$\frac{7.304,88}{300.312} = 0,024.324.3.$$

auquel correspond un taux d'intérêt semestriel de 1,887 % plus élevé que dans le premier cas.

Si l'on escompte à ce taux le bénéfice semestriel de 243,33 on obtient :

$$243,33 \times \frac{300.312}{7.304.88} = 10.003 \text{ fr. } 58,$$

et la valeur actuelle du bénéfice de la Socité n'est que de :

$$10.003,58 + 312 = 10.315,58,$$

un peu inférieure à celle résultant de la première combinaison.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

Bulletin des Actuaires (Congrès internationaux). Dulac, Paris.
Annuaire du Bureau des longitudes. Gauthier-Villars, Paris.
Bulletin de l'Institut des Actuaires belges. Bruylant, Bruxelles.
Bulletin de l'Institut des Actuaires. Gauthier-Villars, Paris.
Congrès des Actuaires (comptes rendus). Dulac, Paris.
Bulletin de l'Institut des Actuaires. Dulac, Paris.
Journal des Actuaires français (articles divers). Gauthier-Villars, Paris.
Rivista di Assicurationi i Banche (articles divers). Lugano (Italie).
Tables de logarithmes du Service géographique de l'Armée. Imprimerie nationale, Paris.
Text-Book de l'Institut des Actuaires anglais. Gauthier-Villars, Paris.
Achard. *Journal des Actuaires français*. Gauthier-Villars, Paris.
Arnaudeau. *Calcul des valeurs intrinsèques des obligations. Tables des intérêts composés (annuités et amortissements)*, 1906. Gauthier-Villars, Paris.
Ayné. Nouvelles applications des méthodes graphiques à l'étude des opérations financières. *Revue générale des Sciences*, 15 avril 1904. A. Colin, Paris.
Barré. *Comptabilité financière*. Masson, Paris.
Barriol. *Tables diverses. Banque et Commerce* (articles divers). Cours d'opérations financières professé à l'Institut des Finances et des Assurances et au Collège libre des sciences sociales (autographies distribuées aux auditeurs des cours du Collège libre des sciences sociales).
Beltjens. *Encyclopédie du Droit commercial belge*. Bruylant, Bruxelles.
Borel (Emile). Considérations statistiques sur le taux de l'intérêt. *Journal de la Société de statistique de Paris*, 1913.

Brasilier. *Théorie mathématique des opérations financières à long terme. Traité d'arithmétique commerciale.* Masson, Paris.

Brisse. *Bulletin de l'Institut des Actuaires français.* Dulac, Paris.

Buchère. *Traité des valeurs mobilières. Traité théorique et pratique des opérations de Bourse.* Gauthier-Villars, Paris.

Catalan. *Journal des Actuaires français.* Gauthier-Villars, Paris.

Charlon. *Théorie mathématique des opérations financières. Théorie élémentaire des opérations financières.* Gauthier-Villars, Paris.

Chevrot. *Pour devenir financier.* Gauthier-Villars, Paris.

Chollet. *Remboursement des emprunts à long terme.* Dulac, Paris.

Claudio-Jannet. *Le Capital, la Spéculation et la Finance au XIX^e siècle.* Colin, Paris.

Courcelle-Seneuil. *Traité des opérations de banque.* Alcan, Paris.

Courtois et Vidal. *Traité des opérations de banque et de change.* Garnier frères, Paris.

Crépon. *De la négociation des effets publics et autres.* Gauthier-Villars, Paris.

Cugnin. *Théorie et pratique de l'intérêt et de l'amortissement.* Guillaumin, Paris.

Elu. *Manuel pratique de la Bourse.* Flammarion, Paris

Enrico de Montel. *Bulletin de l'Institut des Actuaires français.* Dulac, Paris.

Faure *Eléments de commerce et de comptabilité.* Masson, Paris.

Foville (de). *La Monnaie.* Lecoffre, Paris.

François. *Encyclopédie du commerce, de l'industrie et de la finance* (articles divers). Gilis, Bruxelles.

