О ПРІЕМАХЪ НАУЧНОЙ РАЗРАБОТКИ СТАТИСТИЧЕСКИХЪ ДАННЫХЪ.

СОСТАВИЛЪ

В. А. Косинскій,

студентъ Юридическаго Факультета, кандидатъ Математическихъ Наукъ.

МОСКВА.

Типо-Лит. Д. А. Бончъ-Бруевича, Нѣмецкая ул., Бригадирскій пер., д. Т-ва Кувшинова.

1890.

О ПРІЕМАХЪ
НАУЧНОЙ РАЗРАБОТКИ
СТАТИСТИЧЕСКИХЪ ДАННЫХЪ.

СОСТАВИЛЪ
В. А. Косинскій,
студентъ Юридическаго Факультета, кандидатъ Математическихъ Наукъ.

МОСКВА.
Типо-Лит. Д. А. Бончъ-Бруевича, Нѣмецкая ул., Бригадирскій пер., д. Т-ва Кувшинова.
1890.

По опредѣленію юридическаго факультета печатать разрѣшается. 23 апрѣля 1890 г.

Деканъ Викторъ Легонинъ.

Предлагаемая статья, которую я имѣлъ возможность составить и выпустить въ свѣтъ только благодаря содѣйствію глубокоуважаемаго профессора **А. И. Чупрова**, представляетъ собою попытку научнаго изложенія пріемовъ разработки статистическихъ данныхъ. Остановился я на этой части статистической теоріи потому, что при всей ея важности она представляется мнѣ мало обоснованной съ логической стороны.

Въ сочиненіяхъ по логикѣ законъ связи причины со слѣдствіемъ излагается всегда въ предположеніи достовѣрной связи, т. е. что за причиной неизмѣнно и безусловно слѣдуетъ всегда одно и то же дѣйствіе; вѣроятныя явленія поставлены въ нихъ какъ-то особнякомъ отъ этого закона: сущность вѣроятныхъ явленій стараются найти въ субъективномъ, психическомъ мірѣ человѣка, а не въ названномъ законѣ. Въ спеціальныхъ сочиненіяхъ по теоріи вѣроятностей мы тоже не встрѣчаемъ достаточно полнаго выясненія сущности вѣроятности. Въ нихъ математики даютъ, такъ сказать, внѣшнее, формальное опредѣленіе вѣроятности, которое даетъ возможность только количественно выразить ее. Въ каждомъ руководствѣ мы находимъ приблизительно такое опредѣленіе вѣроятности: „вѣроятность событія есть отношеніе числа статочностей, благопріятствующихъ событію, къ числу всѣхъ статочностей, какъ благопріятствующихъ такъ и неблагопріятствующихъ (ему)“ *). Гдѣ же они (математики) стараются выяснить сущность вѣроятности, тамъ мы встрѣчаемся съ неопредѣленными выраженіями въ родѣ того, что вѣроятность есть результатъ нашего знанія и незнанія явленія. Закона причинности математики при выясненіи понятія вѣроятности почти не касаются.

Такимъ образомъ ни изъ сочиненій по логикѣ, ни изъ спеціальныхъ сочиненій по теоріи вѣроятностей статистики

---

*) Курсъ лекцій по Теоріи Вѣроятностей проф. *Некрасова* (1886 г.) стр. 2.

не могутъ получить яснаго представленія о вѣроятности и вѣроятныхъ явленіяхъ; не могутъ поэтому отвѣтить, что значитъ (логически) законъ въ случаѣ вѣроятныхъ явленій; не могутъ указать съ возможно полной мотивировкой и самыхъ пріемовъ обнаруженія этихъ законовъ.

Въ нижеслѣдующей статьѣ я пытаюсь провести ту мысль, что вѣроятность явленія не выходитъ изъ области закона связи причины со слѣдствіемъ, что основанія „вѣроятности" слѣдуетъ искать именно въ этомъ законѣ, а не въ субъективномъ мірѣ человѣка,—пытаюсь вывести понятіе вѣроятности изъ понятій: „причина" и „слѣдствіе". Подобный взглядъ на вѣроятныя явленія далъ мнѣ возможность говорить вполнѣ опредѣленно о законахъ вѣроятныхъ явленій и, думается мнѣ,—освѣтить нѣкоторыя темныя мѣста въ самыхъ пріемахъ ихъ обнаруженія.

Имѣя дѣло со статистикой (т. е. съ числовыми данными), я долженъ былъ привести и нѣкоторыя математическія формулы, но всѣ онѣ—*формулы элементарной алгебры*. Къ формуламъ послѣдняго отдѣла, гдѣ встрѣчаются выраженія изъ теоріи соединеній, приложенъ ариѳметическій треугольникъ *Паскаля*, который даетъ возможность находить всѣ сочетанія прямо въ таблицѣ, не производя никакихъ вычисленій.

В. Косинскій.

Москва. 16 мая 1890 г.

Статистика изучаетъ общественныя явленія, которыя допускаютъ числовую характеристику и требуютъ для ознакомленія съ ними массовыхъ наблюденій.

Методъ статистики, благодаря «множественности причинъ» и «смѣшенію дѣйствій», наблюдаемымъ въ общественныхъ явленіяхъ, не можетъ быть непосредственно индуктивнымъ; индукція даетъ только посылки для выводнаго (дедуктивнаго) метода [1]). Поэтому статистика, прежде чѣмъ приступить къ изслѣдованію общественныхъ явленій, должна давать ихъ описанія, въ которыхъ была бы произведена такая группировка предыдущихъ и послѣдующихъ фактовъ, чтобы къ полученнымъ группамъ возможно было приложеніе индуктивныхъ методовъ. Доказавши связь причины со слѣдствіемъ въ этихъ элементарныхъ группахъ, т. е. обнаруживъ ихъ законы, мы уже выводнымъ путемъ получаемъ законы общественныхъ явленій [2]); полученный выводъ повѣряемъ сравненіемъ его съ существующими индукціями (если таковыхъ нѣтъ, стараемся ихъ вывести) [3]); затѣмъ пытаемся объяснить законъ.

Группировка предыдущихъ и послѣдующихъ событій, которая предшествуетъ приложенію индуктивныхъ методовъ, производится на основаніи общихъ знаній о тѣхъ условіяхъ, въ которыхъ явленіе происходитъ. Такъ напримѣръ, зная, что на событія, происходящія въ человѣческомъ обществѣ, вліяютъ съ одной стороны причины, лежащія въ физической природѣ человѣка и окружающаго его внѣшняго міра, съ другой—лежащія въ умственной и нравственной его природѣ, *Вагнеръ* предложилъ ту систему причинъ, которая приведена профессоромъ *Янсономъ* на стр. 466 его „Теоріи Статистики". Сообразно взглядамъ на эти причины составляются планы какъ собиранія статистическаго матеріала, такъ и сводокъ уже собраннаго, чтобы прямо получить такое описаніе явленія, которое даетъ возможность приложить наведеніе. Должно замѣтить, что «система причинъ» предложенная Вагнеромъ (то-же говоритъ проф. Янсонъ и относительно нѣкоторыхъ другихъ «системъ» [4]) невполнѣ осуществима практически въ томъ

---

[1]) *Д. С. Милль*. Система Логики Т. 1 (1865 г.), стр. 510—517.
[2]) Ibid. стр. 517—519.
[3]) Ibid. стр. 369—373.
[4]) *Янсонъ*, Теор. Стат. стр. 465.

смыслѣ, что собирать статистическія данныя и составлять сводки ихъ, удовлетворяющія вышеупомянутой «системѣ причинъ», положительно невозможно; но за то можно изъ уже собраннаго матеріала (по иной системѣ), косвенно получить указанія на нѣкоторыя причины «системы», т. е. возможно уже собранный матеріалъ разбить съ помощью ея на такія группы, къ которымъ приложимо наведеніе.—Это программа научной работы по тѣмъ вопросамъ, которыми занимался *Вагнеръ* (уголовная статистика), научное описаніе явленій имъ изслѣдованныхъ.

Что касается наведенія, то о немъ должно сказать слѣдующее. 1) Методъ разницы, какъ требующій слишкомъ рѣзкихъ и опредѣленныхъ разграниченій между различными группами предшествующихъ и послѣдующихъ фактовъ, по сложности общественныхъ явленій, въ которыхъ по этой причинѣ подобныхъ разграниченій произвести нельзя (по крайней мѣрѣ это невозможно при современномъ знаніи общественныхъ явленій), не находитъ *непосредственнаго* примѣненія въ статистикѣ. 2) Методъ остатковъ по той же причинѣ не можетъ быть непосредственно примѣненъ къ изслѣдованію общественныхъ явленій. 3) Остаются такимъ образомъ только три метода индукціи, которыми можетъ пользоваться статистика: a) методъ совпаденія, b) косвенный методъ разницы и c) методъ сопутствующихъ измѣненій. Объ этихъ трехъ методахъ индукціи и будетъ идти рѣчь ниже и притомъ почти исключительно о примѣненіи ихъ къ числовымъ даннымъ статистики; дедукціи, повѣрки закона и его объясненія мы почти не будемъ касаться.

Но прежде чѣмъ приступить къ изложенію употребленія индуктивныхъ методовъ въ статистикѣ, сдѣлаемъ нѣсколько замѣчаній о законѣ связи причины со слѣдствіемъ и выведемъ изъ него законъ большихъ чиселъ. Это дастъ намъ возможность глубже взглянуть на характеръ законовъ общественныхъ явленій, на характеръ связи послѣднихъ съ ихъ причинами и вмѣстѣ съ тѣмъ болѣе опредѣленно указать область явленій, которыми занимается статистика.