Gaillard. Articles publiés dans le *Bulletin de l'Institut des Actuaires français.* Dulac, Paris.

Gilis. *Revue de comptabilité et de finances pures. Encyclopédie du commerce, de l'industrie et de la finance.* Gilis, Bruxelles.

Haupt (O.). *Arbitrages et parités.* J. Lecuir et C^ie, Paris.

Helfenbein (Edouard). Notes manuscrites.

Janson-Durville. *Cours de mathématiques appliquées aux opérations financières.* Berger-Levrault, Paris.

Kakosky (Charles). Cours manuscrit de l'Institut des Finances et des Assurances. Mairie Drouot, Paris.

Klompers. *Cours théorique et pratique d'algèbre financière.* Van Ishoven, Anvers.

Krauss Tassius. *Formules et tables pour le calcul des intérêts composés, annuités et amortissements.* Guillaumin, Paris.

Lacaille. *Tables synoptiques de calculs d'intérêts composés, d'annuités et d'amortissements.* Gauthier-Villars, Paris.

Laurent. *Théorie des opérations financières.* Gauthier-Villars, Paris.

Lefèvre (H). *Le Commerce théorique et pratique.* Gauthier-Villars, Paris.

Lefèvre. *Journal des Actuaires français.* Gauthier-Villars, Paris.

Leroy-Beaulieu. *Traité de la science des finances. L'art de gérer sa fortune.* Guillaumin et Alcan, Paris.

Lyon-Caen et Renault. *Traité de Droit commercial.* Alcan, Paris.

Maingie (Louis). *Théorie de l'intérêt et ses applications.* Castaignes, Bruxelles, 1911.

Marchal. *Banque et Commerce* (articles divers). Marchal, Le Havre.

Marie. *Traité mathématique et pratique d'opérations financières.* Gauthier-Villars, Paris.

Marinitsch. *La Bourse théorique et pratique.* Ollendorf, Paris.

Matray. *Encyclopédie du commerce, de l'industrie et de la finance.* Gilis, Bruxelles.

Moser. Cours professé à Berne (autographies distribuées aux auditeurs).

Muraï. *Tables d'intérêts composés.* Dulac, Paris.

Neymarck. *Le Rentier* (articles divers). Guillaumin, Paris.

Ocagne (d'). *Traité de nomographie.* Gauthier-Villars, Paris.

Pagès. *Encyclopédie du commerce, de l'industrie et de la finance* (articles divers). Gilis, Bruxelles.

Paton. *Petit traité mathématique et pratique des opérations financières.* Nony, Paris.

Pereire. *Tables de l'intérêt composé, des annuités et de l'amortissement.* Gauthier-Villars, Paris.

Pochet. *Journal des Actuaires français.* Gauthier-Villars, Paris.

Poterin du Motel. *Théorie des assurances sur la vie.* Gauthier-Villars, Paris.

Poussin. *Théorie des assurances sur la vie.* Dulac, Paris.

Proud'hon. *Manuel du spéculateur à la Bourse.* Gauthier-Villars, Paris.

Regnault. *Calcul des chances et philosophie de la Bourse.* Gauthier-Villars, Paris.

Robert Milles. *Grammaire de la Bourse.* Sévin et Rey, Paris.

ROCCA. Note sur l'évaluation de l'actif des institutions de prévoyance. *Bulletin de la Commission internationale des Chemins de fer*, novembre 1896. Weissenbruck, Bruxelles.

ROUGET. *Théorie des emprunts remboursables en annuités*. Gauthier-Villars, Paris.

SAY. *De l'intervention du Trésor à la Bourse depuis cent ans*. Guillaumin, Paris.

SAYOUS. *Les Bourses allemandes de valeurs et de commerce*, Rousseau, Paris.

THOMAN (F.). *Théorie des intérêts composés et des annuités. Tables de logarithmes à 27 décimales pour les calculs de précision*. Gauthier-Villars, Paris.

THOYER. *Les calculs d'intérêts réduits à l'addition*. Gauthier-Villars, Paris.

TRIGNART. *Tables auxiliaires d'intérêts composés*. Gauthier-Villars, Paris.

VINTÉJOUX. *Nouvelles tables d'intérêts composés*. Hermann, Paris.

VIOLEINE. *Guide du rentier et du spéculateur. Nouvelles tables pour les calculs d'intérêts composés, d'annuités et d'amortissements*. Gauthier-Villars, Paris.

TABLE ALPHABÉTIQUE
DES AUTEURS ET DES MATIÈRES

(Les chiffres indiquent les numéros des paragraphes.)

TABLE SYSTÉMATIQUE DES MATIÈRES

CHAPITRE II

Comptes courants et d'intérêts à courte période.

CHAPITRE III

Escompte.

CHAPITRE IV

Remboursement d'un emprunt par annuité à intérêts simples.

DEUXIÈME PARTIE

Change.

CHAPITRE PREMIER

Généralités.

CHAPITRE II

Change des monnaies et lingots.

CHAPITRE III

Change du papier.

LIVRE II

Opérations financières à long terme.

PREMIÈRE PARTIE

Opérations relatives à un capital indivis.

CHAPITRE PREMIER

Prêt à intérêts composés.

CHAPITRE II

Escompte à intérêts composés.

CHAPITRE III

Compte courant à intérêts composés.

CHAPITRE IV

Calculs relatifs aux annuités.

CHAPITRE V

Amortissement par annuités constantes.

CHAPITRE VI

Amortissement par annuités variables.

DEUXIÈME PARTIE

Opérations relatives à un capital divisé en coupures.

CHAPITRE PREMIER

Emission de titres remboursables par tirages au sort.

CHAPITRE II

Usufruit et nue propriété des titres.

CHAPITRE III

Etude des divers types d'obligations.

CHAPITRE IV

Influence des taxes sur le prix des valeurs.

TROISIÈME PARTIE

Comptabilité des opérations financières à long terme.

CHAPITRE PREMIER

Comptabilité des prêts hypothécaires.

CHAPITRE II

Comptabilité des emprunts par obligations.

LIVRE III

Opérations financières de bourse et de haute banque.

PREMIÈRE PARTIE

Opérations financières de Bourse.

CHAPITRE PREMIER

Généralités.

CHAPITRE II

Marchés fermes.

CHAPITRE II

Opérations de report.

CHAPITRE III

Opérations d'escompte et de prêt sur titres.

CHAPITRE IV

Opérations d'émission.

ENCYCLOPÉDIE SCIENTIFIQUE

Publiée sous la direction du Dr TOULOUSE,

Nous avons entrepris la publication, sous la direction générale de son fondateur, le Dr Toulouse, Directeur à l'École des Hautes-Études, d'une ENCYCLOPÉDIE SCIENTIFIQUE de langue française dont on mesurera l'importance à ce fait qu'elle est divisée en 40 sections ou Bibliothèques et qu'elle comprendra environ 1 000 volumes. Elle se propose de rivaliser avec les plus grandes encyclopédies étrangères et même de les dépasser, tout à la fois par le caractère nettement scientifique et la clarté de ses exposés, par l'ordre logique de ses divisions et par son unité, enfin par ses vastes dimensions et sa forme pratique.

I

PLAN GÉNÉRAL DE L'ENCYCLOPÉDIE

Mode de publication. — L'*Encyclopédie* se composera de monographies scientifiques, classées méthodiquement et formant dans leur enchaînement un exposé de toute la science. Organisée sur un plan systématique, cette Encyclopédie, tout en évitant les inconvénients des Traités, — massifs, d'un prix global élevé, difficiles à consulter, — et les inconvénients des Dictionnaires, — où les articles scindés irrationnellement, simples chapitres alphabétiques, sont toujours nécessairement incomplets, — réunira les avantages des uns et des autres.