I. Законъ большихъ чиселъ.

I. «Причину явленія мы можемъ опредѣлить какъ предшествующее, или совокупность предшествующихъ, за которыми явленіе неизмѣнно и безусловно слѣдуетъ» [5]). Самое общее опредѣленіе причины должно заключать въ себѣ и понятіе «множественности причинъ», и понятіе «смѣшенія дѣйствій» [6]) и понятіе «составленія причинъ» [7]); то есть въ «совокупность явленій», за которыми неизмѣнно и безусловно слѣдуетъ другое, входятъ и такія явленія, которыя 1) каждое въ отдѣльности могутъ про-

---

[5]) *Милль*. Сист. Лог. Т. I, стр. 392.
[6]) Ibid. стр. 492—517.
[7]) Ibid. стр. 423—432.

извести послѣдующее и 2) въ дѣйствительности производятъ часть послѣдующаго явленія, при чемъ 3) дѣйствія этихъ отдѣльныхъ причинъ, слагаясь вмѣстѣ, составляются такъ же, какъ составляютъ свои дѣйствія силы механическія: «причины соединяющія свои дѣйствія, могутъ быть разсматриваемы такъ, какъ если бы онѣ производили, каждая одновременно, свое собственное дѣйствіе и всѣ эти дѣйствія наглядно сосуществовали» [8]). Правда, *Миллъ* признаетъ два вида соединенія дѣйствія причинъ [9])—механическій и химическій и «составленіе причинъ» относитъ только къ первому виду; механическій видъ соединенія дѣйствій онъ считаетъ общимъ правиломъ, а химическій—исключеніемъ. Но, какъ можно заключить изъ стр. 502—505, I Т., Сис. Лог. (1865 г.), во время *Д. С. Милля* объясненіе всѣхъ явленій природы, въ томъ числѣ и химическихъ, движеніемъ, энергіей, не было еще принято, почему онъ и противополагаетъ химическія явленія механическимъ; а разъ теперь химическія явленія сведены на механическія, то справедливое для механическихъ явленій «составленіе причины», конечно, справедливо и для химическихъ. „Въ соціальныхъ (же) явленіяхъ—утверждаетъ онъ на 427 стр. II Т. Сист. Лог.—составленіе причинъ есть общій законъ."

Вышеизложеннымъ опредѣленіемъ причины изъ числа явленій, составляющихъ ее, уже выключены тѣ предшествующія, которыя не имѣютъ никакого вліянія на дѣйствія, такъ какъ они не могутъ быть причислены къ тѣмъ, за которыми неизмѣнно и безусловно слѣдуетъ извѣстное дѣйствіе. Но въ числѣ предшествующихъ, участвующихъ въ производствѣ дѣйствія, могутъ быть еще случайныя причины, именно такія предшествующія, которыя имѣютъ вліяніе на дѣйствіе, но съ остальными причинами связаны случайно. «Случайно связанные факты, взятые отдѣльно, суть дѣйствія различныхъ причинъ и, слѣдовательно, законовъ; но они суть дѣйствія *различныхъ* причинъ, *не связанныхъ никакимъ закономъ*. Поэтому неправильно будетъ сказать, что какое-либо явленіе *происходитъ* случайно; но мы можемъ сказать, что два явленія или большее число ихъ *связаны* случайно, что они *сосуществуютъ* или *слѣдуютъ одно за другимъ* по случайности: разумѣя подъ этимъ, что они отнюдь не приведены въ соотношеніе связью причины со слѣдствіемъ; что они ни причина и дѣйствіе, ни дѣйствія одной и той же причины, ни дѣйствія причинъ, между которыми есть какой-либо законъ сосуществованія, ни даже дѣйствія одного и того же распредѣленія первоначальныхъ причинъ» [10]). Если подобный фактъ попадаетъ въ число причинъ даннаго явленія, мы будемъ имѣть примѣръ «случайной причины».

При выводѣ закона мы заинтересованы исключить изъ изслѣдуемаго нами явленія дѣйствіе случайныхъ причинъ, такъ

---

8) *Миллъ*. Сист. Лог. Т. I, стр. 517.
9) *Миллъ*. Сист. Лог. Т. I, стр. 424—432.
10) *Миллъ*. Сист. Логики Т. II, стр. 48.

какъ мы стремимся (при объясненіи) свести всѣ замѣченныя нами единообразія (эмпирическіе законы) на единообразія, могущія быть полученными путемъ вывода изъ «закона природы» [11]), а достигается это слѣдующимъ образомъ. «Если дѣйствія производятся... различными причинами, то порядокъ дѣйствій зависитъ отъ законовъ этихъ причинъ въ отдѣльности и *обстоятельствъ опредѣляющихъ ихъ сосуществованіе.* Изслѣдуя дальше, когда и какъ причины будутъ сосуществовать, мы увидимъ, что это опять-таки зависитъ отъ *ихъ причинъ.* Такъ мы можемъ восходить въ ряду явленій далѣе и далѣе, пока различные ряды дѣйствій не сойдутся въ одной точкѣ и пока не обнаружится, что всѣ они зависѣли, конечнымъ образомъ, отъ какой-либо общей причины», [12]) или распредѣленія нѣкоторыхъ первыхъ причинъ [13]) или естественныхъ дѣятелей. Случайная же причина по своему существу не можетъ быть связана причинной связью съ остальными причинами и даже не можетъ быть съ ними вмѣстѣ дѣйствіемъ одного и того же распредѣленія первоначальныхъ причинъ, т. е. при выводѣ закона она выпадетъ, не войдетъ звеномъ въ цѣпь причинъ, связывающую изслѣдумое явленіе съ первоначальной причиной; поэтому она должна быть исключена вмѣстѣ съ своимъ дѣйствіемъ изъ разсмотрѣнія, такъ какъ рѣшеніе вопроса въ дѣйствительности зависитъ только отъ взаимнаго отношенія остальныхъ элементовъ [14]) — неслучайныхъ причинъ и ихъ дѣйствій, которые только и должны быть нами приняты во вниманіе.

II. Подъ дѣйствіемъ мы разумѣемъ явленіе, событіе, неизмѣнно и безусловно слѣдующее за причиной; въ общемъ случаѣ дѣйствіемъ причины будетъ нѣсколько различныхъ явленій, которыя мы называемъ дѣйствіями различныхъ свойствъ причины [15]).

III. Связь причины съ дѣйствіемъ—необходимая, безусловная: разъ существуетъ дѣйствіе, необходимо существуетъ и причина, разъ существуетъ причина, необходимо слѣдуетъ или послѣдуетъ дѣйствіе. «Истина, что каждый фактъ, имѣющій начало—говоритъ *Д. С. Милль* [16])—имѣетъ и причину, распространяется на всю человѣческую опытность», и этотъ законъ «способенъ вполнѣ поддержать притязаніе» на «строгую неопровержимость». И въ другомъ мѣстѣ [17]): «Понятіе о причинѣ обнимаетъ идею необходимости. Если есть смыслъ, принадлежащій, по всеобщему признанію, слову «необходимость», то именно безусловность. Если что *необходимо*, если оно *должно* быть, — значитъ, оно *будетъ*, какія предположенія мы ни дѣлали бы относительно всѣхъ другихъ вещей».

Для большаго удобства мы, при разсмотрѣніи связи причины со слѣдствіемъ, воспользуемся понятіемъ «свойство причины».

---

11) *Милль.* Сист. Логики Т. I, стр. 365—369 и стр. 536—538.
12) *Милль.* Сист. Лог. Т. II, стр. 37—38. Подобное же Т. I, стр. 401—402.
13) *Милль.* Сист. Лог. Т. I, стр. 398—402.
14) *Милль.* Сист. Л. Т. I, стр. 447.
15) Ibid. стр. 398.
16) Сист. Лог. Т. I. стр. 377.
17) Ibid. стр. 391—392.

«Постоянно случается открывать, что нѣсколько различныхъ явленій» говоритъ тотъ же авторъ [18]), «которыя *отнюдь не зависимы одно отъ другого и взаимно не обусловливаются*, зависятъ, какъ говорится, отъ одного и того же дѣятеля; другими словами, мы видимъ, что за однимъ и тѣмъ-же явленіемъ слѣдуютъ дѣйствія, совершенно разнородныя, которыя, однако, совершаются *одновременно*, если, конечно, существуютъ и всѣ другія, требующіяся для нихъ, условія». «Означеніе этого рода случаевъ и есть цѣль, къ которой наиболѣе приспособлены выраженія «свойства» и «силы». Когда за однимъ и тѣмъ же явленіемъ слѣдуютъ дѣйствія различныя и несходныя, то обыкновенно говорится, что *каждый иной родъ дѣйствій производится инымъ свойствомъ причины*». Все дѣйствіе какого-либо явленія мы можемъ, такимъ образомъ, разбить на нѣсколько группъ явленій, «которыя отнюдь не зависимы одно отъ другого и взаимно не обусловливаются» и каждый родъ этихъ явленій отнести къ дѣйствію особаго свойства причины. Понятно, что дѣйствія одного и того же рода будутъ уже зависѣть одно отъ другого и взаимно обусловливаться.

Связь извѣстнаго свойства причины съ его дѣйствіемъ «*если, конечно, существуютъ и всѣ другія, требующіяся для того условія*» будетъ необходимая, но эта необходимость бываетъ двухъ родовъ. Во 1-хъ, извѣстное свойство причины можетъ быть необходимо связано съ извѣстнымъ *единственнымъ*, вполнѣ опредѣленнымъ дѣйствіемъ и «всѣ другія требующіяся условія» даютъ только возможность произвести это единственное дѣйствіе.—Свойство двухъ матеріальныхъ частицъ тяготѣть другъ къ другу тотчасъ вызоветъ движеніе одной на встрѣчу другой, если только не будетъ препятствій къ этому движенію. Тутъ всѣ условія чисто отрицательныя: они только не препятствуютъ произойти явленію. Во 2-хъ, извѣстное свойство причины необходимо связано съ извѣстной *группой* явленій: какое-либо (или какія-либо явленія) изъ этой группы должно необходимо осуществиться, но какое именно явленіе осуществится въ данномъ конкретномъ случаѣ, тó *опредѣлятъ* эти «другія требующіяся условія».—Если урна содержитъ 5 бѣлыхъ и 10 черныхъ шаровъ и изъ нея вынимаютъ на удачу 1 шаръ, то это свойство ея (содержать 5 бѣлыхъ и 10 черныхъ шаровъ) связано необходимо съ появленіемъ либо бѣлаго, либо чернаго шара; какой-же именно появится въ дѣйствительности при данномъ выниманіи, это *опредѣлятъ* другія условія: опредѣленное движеніе вынимающей руки и опредѣленное распредѣленіе шаровъ въ урнѣ (двѣ случайныя, какъ увидимъ ниже, причины). Первый родъ дѣйствій мы называемъ явленіями типическими, достовѣрными: здѣсь причина стремится произвести всегда одно и тоже дѣйствіе, другія условія могутъ только позволить или не позволить осуществить это *единственное* стремленіе. Второй родъ дѣйствій мы называемъ явленіями нетипическими, недостовѣрными, вѣроятными: здѣсь причина стремится произвести *непремѣнно* одно или нѣсколько

---

[18]) Сист. Лог. Т. I, стр. 398.