Du Traité, l'*Encyclopédie* gardera la supériorité que possède un ensemble complet, bien divisé et fournissant sur chaque science tous les enseignements et tous les renseignements qu'on en réclame. Du Dictionnaire, l'*Encyclopédie* gardera les facilités de recherches par le moyen d'une table générale, l'*Index* de l'*Encyclopédie*, qui paraîtra dès la publication d'un certain nombre de volumes et sera réimprimé périodiquement. L'*Index* renverra le lecteur aux différents volumes et aux pages où se trouvent traités les divers points d'une question.

Les éditions successives de chaque volume permettront de suivre toujours de près les progrès de la science. Et c'est par là que s'affirme la supériorité de ce mode de publication sur tout autre. Alors que, sous sa masse compacte, un traité, un dictionnaire ne peut être réédité et renouvelé que dans sa totalité et qu'à d'assez longs intervalles, inconvénients graves qu'atténuent mal des suppléments et des appendices, l'*Encyclopédie scientifique*, au contraire, pourra toujours rajeunir les parties qui ne seraient plus au courant des derniers travaux importants. Il est évident, par exemple, que si des livres d'algèbre ou d'acoustique physique peuvent garder leur valeur pendant de nombreuses années, les ouvrages exposant les sciences en formation, comme la chimie physique, la psychologie ou les technologies industrielles, doivent nécessairement être remaniés des intervalles plus courts.

Le lecteur appréciera la souplesse de publication de cette *Encyclopédie*, toujours vivante, qui s'élargira au fur et à mesure des besoins dans le large cadre tracé dès le début, mais qui constituera toujours, dans son ensemble, un traité complet de la Science, dans chacune de ses sections un traité complet d'une science, et dans chacun de ses livres une monographie complète. Il pourra ainsi n'acheter que telle ou telle section de l'*Encyclopédie*, sûr de n'avoir pas des parties dépareillées d'un tout.

L'*Encyclopédie* demandera plusieurs années pour être achevée ; car pour avoir des expositions bien faites, elle a pris ses collaborateurs plutôt parmi les savants que parmi les professionnels de la rédaction scientifique que l'on retrouve généralement dans les œuvres similaires. Or les savants écrivent peu et lentement : et il est préférable de laisser temporairement sans attribution certains ouvrages plutôt que de les confier à des auteurs insuffisants. Mais cette lenteur et ces vides ne présenteront pas d'inconvénients, puisque chaque livre est une œuvre indépendante et que tous les volumes publiés sont à tout moment réunis par l'*Index* de l'*Encyclopédie*. On peut donc encore considérer l'Encyclopédie comme une librairie, où les livres soigneusement choisis, au lieu de représenter le hasard d'une production individuelle, obéiraient à un plan arrêté d'avance, de manière qu'il n'y ait ni lacune dans les parties ingrates, ni double emploi dans les parties très cultivées.

Caractère scientifique des ouvrages. — Actuellement, les livres de science se divisent en deux classes bien distinctes : les livres destinés aux savants spécialisés, le plus souvent incompréhensibles pour tous les autres, faute de rappeler au début des chapitres les connaissances nécessaires, et surtout faute de définir les nombreux termes techniques incessamment forgés, ces derniers rendant un mémoire d'une science particulière inintelligible à un savant qui en a abandonné l'étude durant quelques années ; et ensuite les livres écrits pour le grand public, qui sont sans profit pour des savants et même pour des personnes d'une certaine culture intellectuelle.

L'*Encyclopédie scientifique* a l'ambition de s'adresser au public le plus large. Le savant spécialisé est assuré de rencontrer dans les volumes de sa partie une mise au point très exacte de l'état actuel des questions ; car chaque Bibliothèque, par ses techniques et ses monographies, est d'abord faite avec le plus grand soin pour servir d'instrument d'études et de recherches à ceux qui cultivent la science particulière qu'elle présente, et sa devise pourrait être : *Par les savants, pour les savants*. Quelques-uns de ces livres seront même, par leur caractère didactique, destinés à servir aux études de l'enseignement secondaire ou supérieur. Mais, d'autre part, le lecteur non spécialisé est certain de trouver, toutes les fois que cela sera nécessaire, au seuil de la section, — dans un ou plusieurs volumes de généralités, — et au seuil du volume, — dans un chapitre particulier, — des données qui formeront une véritable introduction le mettant à même de poursuivre avec profit sa lecture. Un vocabulaire technique, placé, quand il y aura lieu, à la fin du volume, lui permettra de connaître toujours le sens des mots spéciaux.

II

ORGANISATION SCIENTIFIQUE

Par son organisation scientifique, l'*Encyclopédie* paraît devoir offrir aux lecteurs les meilleures garanties de compétence. Elle est divisée en Sections ou Bibliothèques, à la tête desquelles sont placés des savants professionnels spécialisés dans chaque ordre de sciences et en pleine force de production, qui, d'accord avec le Directeur général, établissent les divisions des matières, choisissent les collaborateurs et acceptent les manuscrits. Le même esprit se manifestera partout : éclectisme et respect de toutes les opinions logiques, subordination des théories aux données de l'expérience, soumission à une discipline rationnelle stricte ainsi qu'aux règles d'une exposition méthodique et claire. De la sorte, le lecteur, qui aura été intéressé par les ouvrages d'une section dont il sera l'abonné régulier, sera amené à consulter avec confiance les livres des autres sections dont il aura besoin, puisqu'il sera assuré de trouver partout la même pensée et les mêmes garanties. Actuellement, en effet, il est, hors de sa spécialité, sans moyen pratique de juger de la compétence réelle des auteurs.

Pour mieux apprécier les tendances variées du travail scientifique adapté à des fins spéciales, l'*Encyclopédie* a sollicité, pour la direction de chaque Bibliothèque, le concours d'un savant placé dans le centre même des études du ressort. Elle a pu ainsi réunir des représentants des principaux Corps savants, Établissements d'enseignement et de recherches de langue française :

Institut.
Académie de Médecine.
Collège de France.
Muséum d'Histoire naturelle.
École des Hautes-Études.
Sorbonne et École normale.
Facultés des Sciences.
Facultés des Lettres.
Facultés de médecine.
Instituts Pasteur.
Ecole des Ponts et Chaussées.
École des Mines.
Ecole Polytechnique.
Conservatoire des Arts et Métiers.
Ecole d'Anthropologie.
Institut National agronomique.
École vétérinaire d'Alfort.
École supérieure d'Électricité.
École de Chimie industrielle de Lyon.
École des Beaux-Arts.
École des Sciences politiques.
Observatoire de Paris.
Hôpitaux de Paris.

III
BUT DE L'ENCYCLOPÉDIE

Au XVIII^e^ siècle, « l'Encyclopédie » a marqué un magnifique mouvement de la pensée vers la critique rationnelle. A cette époque, une telle manifestation devait avoir un caractère philosophique. Aujourd'hui, l'heure est venu de renouveler ce grand effort de critique, mais dans une direction strictement scientifique ; c'est là le but de la nouvelle *Encyclopédie*.

Ainsi la science pourra lutter avec la littérature pour la direction des esprits cultivés, qui, au sortir des écoles, ne demandent guère de conseils qu'aux œuvres d'imagination et à des encyclopédies où la science a une place restreinte, tout à fait hors de proportion avec son importance. Le moment est favorable à cette tentative ; car les nouvelles générations sont plus instruites dans l'ordre scientifique que les précédentes. D'autre part la science est devenue, par sa complexité et par les corrélations de ses parties, une matière qu'il n'est plus possible d'exposer sans la collaboration de tous les spécialistes, unis là comme le sont les producteurs dans tous les départements de l'activité économique contemporaine.

A un autre point de vue, l'*Encyclopédie*, embrassant toutes les manifestations scientifiques, servira comme tout inventaire à mettre au jour les lacunes, les champs encore en friche ou abandonnés, — ce qui expliquera la lenteur avec laquelle certaines sections se développeront, — et suscitera peut-être les travaux nécessaires. Si ce résultat est atteint, elle sera fière d'y avoir contribué.