явленій изъ цѣлой *группы* ихъ, но этимъ «однимъ» явленіемъ можетъ быть *каждое* изъ всей группы; стремленіе такимъ образомъ простирается на *всѣ* явленія группы одновременно, и другія условія *опредѣляютъ* — какое изъ этихъ стремленій осуществится при наблюденіи.

Второй родъ явленій, болѣе сложный, какъ увидимъ ниже, заключаетъ въ себѣ первый родъ явленій, какъ частный случай. Поэтому начнемъ наше разсмотрѣніе съ этого второго рода явленій.

Мы сказали, что въ этого рода явленіяхъ стремленіе причины произвести дѣйствіе простирается на всѣ явленія группы, но конечно, *неодинаково на различные виды* явленій группы. Какимъ же способомъ мы можемъ измѣрять эти различныя стремленія причины?—Если какое либо явленіе А, въ смыслѣ появленія или непоявленія его, стоитъ къ причинѣ въ совершенно одинаковомъ отношеніи съ явленіемъ В (принадлежащимъ къ той же группѣ), то стремленіе причины распредѣляется между ними одинаково. Если же они относятся къ причинѣ различно, то, конечно, это стремленіе между ними распредѣлено неравномѣрно. Въ послѣднемъ случаѣ, можно явленія А и В разложить на такія другія явленія, которыя стояли бы къ причинѣ въ совершенно равныхъ между собою отношеніяхъ; тогда, сосчитавъ сколько такихъ явленій равно явленіямъ А и В, мы можемъ сравнить стремленіе причины произвести А съ ея-же стремленіемъ произвести В.

Только что указанный способъ оцѣнки стремленія причины произвести *извѣстное*, *опредѣленное* дѣйствіе положенъ въ основаніе теоріи вѣроятностей; къ ней намъ поэтому слѣдуетъ и обратиться.

По опредѣленію *Лапласа* [19]), «теорія случайностей (она же вѣроятностей) состоитъ въ сведеніи всѣхъ событій одного и того же рода (дѣйствій одного и того же свойства причины) на извѣстное число случаевъ, одинаково возможныхъ, т. е. такихъ, что мы *одинаково колеблемся* относительно ихъ существованія, и въ опредѣленіи числа случаевъ, благопріятныхъ тому событію, вѣроятность котораго отыскивается. Отношеніе этого числа къ числу всѣхъ возможныхъ случаевъ есть мѣрило вѣроятности. Она, слѣдовательно, есть дробь, числителемъ которой служитъ число случаевъ, благопріятныхъ событію, а знаменателемъ число всѣхъ случаевъ возможныхъ». Разовьемъ это положеніе на примѣрѣ.

Передъ нами закрытая урна, содержащая 5 бѣлыхъ, 10 черныхъ и 15 красныхъ шаровъ; шары эти (за исключеніемъ цвѣта) совершенно одинаковы. Изъ урны мы вынимаемъ наудачу одинъ шаръ, отмѣчаемъ его цвѣтъ и кладемъ обратно въ урну; этотъ опытъ повторяемъ много разъ. 1) Опредѣлимъ стремленіе къ появленію шара каждаго цвѣта при однократномъ опытѣ и 2) укажемъ, какъ проявляется это стремленіе при большомъ числѣ опытовъ.

---

19) Сист. Логики *Милля*. Т. II, стр. 57.

Разсмотримъ каждую изъ дѣйствующихъ здѣсь причинъ и оцѣнимъ вліяніе каждой изъ нихъ при однократномъ опытѣ.

1-ая причина: урна закрыта. Эта причина дѣйствуетъ при всѣхъ выниманіяхъ шаровъ (слѣдовательно она не случайна), и притомъ дѣйствуетъ совершенно одинаково (слѣдовательно она постоянна). Благодаря ей, распредѣленіе шаровъ въ урнѣ намъ *неизвѣстно*, и потому движеніе руки, вынимающей шаръ, никакимъ образомъ нельзя поставить въ связь съ этимъ распредѣленіемъ: это двѣ случайно связанныя причины. Движеніе руки и распредѣленіе шаровъ въ урнѣ совершаются сообразно съ законами механики; но эти движеніе и распредѣленіе нисколько одно отъ другаго не зависятъ: они не приведены въ зависимость сознаніемъ вынимающаго лица.

2-ая причина: различное, опредѣленное количество шаровъ каждаго цвѣта. Эта причина тоже неслучайная и постоянная, она связана съ первою причиною закономъ сосуществованія, такъ какъ обѣ суть одновременныя дѣйствія одной и той же причины— воли лица, устроившаго опытъ. Движеніе руки и распредѣленіе шаровъ являются причинами случайными по отношенію къ ней.

3-ья причина: движеніе руки, вынимающей шаръ. Эта причина случайна по отношенію къ первымъ двумъ; притомъ же вообще различна для каждаго отдѣльнаго случая выниманія шара,— черта характеристическая для случайной причины, какъ не связанной съ существомъ явленія; съ распредѣленіемъ шаровъ въ урнѣ она связана случайно.

4-ая причина: распредѣленіе шаровъ въ урнѣ. Это—причина, случайно связанная со всѣми тремя предыдущими и притомъ различная для каждаго отдѣльнаго случая выниманія шара, такъ какъ, когда какой-нибудь шаръ вынутъ и опять брошенъ назадъ, распредѣленіе шаровъ въ урнѣ, очевидно, будетъ иное, чѣмъ было до того.

Оставимъ пока въ сторонѣ двѣ послѣднихъ случайныхъ причины и разсмотримъ дѣйствія двухъ первыхъ неслучайныхъ постоянныхъ причинъ. Обѣ эти причины не связаны необходимо съ появленіемъ шара какого-либо *опредѣленнаго цвѣта*; онѣ утверждаютъ только, что при опытѣ необходимо появится либо бѣлый, либо черный, либо красный шаръ,—какой-же именно,—это *опредѣлятъ* двѣ остальныхъ случайныхъ причины, присоединившись къ двумъ постояннымъ.

Для оцѣнки стремленія разсматриваемыхъ причинъ произвести тотъ или другой родъ дѣйствія выберемъ такіе случаи ихъ дѣйствія, относительно которыхъ намъ вполнѣ было-бы извѣстно, что въ нихъ каждая изъ нашихъ причинъ дѣйствуетъ совершенно одинаково [20]) и притомъ чтобы изъ этихъ случаевъ дѣйствія слагались дѣйствія нами изслѣдуемыя. Очевидно, что появленіе при опытѣ любого изъ всѣхъ 30 шаровъ (*безъ отношенія къ цвѣту*) стоитъ въ

---

[20]) *Д. С. Миллъ* въ своей Сост. Лог. [Т. II, стр. 49—52 (§ 2), стр. 54 (§ 3), стр. 55] также считаетъ возможнымъ измѣреніе дѣйствія причинъ равновозможными случаями (статочностями).

одинаковомъ отношеніи и къ первой и ко второй причинамъ. Первая причина дѣлаетъ неизвѣстнымъ положеніе въ урнѣ *каждаго* шара изъ 30 и притомъ каждаго въ *одинаковой* степени. Вторая причина утверждаетъ только, что всѣхъ шаровъ въ урнѣ $5+10+15=30$; любой шаръ въ этомъ числѣ составляетъ единицу *равную* всѣмъ остальнымъ единицамъ порознь, такъ какъ различія въ цвѣтѣ мы не касаемся. Порознь каждая изъ двухъ постоянныхъ причинъ въ вышеуказанныхъ случаяхъ одинаково стремится осуществить соотвѣтствующій случай, слѣдовательно, и вмѣстѣ онѣ во всѣхъ 30 случаяхъ будутъ дѣйствовать одинаково. Итакъ мы привели *всѣ* дѣйствія нашихъ причинъ (*всѣ* событія, которыя, въ совокупности, неизмѣнно и безусловно слѣдуютъ за ними) къ 30-ти случаямъ, которые относятся къ причинамъ абсолютно одинаково; замѣчу, что къ послѣднему заключенію мы приходимъ послѣ всесторонняго изслѣдованія причинъ [21]).

Изъ упомянутыхъ 30 одинаково возможныхъ случаевъ 5 *такихъ* случаевъ благопріятствуютъ появленію бѣлаго шара, 10 *такихъ же* случаевъ благопріятствуютъ появленію чернаго и 15 случаевъ—появленію краснаго шаровъ. Ясно, поэтому, что стремленіе бѣлаго шара появляться при каждомъ опытѣ будетъ въ 2 раза меньше таковаго же стремленія чернаго шара и въ 3 раза меньше стремленія краснаго шара (5 : 10 : 15). Но съ другой стороны мы знаемъ, что одинъ изъ 30 шаровъ при опытѣ будетъ непремѣнно вынутъ; тутъ наблюдается уже связь причины съ типическимъ, достовѣрнымъ явленіемъ: въ то время какъ стремленіе причинъ въ только что разсмотрѣнномъ случаѣ распредѣляется между тремя видами дѣйствій (появленіями бѣлаго, чернаго и краснаго шара), здѣсь *всё* стремленіе ихъ направлено на осуществленіе *одного* событія (появленія какого либо шара изъ находящихся въ урнѣ). Такое вполнѣ опредѣленное (все, полное) стремленіе причинъ производить всегда одно и тоже явленіе принято въ теоріи вѣроятностей за 1 (единицу), въ которой выражаются различныя стремленія причинъ, и называется достовѣрностью; стремленія *тѣхъ же* причинъ произвести появленія бѣлаго, чернаго и краснаго шаровъ, выраженныя въ этой новой единицѣ, опредѣлятся: для бѣлаго шара изъ пропорціи $x:1=5:30$ (такъ какъ появленію достовѣрнаго событія благопріятствуютъ 30 случаевъ), откуда $x=\frac{5}{30}=$ «дроби, числителемъ которой служитъ число случаевъ, благопріятныхъ событію (5), а знаменателемъ число всѣхъ возможныхъ случаевъ (30)»; для чернаго и краснаго шаровъ оно соотвѣтственно опредѣлится изъ пропорцій: $y:1=10:30$ и $z:1=15:30$, откуда: $y=\frac{10}{30}$, $z=\frac{15}{30}$. *Стремленіе причины* произвести при каждомъ опытѣ или наблюденіи какое либо *опредѣленное* нетипическое явленіе, когда мы его выразимъ черезъ достовѣрность (т. е. въ данномъ примѣрѣ дро-

21) Я дѣлаю особенное удареніе на томъ, что мы *всё* знаемъ относительно этихъ двухъ причинъ и, основываясь на такомъ *полномъ знаніи*, уравниваемъ дѣйствіе причинъ въ каждомъ изъ 30 случаевъ: такъ слѣдуетъ понимать выраженіе *Лапласа*: „одинаково колеблемся“.

бями $\frac{5}{30}$, $\frac{10}{30}$ и $\frac{15}{30}$), называется *вѣроятностью* этого явленія. Вѣроятность есть, слѣдовательно, часть достовѣрности, неполная достовѣрность ($\frac{5}{30}$ достовѣрности, $\frac{10}{30}$ достовѣрности. и т. д.); она характеризуетъ связь постоянныхъ причинъ съ даннымъ нетипическимъ явленіемъ, указываетъ, такъ сказать, какая часть дѣйствія этихъ причинъ падаетъ на долю даннаго явленія. Но, съ другой стороны, достовѣрность есть тотъ частный случай вѣроятности, когда всѣ возможныя статочности благопріятствуютъ появленію одного и того же событія; противоположенія между ними нѣтъ; понятіе вѣроятности обнимаетъ собою понятіе достовѣрности. Немного выше мы видѣли, что достовѣрная связь съ постоянной причиной соотвѣтствуетъ типическому явленію, вѣроятная—нетипическому: это единственное различіе названныхъ двухъ родовъ явленій. Но такъ какъ противоположеніе между вѣроятностью и достовѣрностью невозможно (какъ невозможно противоположеніе между числомъ и единицей), то невозможно противоположеніе между типическими и нетипическими явленіями, какъ это дѣлаетъ *Д. С. Милль* въ Системѣ Логики, Т. II (1878 г.), стр. 58; кромѣ того, такъ какъ вѣроятность—понятіе болѣе широкое, чѣмъ достовѣрность (вѣроятность обнимаетъ достовѣрность), то все, что можетъ быть сказано относительно явленій вѣроятныхъ, нетипическихъ должно имѣть мѣсто и для явленій типическихъ. Правда, нѣкоторое различіе, такъ сказать, въ техникѣ умозаключеній относительно типическихъ явленій сравнительно съ умозаключеніемъ относительно нетипическихъ явленій какъ будто-бы есть; но это только упрощенія, проистекающія отъ нашего знанія, что вѣроятность типическихъ явленій, равна 1. Ниже мы съ очевидностью увидимъ это.

До сихъ поръ мы разсматривали дѣйствія только двухъ первыхъ (неслучайныхъ и постоянныхъ) причинъ, не обращая вниманія на остальныя (случайныя) причины,—и имѣли на то полное право послѣ оговорки, сдѣланной нами раньше (стр. 4), что выводъ закона зависитъ только отъ взаимнаго отношенія неслучайныхъ причинъ и ихъ дѣйствій. Обратимся теперь къ случайнымъ причинамъ и притомъ съ единственной цѣлью (въ силу той же оговорки) разсмотрѣть способы исключенія ихъ дѣйствій.

Во взятомъ нами примѣрѣ при каждомъ конкретномъ выниманіи шара принимаютъ участіе всѣ причины, и постоянныя и случайныя. Случайныхъ причинъ здѣсь двѣ: движеніе руки, вынимающей шаръ, и распредѣленіе шаровъ въ урнѣ, предшествующее данному опыту; ихъ мы и должны теперь разсмотрѣть. Рука, двигаясь извѣстнымъ образомъ (сообразно законамъ механики), приходитъ самостоятельно въ извѣстное мѣсто, въ которомъ также по самостоятельнымъ, не зависящимъ отъ движенія руки, причинамъ находится опредѣленный шаръ, одинъ изъ 30, опредѣленнаго цвѣта; такимъ образомъ присоединеніе 3-ей и 4-ой случайныхъ причинъ влечетъ за собою появленіе *вполнѣ опредѣленнаго* шара;

дѣйствіе неслучайныхъ причинъ, распредѣленное на шары всѣхъ цвѣтовъ *одновременно*, закрывается дѣйствіемъ случайныхъ причинъ; случайныя причины, такъ сказать, пересѣклись въ одномъ *опредѣленномъ* мѣстѣ и тѣмъ самымъ указали на *опредѣленный* шаръ.

Но вотъ мы вынули шаръ изъ урны, замѣтили его цвѣтъ и вбросили назадъ въ урну: въ результатѣ распредѣленіе шаровъ въ урнѣ получилось уже другое (вообще) чѣмъ до опыта. Вынимаемъ опять шаръ и замѣчаемъ его цвѣтъ: рука при второмъ выниманіи шара двигалась (вообще) по иному пути, чѣмъ въ первый разъ. Производимъ 3-й и 4-ый и т. д. опыты выниманія шара: каждый разъ будемъ вынимать *опредѣленный* шаръ, но приэтомъ каждый же разъ распредѣленіе шаровъ въ урнѣ и движеніе вынимающей руки будутъ различны. При большомъ числѣ повтореній опыта будетъ случаться, что *различные* шары вынутся при *одинаковыхъ* движеніяхъ руки и *одинаковыхъ* распредѣленіяхъ шаровъ въ урнѣ. При безконечно большомъ числѣ испытаній (въ предѣлѣ) каждый изъ 30 шаровъ будетъ вынутъ при *всѣхъ* возможныхъ комбинаціяхъ шаровъ въ урнѣ и *всѣхъ* возможныхъ движеніяхъ руки, т.-е. каждый изъ 30 шаровъ по отношенію къ 3-ей и 4-ой случайнымъ причинамъ станетъ въ совершенно одинаковыя между собою условія; дѣйствія ихъ (случайныхъ причинъ), въ каждомъ конкретномъ опытѣ закрывавшія дѣйствія постоянныхъ причинъ, при совокупности безконечнаго (∞) числа опытовъ парализуются и не закрываютъ этого дѣйствія; числа появленій бѣлаго, чернаго и краснаго шаровъ, будутъ относиться между собою какъ $\frac{5}{30} : \frac{10}{30} : \frac{15}{30}$, т.-е. будутъ опредѣляться только стремленіемъ *постоянныхъ* неслучайныхъ причинъ [22]). Безконечно большого числа повтореній опыта, конечно, быть не можетъ, можетъ быть только болѣе или менѣе значительное число повтореній; но чѣмъ больше число повтореній, тѣмъ отношенія между числами появленій шаровъ различнаго цвѣта должны подходить всё ближе и ближе къ отношеніямъ $\frac{5}{30} : \frac{10}{30} : \frac{15}{30}$. Правильности, которыя мы наблюдаемъ при массовыхъ наблюденіяхъ, являются ничѣмъ инымъ какъ дѣйствіями постоянныхъ причинъ: благодаря большому числу наблюденій, дѣйствія случайныхъ причинъ парализованы, или вѣрнѣе, почти парализованы, и почти во всей силѣ выражается связь наблюдаемаго явленія съ его постоянными неслучайными причинами; на сцену выступаетъ «вѣроятность», какъ характеристика этой связи, и событіе повторяется въ числѣ пропорціональномъ этой вѣроятности.

Только что выведенное нами положеніе есть ничто иное какъ «законъ большихъ чиселъ». Замѣтимъ здѣсь для полной общ-

---

22) Все сказанное здѣсь относительно только трехъ вѣроятныхъ (нетипическихъ) событій, конечно, имѣетъ мѣсто для любого числа подобныхъ явленій. (Мнѣ кажется, что правильнѣе было бы называть эти явленія „вѣроятными", а не „нетипическими", потому что при послѣднемъ названіи является мысль о противоположеніи ихъ типическимъ явленіямъ, чего въ дѣйствительности нѣтъ).

ности вывода, что при всякой причинѣ раздѣлить дѣйствіе на равновозможныя статочности въ принципѣ возможно, лишь бы только эти дѣйствія были на самомъ дѣлѣ дѣйствіями одного и того же свойства причины. Послѣднее требованіе внѣшнимъ образомъ выражается тѣмъ, чтобы появленіе одного явленія исключало возможность появленія другого (напр. жизнь и смерть, орелъ и рѣшетка, шары краснаго, бѣлаго и чернаго цвѣтовъ и т. д.), почему теорія вѣроятностей и требуетъ, чтобы равновозможныя статочности были вмѣстѣ съ тѣмъ и несовмѣстимыя.