Elle apporte en outre une classification des sciences et, par ses divisions, une tentative de mesure, une limitation de chaque domaine. Dans son ensemble, elle cherchera à refléter exactement le prodigieux effort scientifique du commencement de ce siècle et un moment de sa pensée, en sorte que dans l'avenir elle reste le document principal où l'on puisse retrouver et consulter le témoignage de cette époque intellectuelle.

On peut voir aisément que l'*Encyclopédie* ainsi conçue, ainsi réalisée, aura sa place dans toutes les bibliothèques publiques, universitaires et scolaires, dans les laboratoires, entre les mains des savants, des industriels et de tous les hommes instruits qui veulent se tenir au courant des progrès, dans la partie qu'ils cultivent eux-mêmes ou dans tout le domaine scientifique. Elle fera jurisprudence, ce qui lui dicte le devoir d'impartialité qu'elle aura à remplir.

Il n'est plus possible de vivre dans la société moderne en ignorant les diverses formes de cette activité intellectuelle qui révolutionne les conditions de la vie ; et l'interdépendance de la science ne permet plus aux savants de rester cantonnés, spécialisés dans un étroit domaine. Il leur faut, — et cela leur est souvent difficile, — se mettre au courant des recherches voisines. A tous, l'*Encyclopédie* offre un instrument unique dont la portée scientifique et sociale ne peut échapper à personne.

IV

CLASSIFICATION DES MATIÈRES SCIENTIFIQUES

La division de l'*Encyclopédie* en Bibliothèques a rendu nécessaire l'adoption d'une classification des sciences, où se manifeste nécessairement un certain arbitraire, étant donné que les sciences se distinguent beaucoup moins par les différences de leurs objets que par les divergences des aperçus et des habitudes de notre esprit. Il se produit en pratique des interpénétrations réciproques entre leurs domaines, en sorte que, si l'on donnait à chacun l'étendue à laquelle il peut se croire en droit de prétendre, il envahirait tous les territoires voisins ; une limitation assez stricte est nécessitée par le fait même de la juxtaposition de plusieurs sciences.

Le plan choisi, sans viser à constituer une synthèse philosophique des sciences, qui ne pourrait être que subjective, a tendu pourtant à échapper dans la mesure du possible aux habitudes traditionnelles d'esprit, particulièrement à la routine didactique, et à s'inspirer de principes rationnels.

Il y a deux grandes divisions dans le plan général de l'*Encyclopédie* : d'un côté les sciences pures, et, de l'autre, toutes les technologies qui correspondent à ces sciences dans la sphère des applications. A part et au début, une Bibliothèque d'introduction générale est consacrée à la philosophie des sciences (histoire des idées directrices, logique et méthodologie).

Les sciences pures et appliquées présentent en outre une division générale en sciences du monde inorganique et en sciences biologiques. Dans ces deux grandes catégories, l'ordre est celui de particularité croissante, qui marche parallèlement à une rigueur décroissante. Dans les sciences biologiques pures enfin, un groupe de sciences s'est trouvé mis à part, en tant qu'elles s'occupent moins de dégager des lois générales et abstraites que de fournir des monographies d'êtres concrets, depuis la paléontologie jusqu'à l'anthropologie et l'ethnographie.

Étant donnés les principes rationnels qui ont dirigé cette classification, il n'y a pas lieu de s'étonner de voir apparaître des groupements relativement nouveaux, une biologie générale, — une physiologie et une pathologie végétales, distinctes aussi bien de la botanique que de l'agriculture, — une chimie physique, etc.

En revanche, des groupements hétérogènes se disloquent pour que leurs parties puissent prendre place dans les disciplines auxquelles elles doivent revenir. La géographie, par exemple, retourne à la géologie, et il y a des géographies botanique, zoologique, anthropologique, économique, qui sont étudiées dans la botanique, la zoologie, l'anthropologie, les sciences économiques.

Les sciences médicales, immense juxtaposition de tendances très diverses, unies par une tradition utilitaire, se désagrègent en des sciences ou des techniques précises ; la pathologie, science de lois, se distingue de la thérapeutique ou de l'hygiène qui ne sont que les applications des données générales fournies par les sciences pures, et à ce titre mises à leur place rationnelle.