Законъ большихъ чиселъ въ теоріи вѣроятностей выводится путемъ аналитическимъ и извѣстенъ подъ именемъ «Теоремы *Якова Бернулли*». Она излагается такъ [23]): При неопредѣленномъ повтореніи испытаній (опытъ и наблюденіе), изъ которыхъ каждое приводитъ къ одному изъ нѣсколькихъ простыхъ событій A, B, C....... (дѣйствія одного и того же свойства причины), вѣроятность, что отношеніе между числами появленій этихъ событій какъ угодно мало разнится отъ отношенія ихъ простыхъ вѣроятностей, быстро приближается къ достовѣрности (къ 1) и въ предѣлѣ, при безконечномъ (∞) числѣ повтореній, равна ей; тогда же (т.-е. при ∞ числѣ повтореній испытанія) и отношенія между простыми вѣроятностями и числами повтореній событій A, B, C....... сравниваются.

Законъ большихъ чиселъ такъ-же всеобщъ, какъ и законъ связи причины со слѣдствіемъ; онъ имѣетъ силу для всѣхъ явленій, въ томъ числѣ и типическихъ, т. е. такихъ, причина которыхъ непремѣнно вызываетъ ихъ осуществленіе (только здѣсь не нужны массовыя наблюденія, такъ какъ нѣтъ дѣйствія случайныхъ причинъ, для исключенія котораго и требуется такое большое число ихъ). Для нихъ вѣроятность $=1$ (достовѣрности) и, слѣдовательно, вѣроятность противоположнаго событія (т. е. событія при своемъ появленіи исключающаго возможность появленія перваго)$=0$; при *всякомъ* числѣ (m) наблюденій между числами (x и y) появленій этихъ событій должно существовать такое соотношеніе $x:y=0:1$, т.-е. $x=0$, а $y=m-0=m$, т. е. во всѣхъ случаяхъ будемъ наблюдать одно и тоже явленіе. Законъ большихъ чиселъ имѣетъ конечно, силу и для общественныхъ явленій: замѣчаемыя правильности при массовыхъ наблюденіяхъ суть

---

[23]) Теорема *Якова Бернулли* собственно представляетъ собою только частный случай болѣе общаго предложенія, доказаннаго *Пуассономъ* и названнаго имъ „закономъ большихъ чиселъ"; но къ явленіямъ общественнымъ онъ въ общемъ видѣ неприложимъ (Лекціи теор. вѣр. проф. *Некрасова* 1886 г., стр. 57). Приходится допустить нѣкоторыя упрощенія, а именно предположить, что вѣроятность во время наблюденія не измѣняется, что будетъ очень близко къ дѣйствительности; тогда теорема *Пуассона* обратится въ вышеизложенную теорему *Як. Бернулли*.

Доказательства теор. Як. Бернулли можно найти: a) Въ „Основаніяхъ Математич. Теоріи Вѣроятностей" *Буняковскаго* (1846 г.), стр. 39 (№ 22) и стр. 48 (№ 24); b) Лекціи проф. *Некрасова* 1886 г., стр. 32—43; c) Способъ наименьшихъ квадратовъ *Маіевскаго* стр. 30–43 и вообще во всякомъ сочиненіи объ общихъ основаніяхъ теоріи вѣроятностей Доказательство это вообще сложно.

дѣйствія неслучайныхъ причинъ, которыя въ теченіи небольшого промежутка времени можно считать постоянными; эти причины дѣйствуютъ совмѣстно съ массою случайныхъ причинъ на *каждое* изъ большой группы лицъ [примѣръ—вліяніе всеобщей рекрутской повинности на брачность]; въ каждомъ конкретномъ случаѣ причины случайныя закрываютъ собою ихъ дѣйствіе, но при *совокупности* большого числа наблюденій дѣйствія случайныхъ причинъ парализуются, и мы наблюдаемъ только [вѣрнѣе почти только] дѣйствія неслучайныхъ причинъ. Такъ какъ причины общественныхъ явленій подвергаются лишь постепеннымъ измѣненіямъ, а нѣкоторыя даже изъ года въ годъ измѣняются очень мало, то и самыя дѣйствія ихъ—наблюдаемыя общественныя явленія—изъ года въ годъ остаются почти неизмѣнными. Этимъ объясняется, напримѣръ, постоянство смертности, самоубійствъ и т. п., которое наблюдается въ близкіе промежутки времени (два слѣдующихъ одинъ за другимъ года). Вспомнимъ еще любимый экономистами примѣръ правильности наблюдаемой при снабженіи большого города или государства предметами необходимости. Теперь она намъ понятна; понятно также почему эта правильность становится, такъ сказать, правильнѣе при расширеніи наблюденій—при переходѣ отъ города къ государству: дѣйствіе случайныхъ причинъ на каждаго отдѣльнаго человѣка, при такомъ почти безконечномъ числѣ наблюденій, почти уничтожено и во всякомъ случаѣ болѣе уничтожено, чѣмъ при наблюденіи одного города. Самое же явленіе мы наблюдаемъ такимъ, какимъ оно было бы, если бы на *каждаго человѣка* дѣйствовали только неслучайныя причины.—Дѣйствія отдѣльнаго человѣка, какъ производителя и потребителя, суть явленія вѣроятныя и при массовомъ наблюденіи въ данный моментъ (когда неслучайныя причины почти постоянны) должны подчиняться закону большихъ чиселъ, т. е. распредѣляться пропорціонально своимъ вѣроятностямъ; при непрерывномъ массовомъ наблюденіи, когда неслучайныя причины измѣняются непрерывно и въ близкіе промежутки времени очень мало, дѣйствія людей, т. е. изслѣдуемое нами общественное явленіе, такъ-же должны измѣняться очень мало,—снабженіе различными предметами необходимости изо дня въ день должно быть приблизительно постояннымъ. Причины явленія, о которомъ мы говоримъ здѣсь, измѣняются особенно медленно, потому-то на немъ и замѣчается особенно ясно указанныя выше постоянство и ежедневно повторяющаяся правильность.

IV. Мы знаемъ, что вѣроятность характеризуетъ связь съ даннымъ нетипическимъ явленіемъ его постоянныхъ неслучайныхъ причинъ, знаемъ также, что причины общественныхъ явленій измѣняются постепенно и въ небольшой промежутокъ времени могутъ считаться приблизительно постоянными, почему вѣроятности недалекаго прошлаго и близкаго будущаго будутъ приблизительно равны вѣроятности настоящаго; а это, въ свою очередь, даетъ намъ возможность судить о такихъ близкихъ временахъ, на основаніи вѣроятности настоящаго, что̀ можетъ имѣть большое практическое значеніе. Слѣдовательно, и практическій и теоретическій интересъ заставляютъ насъ заняться вопросомъ о способѣ опредѣленія вѣроятности даннаго событія. Опредѣлять ее непосредственно—путемъ счета всѣхъ равновозможныхъ статочностей и затѣмъ статочностей, благопріятствующихъ появленію даннаго событія, далеко не всегда возможно (практически): только въ самыхъ простыхъ случаяхъ, и то съ большимъ рискомъ сдѣлать ошибку, можно это сдѣлать. Поэтому пользуются инымъ способомъ, изложеніемъ котораго займемся ниже; но предварительно выведемъ одно соотношеніе.

Если при опытѣ или наблюденіи возможно осуществленіе одного изъ событій A_1, A_2.... A_m, вѣроятности которыхъ будутъ соотвѣтственно: p_1, p_2,.... p_m, то, согласно теоремѣ *Я. Бернулли*, при большомъ числѣ M повтореній этого опыта число появленій каждаго изъ указанныхъ событій будетъ приблизительно равно соотвѣтствующей части числа M, если раздѣлить его на m частей пропорціонально $p_1 : p_2 : p_3 :.... : p_m$. Сдѣлаемъ это вычисленіе. Для A_1 соотвѣтственная часть M (обозначимъ ее черезъ α_1) будетъ равна $\alpha_1 = \frac{M}{p_1+p_2+..+p_m} . p_1$. Но что такое представляетъ собою сумма $p_1+p_2+p_3..+p_m$? Это сумма вѣроятностей *всѣхъ* явленій, которыя возможно наблюдать при опытѣ. Обозначимъ число всѣхъ равновозможныхъ статочностей черезъ a, статочности же, благопріятствующія каждому изъ событій A_1, A_2,... A_m въ отдѣльности, черезъ a_1, a_2, a_3... a_m (очевидно $a_1+a_2+....+a_m=a$), тогда $p_1=\frac{a_1}{a}$ (отношенію числа статочностей, благопріятствующихъ появленію событія, къ числу всѣхъ возможныхъ статочностей), $p_2=\frac{a_2}{a}$, $p_3=\frac{a_3}{a}$, ... $p_m=\frac{a_m}{a}$.

Сумма же $p_1+p_2+...+p_m=\frac{a_1}{a}+\frac{a_2}{a}+\frac{a_3}{a}+..+\frac{a_m}{a}=\frac{a_1+a_2+a_3+..+a_m}{a}=$ $=\frac{a}{a}=1$. Такимъ образомъ $\alpha_1=\frac{M}{p_1+p_2+...+p_m}.p_1=M.p_1$ точно такъ же

$$\alpha_2=\frac{M}{p_1+p_2+...+p^m}.p_2=M.p_2$$

....

$$\alpha_m=\frac{M}{p_1+p_2+...+p_m}.p_m=M.p_m.$$

Это соотношеніе намъ и нужно было получить. Оно говоритъ:

1) Для того, чтобы узнать приблизительно число повтореній извѣстнаго событія A_k, вѣроятность котораго есть p_k, при значительномъ числѣ M повтореній испытанія, нужно число всѣхъ опытовъ (M) помножить на вѣроятность этого событія (p_k); произведеніе $M . p_k$ и опредѣлитъ это число. И это соотношеніе справедливо для всѣхъ явленій, въ томъ числѣ и для типическихъ: въ нихъ $p_k=1$, слѣдовательно, число повтореній событія при M опытахъ опредѣлится произведеніемъ $M . 1$=числу всѣхъ опытовъ.

2) Вѣроятности p_1, $p_2 \ldots p_m$ будутъ соотвѣтственно равны:

$$p_1 = \frac{\alpha_1}{M}$$

$$p_2 = \frac{\alpha_2}{M}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p_m = \frac{\alpha_m}{M}.$$

То есть для того, чтобы опредѣлить вѣроятность p_k нѣкотораго событія A_k должно произвести большое число *(M)* испытаній (опытовъ или наблюденій), сосчитать число (α_k) испытаній, въ которыхъ появилось событіе A_k, и послѣднее число раздѣлить на общее число испытаній; дробь $\frac{\alpha_k}{M} = p_k$ и опредѣлитъ приблизительно эту вѣроятность [24]). Но нужно помнить, что опыты и наблюденія при этомъ должны быть произведены такъ, чтобы *неслучайныя причины* все время оставались *однѣ и тѣже*: того требуетъ самое содержаніе понятія вѣроятности.

Только что указанный способъ опредѣленія вѣроятности основанъ на теоремѣ *Як. Бернулли*, а она говоритъ, что при конечномъ, хотя бы и большомъ числѣ опытовъ, отношенія чиселъ повторенія событій только *приблизительно* равны отношеніямъ соотвѣтствующихъ вѣроятностей; дѣйствія случайныхъ причинъ только при безконечномъ числѣ опытовъ абсолютно перестаютъ существовать; слѣдовательно, и наше выраженіе $\frac{\alpha_k}{M}$ только приблизительно вѣрно опредѣляетъ вѣроятность. Мы должны заняться вопросомъ объ отысканіи предѣловъ разницы этой приближенной вѣроятности отъ истинной.

Вѣроятность *(p)*, что точная вѣроятность (x_1) даннаго событія A_1 отличается отъ найденной только что указаннымъ способомъ не больше какъ на $\pm\omega_1$, т. е, что истинная вѣроятность (x_1) заключается между предѣлами $\frac{\alpha_1}{M} \pm \omega_1$, будетъ равна нѣкоторому выраженію, въ которое входитъ T (обозначимъ его черезъ $\varphi\,[T]$) [25]), гдѣ T въ свою очередь равно $\frac{\omega_1 . M . \sqrt{M}.}{\sqrt{2\alpha_1 . (M-\alpha_1)}}$ [26]), откуда $\omega_1 = T . \sqrt{\frac{2\alpha_1 . (M-\alpha_1)}{M^3}}$. Въ этой формулѣ: α_1—извѣстно (на-

---

[24]) Это предложеніе доказано инымъ путемъ у *Буняковскаго* (Основанія Матем. Т. В.) стр. 48—49, № 25.

[25]) *Буняковскій.* Основ. Мат. Т. В., на стр. 159 $p = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^T e^{-t^2} dt$

[26]) ibid., стр. 159, 4-ая строчка снизу. Только у *Буняковскаго* идетъ рѣчь о двухъ противоположныхъ событіяхъ, формула же здѣсь даваемая справедлива для любого числа возможныхъ случаевъ.

блюденное число повтореній событій A_1 при M испытаніяхъ); M—извѣстно (число произведенныхъ испытаній); остается опредѣлить T. Оно опредѣляется изъ уравненія: $p = \varphi\ (T)$. Мы отыскиваемъ *предѣлы* возможныхъ уклоненій и потому собственно для p должны были бы взять значеніе 1, т. е. опредѣлить ω_1 подъ условіемъ, чтобы *всѣ* возмножныя разницы x отъ $\frac{\alpha_1}{M}$ *достовѣрно* заключались между $\pm\ \omega_1$; но ограничимся приближеніемъ [27]), а именно: помня, что достовѣрность есть вѣроятность событія, которому благопріятствуютъ *всѣ* возможныя статочности, будемъ считать вѣроятность нѣсколько меньшую 1 (единицы) за достовѣрность, т. е. примемъ, что случай, когда *не всѣ* статочности благопріятствуютъ событію, однако благопріятствующихъ слишкомъ много сравнительно съ неблагопріятствующими, и потому крайне трудно ожидать непоявленія извѣстнаго событія, — такой случай примемъ за случай достовѣрности. Какую дробь можно признавать такою приближенною достовѣрностью объ этомъ мнѣнія различны; *Пуассонъ*, а съ нимъ и *Ав. Юл. Давидовъ* [28]) принимаютъ ее равною $\frac{199}{200}$, тогда T опредѣляется изъ уравненія $\frac{199}{200} = \varphi\ (T)$. Вычисленное изъ этого уравненія [29]) T равно $1_{,9849226}$ (приблизительно $T=2$), а слѣдовательно

$$\omega_1 = 1_{,9849226} \cdot \sqrt{\frac{2\alpha_1(M-\alpha_1)}{M^3}}$$

Для остальныхъ вѣроятностей:

$$\omega_2 = 1_{\cdot 9849226} \cdot \sqrt{\frac{2\alpha_2(M-\alpha_1)}{M^3}}$$

$$\omega_3 = 1_{,9849226} \cdot \sqrt{\frac{2\alpha_3(M-\alpha_3)}{M^3}} \text{ и т. д.}$$

По этой формулѣ *А. Ю. Давидовымъ* вычислена таблица для опредѣленія ω [30]); но предпочтительнѣе пользоваться прямо при-

---

27) При $p=1$ T равно безконечности, а съ нимъ вмѣстѣ и ω; это видно изъ формулы *(A)* Основ. Матем. Т. В. *Буняковскаго* стр. 412: $\varphi\,(\infty) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi} = 1$. Подобный результатъ получается оттого, что при выводѣ формулы $\varphi\ (T)$ для упрощенія расширены предѣлы ошибокъ; это расширеніе предѣловъ при опредѣленіи вѣроятностей различныхъ ошибокъ не даетъ замѣтныхъ неточностей.

28) Брошюра „Употребленіе выводовъ теор. вѣроятн. въ статистикѣ" *А. Ю. Давидовъ*, стр. 22.

29) У *Буняковскаго* (Основ. М. Т. В. на стр. 473—474) и у проф. *Маіевскаго* (Способъ наименьшихъ квадр. на стр. 110—111) приложены таблицы для вычисленія p при различныхъ T, онѣ же могутъ служить и для вычисленія T. Часто для вычисленія T полагаютъ $p=0_{,5}$ (хотя я не вижу для этого никакого основанія) напримѣръ Wittstein „Matematische Statistik" (1867 г.) стр. 10 и др.; лекц. проф. *Некрасова* 1887 г., стр. 102 и др., тогда $T=0_{,4769462}$.

30) Ее можно найти въ Журналѣ Минист. Нар. Просв. 1855 г., № 11.

веденною формулою, чѣмъ таблицей, потому во 1-хъ, что формулу эту очень легко вычислить помощью логариѳмовъ, — значительно легче, чѣмъ данныя наблюденія привести къ такому виду, чтобы ими можно было воспользоваться для отысканія въ таблицѣ соотвѣтствующихъ ω; а во 2-хъ величины ω, опредѣленныя помощью таблицы (повторяю: путемъ довольно сложнымъ), уступаютъ полученнымъ путемъ непосредственнаго вычисленія въ точности. Повидимому, при составленіи таблицы *А. Ю. Давидовъ* имѣлъ въ виду лицъ, не могущихъ свободно владѣть логариѳмическими таблицами, лицъ «незнакомыхъ съ математическими вычисленіями».

На страницѣ 13 мы получили, что:

$$\alpha_1 = M \cdot p_1$$
$$\alpha_2 = M \cdot p_2$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\alpha_m = M \cdot p_m$$

α_1 есть *наблюденное* число повтореній событія A_1 при большомъ числѣ M испытаній, p_1 вѣроятность этого (A_1) событія, которую мы опредѣляемъ изъ опыта; α_2, $\alpha_3 \dots \alpha_m$ и p_2, $p_3 \dots p_m$ будутъ имѣть соотвѣтственно тѣ-же значенія для событій A_2, $A_3 \dots A_m$. Но истинная вѣроятность x, можетъ быть между предѣлами:

$$x_1 = p_1 \mp \omega_1$$
$$x_2 = p_2 \mp \omega_2$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$x_m = p_m \mp \omega_m$$

Слѣдовательно, если бы не было вліянія случайныхъ причинъ, то A_1 повторилось бы α' разъ при M испытаніяхъ, причемъ $\alpha' = M \cdot x_1$ равно числу наблюденій, помноженному на истинную вѣроятность событія A_1, т. е. α' можетъ заключаться между предплами:

$$M \cdot (p_1 \mp \omega_1) = M \cdot p_1 \mp \omega_1 \; M = \alpha_1 \mp \omega_1 \cdot M = \alpha_1 \mp 1{,}_{9849226} \cdot \sqrt{\frac{2\alpha_1(M-\alpha_1)}{M}}.$$

Тоже самое для A_2

$$\alpha'' = \alpha_2 \mp 1{,}_{9849226} \cdot \sqrt{\frac{2\alpha_2(M-\alpha_2)}{M}}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\alpha^{(m)} = \alpha_m \mp 1{,}_{9849226} \cdot \sqrt{\frac{2\alpha_m \cdot (M-\alpha_m)}{M}}.$$

Т. е. если мы при M испытаніяхъ событіе A_1 наблюдали α_1 разъ, A_2 наблюдали α_2 разъ и т. д., то можемъ сказать, что эти *числа* $(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_m)$ могутъ разниться отъ чиселъ α', $\alpha'' \dots \alpha^{(m)}$, произведенныхъ дѣйствіемъ только однѣхъ постоянныхъ причинъ, на величины заключенныя между предѣлами [31]):

---

[31]) Сравнимъ этотъ выводъ со словами проф. *Эрисмана* (Курсъ Гигіены 1882 г., стр. 25), гдѣ уважаемый профессоръ, не опредѣливши M, зная только α_1, хочетъ опредѣлить ошибку, т. е. не выяснивши связи постоянныхъ неслучайныхъ причинъ съ ихъ дѣйствіемъ, хочетъ указать уклоняющее вліяніе случайныхъ причинъ на это послѣднее.

$$\text{для } \alpha_1 \ldots \mp 1{,}_{99849226} \cdot \sqrt{\frac{2\alpha_1 \cdot (M-\alpha_1)}{M}}$$

$$\text{для } \alpha_2 \ldots \mp 1{,}_{9849226} \cdot \sqrt{\frac{2\alpha_2 \cdot (M-\alpha_2)}{M}}$$

....

$$\text{для } \alpha_m \ldots \mp 1{,}_{99849226} \cdot \sqrt{\frac{2\alpha_m (M-\alpha_m)}{M}},$$

т. е. всѣ числа повтореній событія A_1, заключенныя между предѣлами $\alpha_1 \mp 1{,}_{9849226} \cdot \sqrt{\frac{2\alpha_1 \cdot (M-\alpha_1)}{M}}$ мы можемъ отнести къ дѣйствію однѣхъ и тѣхъ же постоянныхъ причинъ.