Enfin, il a paru bon de renoncer à l'anthropocentrisme qui exigeait une physiologie humaine, une anatomie humaine, une embryologie humaine, une psychologie humaine. L'homme est intégré dans la série animale dont il est un aboutissant. Et ainsi, son organisation, ses fonctions, son développement s'éclairent de toute l'évolution antérieure et préparent l'étude des formes plus complexes des groupements organiques qui sont offertes par l'étude des sociétés.

On peut voir que, malgré la prédominance de la préoccupation pratique dans ce classement des Bibliothèques de l'*Encyclopédie scientifique*, le souci de situer rationnellement les sciences dans leurs rapports réciproques n'a pas été négligé. Enfin il est à peine besoin d'ajouter que cet ordre n'implique nullement une hiérarchie, ni dans l'importance ni dans les difficultés des diverses sciences. Certaines, qui sont placées dans la technologie, sont d'une complexité extrême, et leurs recherches peuvent figurer parmi les plus ardues.

Prix de la publication. — Les volumes, illustrés pour la plupart, seront publiés dans le format in-18 jésus et cartonnés. De dimensions commodes, ils auront 400 pages environ, ce qui représente une matière suffisante pour une monographie ayant un objet défini et important, établie du reste selon l'économie du projet qui saura éviter l'émiettement des sujets d'exposition. Le prix étant fixé uniformément à 5 francs, c'est un réel progrès dans les conditions de publication des ouvrages scientifiques, qui, dans certaines spécialités, coûtent encore si cher.

TABLE DES BIBLIOTHÈQUES

Directeur : Dr TOULOUSE, Directeur de Laboratoire à l'École des Hautes-Études.

Secrétaire général : H. PIÉRON,

Directeurs des Bibliothèques :

1. *Philosophie des Sciences.* P. Painlevé, de l'Institut, professeur à la Sorbonne.

I. Sciences pures

A. Sciences mathématiques :

2. *Mathématiques* . . . J. Drach, professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse.

3. *Mécanique* . . . . J. Drach, professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse.

B. Sciences inorganiques :

4. *Physique.* . . . . A. Leduc, professeur adjoint de physique à la Sorbonne.

5. *Chimie physique* . . J. Perrin, professeur de chimie-physique à la Sorbonne.

6. *Chimie* . . . . . A. Pictet, professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Genève.

7. *Astronomie et Physique céleste* . . . . . J. Mascart, professeur à l'Université, directeur de l'Observatoire de Lyon.

8. *Météorologie*. . . . J. Mascart, professeur à l'Université, directeur de l'Observatoire de Lyon.

9. *Minéralogie et Pétrographie.* . . . . A. Lacroix, de l'Institut, professeur au Muséum d'Histoire naturelle.

10. *Géologie* . . . . . M. Boule, professeur au Muséum d'Histoire naturelle.

11. *Océanographie physique* . . . . . . J. Richard, directeur du Musée Océanographique de Monaco.

C. Sciences biologiques normatives :

12. *Biologie*	A. *Biologie générale* .	M. Caullery, professeur de zoologie à la Sorbonne.
	B. *Océanographie biologique*	J. Richard, directeur du Musée Océanographique de Monaco.
13. *Physique biologique* . .		A. Imbert, professeur à la Faculté de Médecine de l'Université de Montpellier.
14. *Chimie biologique* . .		G. Bertrand, professeur de chimie biologique à la Sorbonne, professeur à l'Institut Pasteur.
15. *Physiologie et Pathologie végétales* . . .		L. Mangin, de l'Institut, professeur au Muséum d'Histoire naturelle.
16. *Physiologie*		J.-P. Langlois, professeur agrégé à la Faculté de Médecine de Paris.
17. *Psychologie*		E. Toulouse, directeur de Laboratoire à l'École des Hautes Études, médecin en chef de l'asile de Villejuif.
18. *Sociologie*		G. Richard, professeur à la Faculté des Lettres de l'Université de Bordeaux.
19. *Microbiologie et Parasitologie*		A. Calmette, professeur à la Faculté de Médecine de l'Université, directeur de l'Institut Pasteur de Lille, et F. Bezançon, professeur agrégé à la Faculté de Médecine de l'Univers sité de Paris, médecin des Hôpitaux.
20. *Pathologie.*	A. *Patholog. médicale* .	M. Klippel, médecin des Hôpitaux de Paris.
	B. *Neurologie*. . .	E. Toulouse, directeur de Laboratoire à l'École des Hautes-Études, médecin en chef de l'asile de Villejuif.
	C. *Path. chirurgicale* .	L. Picqué, chirurgien des Hôpitaux de Paris.

D. Sciences biologiques descriptives :

21. *Paléontologie* . . .		M. Boule, professeur au Muséum d'Histoire naturelle.
22. *Botanique.*	A. *Généralités et phanérogames* . .	H. Lecomte, professeur au Muséum d'Histoire naturelle.
	B. *Cryptogames*. . .	L. Mangin, de l'Institut, professeur au Muséum d'Histoire naturelle.

23. *Zoologie* . . . . . G. Loisel, directeur de Laboratoire à l'Ecole des Hautes-Études.

24. *Anatomie et Embryologie* . . . . . . G. Loisel, directeur de Laboratoire à l'École des Hautes-Études.

25. *Anthropologie et Ethnographie*. . . . . G. Papillault, directeur-adjoint du Laboratoire d'Anthropologie à l'Ecole des Hautes Etudes, professeur à l'École d'Anthropologie.

26. *Economie politique* . . D. Bellet, secrétaire perpétuel de la Société d'Economie politique, professeur à l'École des Sciences politiques.

II. Sciences appliquées

A. Sciences mathématiques :

27. *Mathématiques appliquées* . . . . . M. d'Ocagne, professeur à l'École Polytechnique et à l'École des Ponts et Chaussées.

28. *Mécanique appliquée et génie* . . . . . M. d'Ocagne, professeur à l'École Polytechnique et à l'École des Ponts et Chaussées.

B. Sciences inorganiques :

29. *Industries physiques* . H. Chaumat, sous-directeur de l'École supérieure d'Électricité de Paris.

30. *Photographie* . . . A. Seyewetz, sous-directeur de l'École de Chimie industrielle de Lyon.

31. *Industries chimiques* . J. Derôme, professeur agrégé de Physique au collège Chaptal, inspecteur des Établissements classés.

32. *Géologie et minéralogie appliquées* . . . . L. Cayeux, professeur au Collège de France et à l'Institut national agronomique.

33. *Construction*. . . . A. Mesnager, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers et à l'École des Ponts et Chaussées.

C. Sciences biologiques :

34. *Industries biologiques* . G. Bertrand, professeur de chimie biologique à la Sorbonne, professeur à l'Institut Pasteur.

35. *Botanique appliquée et agriculture*. . . . H. Lecomte, professeur au Muséum d'Histoire naturelle.

36. *Zoologie appliquée*. . J. Pellegrin, assistant au Muséum d'Histoire naturelle.

37. *Thérapeutique générale et pharmacologie* . .	G. Pouchet, membre de l'Académie de médecine, professeur à la Faculté de Médecine de l'Université de Paris.
38. *Hygiène et médecine publiques*	A. Calmette, professeur à la Faculté de Médecine de l'Université, directeur de l'Institut Pasteur de Lille.
39. *Psychologie appliquée.*	E. Toulouse, directeur de Laboratoire à l'École des Hautes-Études, médecin en chef de l'asile de Villejuif.
40. *Sociologie appliquée* .	Th. Ruyssen, professeur à la Faculté des Lettres de l'Université de Bordeaux.

M. Albert Maire, bibliothécaire à la Sorbonne, est chargé de l'*Index* de l'Encyclopédie scientifique.

SAINT-AMAND (CHER). — IMPRIMERIE BUSSIÈRE

E. S.

A^{ed} BARRIOL

THÉORIE & PRATIQUE DES OPÉRATIONS FINANCIÈRES

2me Édition