Мы теперь знаемъ какъ опредѣляется вѣроятность (характеръ связи *неслучайной*, *неизмѣняющейся* во время опыта причины съ дѣйствіемъ, съ наблюдаемымъ явленіемъ).—Статистика, имѣя дѣло съ нетипическими, вѣроятными явленіями, должна опредѣлять ее, а для этого она должна производить массовыя наблюденія. Достовѣрныя общественныя явленія, или близкія къ достовѣрнымъ, не требуютъ массовыхъ наблюденій и не входятъ въ кругъ явленій, которыми занимается статистика. Но должно помнить, что массовыя наблюденія имѣютъ своею цѣлью только исключеніе дѣйствія случайныхъ причинъ; гдѣ ихъ нѣтъ, тамъ массовыя наблюденія не нужны.

8024

Большое практическое значеніе законъ большихъ чиселъ имѣетъ въ страхованіи. Теорема *Якова Бернулли* даетъ намъ возможность почти съ достовѣрностью, т. е. почти не ошибаясь въ своихъ разсчетахъ (почти не встрѣчая противоположнаго тому, на что разсчитываемъ), разсуждать о будущемъ [32]) извѣстнаго событія, зная его настоящую вѣроятность. Принимая напримѣръ на страхъ корабль въ суммѣ a, Общество страхованія обязывается уплатить страхователю эту сумму въ случаѣ, если корабль погибнетъ, между тѣмъ какъ за всякій застрахованный корабль оно получаетъ, въ видѣ страховой преміи, нѣкоторую сумму b; вѣроятность (p) крушенія корабля опредѣляется изъ большого числа наблюденій выше указаннымъ способомъ. Слѣдовательно, при большомъ числѣ M застрахованныхъ кораблей Общество получитъ доходъ равный $b \cdot M$, а расходъ его будетъ равенъ $a \cdot M \cdot p$ т. е. прибыль его будетъ равна $bM - aMp = M \cdot (b - ap)$; на каждый корабль придется прибыли $b - ap$. Предъявляя различныя

---

[32]) Выше было замѣчено, что нѣкоторыя неслучайныя причины измѣняются очень медленно, слѣдовательно, очень медленно измѣняются и вѣроятности ихъ дѣйствій, почему мы можемъ вѣроятность недалекаго прошлаго переносить на настоящее время и на близкое будущее. Кромѣ того нѣкоторыя вѣроятности, несомнѣнно измѣняясь современемъ, измѣняются, однако, въ смыслѣ благопріятномъ для страховыхъ Обществъ (напримѣръ вѣроятности пожара), почему разсчеты Обществъ относительно будущаго времени, основанныя на вѣроятностяхъ настоящаго времени, имѣютъ еще большую основательность, чѣмъ разсчеты о настоящемъ же времени.

требованія къ только что полученному выраженію (которое называется «математической выгодой», т.-е. той выгодой, той прибылью, которую Общество разсчитываетъ въ *будущемъ* получить отъ одного застрахованнаго корабля), Общество можетъ опредѣлить и размѣръ прибыли (%) и размѣръ страховой премiи, размѣръ основного капитала и т. д. [33]). Практика показываетъ, что эти разсчеты вполнѣ оправдываются.

Теперь мы исчерпали понятiе вѣроятности въ главныхъ чертахъ: мы знаемъ, что она характеризуетъ связь постоянной неслучайной причины съ ея дѣйствiемъ (вѣроятнымъ явленiемъ), есть, такъ сказать, извѣстная характеристическая черта событiя, опредѣляемая связью его съ постоянными причинами; обнаруживается она, при большомъ числѣ наблюденiй, тѣмъ, что событiе повторяется пропорцiонально своей вѣроятности. Но *Д. С. Милль* [34]) говоритъ: «Мы должны помнить, что вѣроятность событiя не есть свойство самаго событiя, а только одно названiе той степени основанiя, которая есть у насъ или у кого-либо другого, чтобы ожидать это событiе. Вѣроятность событiя для одного лица не то же самое, что вѣроятность *того же* событiя для другого лица или для перваго по прiобрѣтенiи имъ добавочныхъ свѣдѣнiй. Существующая для меня вѣроятность, что лицо, извѣстное мнѣ только по имени, умретъ въ теченiе года, совершенно измѣнится, если мнѣ вслѣдъ затѣмъ скажутъ, что оно находится въ послѣднемъ стадiумѣ чахотки. Однако, это извѣстiе отнюдь не измѣняетъ самаго событiя и ни одной изъ причинъ, отъ которыхъ оно зависитъ. Каждое событiе само въ себѣ достовѣрно, а не вѣроятно: еслибъ намъ было извѣстно всё, то мы или положительно знали бы, что событiе наступитъ, или положительно знали бы, что оно не наступитъ. А вѣроятность его для насъ означаетъ степень, въ которой наше теперешнее знанiе оправдываетъ ожиданiе, что событiе наступитъ». Подобный взглядъ *Д. С. Милль* приписываетъ математикамъ [35])—правъ ли онъ? Я думаю: нѣтъ. Если бы вѣроятность событiя зависѣла исключительно отъ нашихъ знанiй о немъ и вмѣстѣ съ измѣненiемъ ихъ сама измѣнялась, еслибы она одновременно для различныхъ лицъ была различна, то какъ могла бы вѣроятность оказывать на явленiе такое дѣйствiе, что оно повторяется, при большомъ числѣ испытанiй, пропорцiонально этой вѣроятности (какъ доказываетъ Теорема *Якова Бернулли* и въ чемъ согласны всѣ математики)? Законъ большихъ чиселъ есть не-

---

[33]) Теорiя Страхованiя изложена у *Буняковскаго* (Основ. Мат. Т. В.) стр. 214—239. На страницахъ же 239—243, а также 62—67 доказано то свойство *большого* капитала, которое можетъ быть названо „большей экономической силой" его, на которомъ и основанъ прогрессивный подоходный налогъ. Конечно, это сдѣлано примѣнительно къ Страховымъ Учрежденiямъ, но можетъ быть распространено и на всѣ другiя предпрiятiя.

[34]) Система Логики. Т. II, стр. 57—72. Наша выписка сдѣлана изъ 58 стр.

[35]) Стат. Лог. Т. II, стр. 58.

опровержимое доказательство того, что вѣроятность есть свойство самаго явленія. Вѣроятность не есть результатъ неполнаго знанія—благодаря неполному знанію явленія мы не вполнѣ точно опредѣляемъ его вѣроятность,—вѣроятность есть извѣстное свойство явленія, свойство, оцѣнить которое можно только близко и основательно познакомившись съ явленіемъ. «Опредѣленіе вѣроятностей — говоритъ *А. Ю. Давидовъ* [36]) — основано на исчисленіи *всѣхъ* случаевъ, какъ благопріятствующихъ, такъ и неблагопріятствующихъ появленію какого-нибудь событія; но оно предполагаетъ, кромѣ того, еще *равную возможность* этихъ случаевъ: оно требуетъ, однимъ словомъ, *подробнаго знанія всѣхъ обстоятельствъ*, отъ которыхъ явленіе зависитъ».

Ав. Ю. Давидовъ [37]) тоже разсматриваетъ вѣроятности, о которыхъ говоритъ *Миллъ*, но, называя ихъ «субъективными вѣроятностями», утверждаетъ, что онѣ «служатъ только для опредѣленія нашихъ мнѣній въ тѣхъ случаяхъ, въ которыхъ наши дѣйствія приводятся дѣйствительно или умственно въ связь съ явленіями, но ихъ никогда не должно употреблять, когда явленіе разсматривается независимо отъ насъ»; онъ считаетъ такія вѣроятности только характеристикой связи неслучайныхъ причинъ съ нашими *психическими* явленіями [38]).—Далѣе (на той же стр.) онъ говоритъ: «Первыя (вѣроятности явленія, объективныя вѣроятности) означаютъ отношенія *во внѣшнемъ мірѣ существующія*, послѣднія (субъективныя) зависятъ только отъ нашихъ познаній». «Объективныя (вѣроятности) выражаютъ нѣкоторое *свойство самаго явленія*, субъективныя выводятся изъ ограниченнаго числа наблюденій и не имѣютъ ничего общаго съ самымъ явленіемъ, но служатъ только руководствомъ для нашихъ мнѣній при *дѣйствіяхъ зависящихъ отъ явленія*» [38]).

Замѣчаніе *Милля*, что «каждое событіе, само въ себѣ, достовѣрно, а не вѣроятно» тоже несправедливо. 1) При выводѣ закона даннаго явленія мы должны (какъ сказано выше) освободить послѣднее отъ дѣйствія случайныхъ причинъ, которыя именно и придаютъ ему такой индивидуально-опредѣленный характеръ; достигнуть этого мы можемъ или путемъ дедукціи (какъ это мы сдѣлали въ нашемъ примѣрѣ съ урной, содержащей шары трехъ цвѣтовъ), или же—путемъ большого числа наблюденій; а тутъ уже говорить о достовѣрности нельзя; что́ мы и видѣли на нашемъ примѣрѣ. 2) Кромѣ того мы видѣли выше, что по существу между вѣроятностью и достовѣрностью нѣтъ противоположенія, которое здѣсь, повидимому, предполагаетъ *Д. С. Миллъ*.

---

[36]) Таже брошюра, стр. 11.

[37]) Таже брошюра, стр. 12—15, 17—18.

[38]) И въ этой сферѣ онѣ ничѣмъ не отличаются отъ объективныхъ вѣроятностей: онѣ—„объективныя вѣроятности психическихъ явленій" и указываютъ связь между постоянной причиной (внѣшнимъ явленіемъ) и дѣйствіемъ (нашимъ психическимъ явленіемъ).

II.

Индукція.

Перейдемъ теперь къ приложенію индуктивныхъ методовъ къ даннымъ статистики, т. е. къ числовымъ даннымъ. Раньше уже было замѣчено, что непосредственное примѣненіе въ статистикѣ находятъ только три индуктивныхъ метода: 1) методъ совпаденія, 2) косвенный методъ разницы и 3) методъ сопутствующихъ измѣненій. Къ изложенію названныхъ методовъ мы теперь и приступимъ, начиная съ метода совпаденія.

Прежде чѣмъ обратиться къ характеристикѣ методовъ, замѣтимъ, что различіе между достовѣрными явленіями и вѣроятными есть только количественное и что приложеніе индуктивныхъ методовъ изслѣдованія къ явленіямъ вѣроятнымъ такъ же возможно, какъ оно возможно по отношенію къ явленіямъ достовѣрнымъ. Въ самомъ дѣлѣ, въ то время какъ въ случаѣ достовѣрнаго событія за причиною *непремѣнно* слѣдуетъ только *одно опредѣленное* явленіе, въ случаѣ вѣроятнаго событія за причиною *непремѣнно* слѣдуетъ *то или другое* изъ цѣлой группы ихъ; но если мы выключимъ дѣйствіе случайныхъ причинъ [39]) и посмотримъ на вѣроятное явленіе, какимъ оно будетъ, если станетъ зависѣть только отъ причинъ неслучайныхъ и постоянныхъ, то увидимъ, что число наблюденій распредѣлится между различными видами слѣдствія пропорціонально ихъ вѣроятностямъ, и эта связь причины со слѣдствіемъ (даннымъ вѣроятнымъ явленіемъ) будетъ *достовѣрной*, т. е. мы можемъ сказать, что постоянная неслучайная причина, вызывающая вѣроятное явленіе, имѣетъ какъ бы нѣсколько свойствъ, изъ которыхъ каждое *достовѣрно* связано съ *опредѣленнымъ* числомъ появленій *даннаго* событія на *опредѣленное* число наблюденій [40]). Мы, напримѣръ, говоримъ о смертности 27 на 1000, 30 на 1000 въ годъ въ данной мѣстности; этимъ мы указываемъ только на то, что здѣсь неслучайныя постоянныя причины имѣютъ свойство почти достовѣрно [41]) вызывать появленіе 27—30 смертей (явленіе вѣроятное) на 1000 наблюденій (сумма живыхъ и мертвыхъ=числу наблюденій—зарегистровокъ). Связь причины съ вѣроятными явленіями выражается, слѣдовательно, въ нѣсколькихъ достовѣрныхъ связяхъ съ различными видами явленій: достовѣрно, что одно событіе (бѣлый шаръ) появится извѣстное число разъ на данное число наблюденій; достовѣрно, что другое событіе (черный шаръ) появится другое опредѣленное число разъ и т. д.; между

---

[39]) Для чего необходимо ∞ число опытовъ или дедукція.

[40]) Поэтому-то вѣроятныя явленія и требуютъ при своемъ описаніи указанія не только числа ихъ появленій, но и всего числа произведенныхъ наблюденій. Напримѣръ число мужчинъ при распредѣленіи населенія по поламъ выражается въ %, число смертей въ ‰.

[41]) „Почти",—такъ какъ большое число наблюденій значительно исключаетъ дѣйствіе случая, но всё же не окончательно исключаетъ.

тѣмъ какъ въ случаѣ достовѣрнаго событія можетъ быть только одна единственная опредѣленная связь. Какъ видно изъ сказаннаго, если мы будемъ разсматривать опредѣленный видъ слѣдствія и захотимъ опредѣлить связь этого явленія съ его причиной, то будемъ имѣть случай совершенно подобный тому, какъ еслибы мы изслѣдовали связь извѣстнаго свойства причины съ его достовѣрнымъ слѣдствіемъ; никакого различія между ними нѣтъ: поэтому-то и употребляются одни и тѣже индуктивные методы для обнаруженія причинной связи и въ случаѣ вѣроятныхъ и въ случаѣ достовѣрныхъ явленій. Только при выводѣ заключеній относительно вѣроятнаго явленія необходимо предварительно освободить его отъ дѣйствія случайныхъ причинъ, для чего необходимо большое число наблюденій (вотъ почему статистика и нуждается въ массовыхъ наблюденіяхъ); это—единственное усложненіе техники умозаключенія относительно вѣроятныхъ явленій сравнительно съ достовѣрными; но съ результатами массовыхъ наблюденій надъ вѣроятными явленіями мы можемъ поступать совершенно такъ, какъ и съ результатами наблюденій надъ явленіями достовѣрными. Большое число наблюденій даетъ результаты только *приблизительно* свободные отъ случайностей [42]), наши заключенія изъ наблюденій надъ вѣроятными явленіями только приблизительны; но, какъ это хорошо указано *С. Джевонсомъ* («Основы Науки», стр. 428 — 452), и данныя о достовѣрныхъ событіяхъ, добытыя *путемъ наблюденія*, могутъ быть также только приблизительными, т. е. приблизительность не есть черта принадлежащая исключительно вѣроятнымъ явленіямъ, и вѣроятныя явленія не только въ предѣлѣ (при совокупности ∞ числа наблюденій), но и при достаточно большомъ числѣ наблюденій будутъ находиться въ условіяхъ совершенно однородныхъ съ явленіями достовѣрными.

А. Методъ совпаденія.

«Если двумъ или болѣе случаямъ изслѣдуемаго явленія обще лишь одно обстоятельство, и только въ этомъ обстоятельствѣ совпадаютъ всѣ случаи, то оно есть причина (или дѣйствіе) даннаго явленія» [43]).

Слѣдовательно: 1) этотъ методъ приложимъ только къ случаямъ *постоянной* причины или *постояннаго* слѣдствія: разъ мы знаемъ, что причина (или дѣйствіе) измѣняются во время наблюденія, приложеніе этого метода невозможно; 2) это—методъ исключенія [44]),—«послѣдовательнаго исключенія *различныхъ* обстоятельствъ, сопровождающихъ явленіе въ данномъ случаѣ, съ цѣлью открыть тѣ изъ обстоятельствъ, которыя могутъ отсутствовать не предотвращая явленія» (случайныя причины и ихъ дѣй-

---

[42]) Для полнаго исключенія необходимо было бы ∞ число наблюденій.
[43]) *Д. С. Милль.* Сост. Лог. Т. I, стр. 446.
[44]) *Д. С. Милль.* Сост. Логики Т I, стр. 447.

ствія), чтобы «рѣшеніе вопроса поставить въ зависимость отъ взаимнаго отношенія лишь остальныхъ» обстоятельствъ, такъ какъ «всё, могущее быть исключеннымъ, не связано съ явленіемъ никакимъ закономъ». Этотъ же методъ обнаруженія причинной связи, очевидно приложимъ и тогда, когда мы знаемъ, что наблюдаемыя нами явленія ab, ac, ad, ak суть совокупныя дѣйствія нѣкоторой постоянной неслучайной *намъ неизвѣстной* причины A и случайныхъ причинъ. Путемъ исключенія мы приходимъ здѣсь къ тому положенію, что только a есть дѣйствіе неслучайной причины A, а b, c, d и k суть уклоненія, производимыя случайными причинами. Съ подобнаго рода случаями мы и имѣемъ главнымъ образомъ дѣло въ статистикѣ. Если, напримѣръ, мы должны по даннымъ какой-нибудь переписи опредѣлить размѣръ семьи въ данномъ районѣ, находящемся во всѣхъ частяхъ своихъ приблизительно въ одинаковыхъ условіяхъ,—размѣръ, который имѣла бы она подъ дѣйствіемъ только постоянныхъ неслучайныхъ причинъ, то можемъ приложить методъ совпаденія, такъ какъ:

1) хотя неслучайная причина A (совокупность неслучайныхъ причинъ) намъ и неизвѣстна, но мы имѣемъ полное основаніе считать ее постоянною, ибо время производства переписи слишкомъ незначительно для того, чтобы она могла замѣтно измѣниться;

2) на размѣръ каждой отдѣльной семьи A_1, A_2, A_3.... дѣйствуютъ кромѣ постоянной причины A еще случайныя причины α_1, α_2, α_3...., дѣйствіе которыхъ должно быть нами исключено.

Такимъ образомъ мы имѣемъ:

Причины:	ихъ дѣйствія:
$A\alpha_1$	A_1
$A\alpha_2$	A_2
$A\alpha_3$	A_3.

Данныя A_1, A_2, A_3.... въ статистикѣ—числовыя (величины каждой отдѣльной семьи), и потому одновременное дѣйствіе постоянной причины A и случайныхъ выразится только тѣмъ, что наблюденныя величины A_1, A_2, A_3..... будутъ нѣсколько разниться отъ того размѣра семьи a, какой былъ бы наблюденъ, если бы дѣйствовала только постоянная причина, т. е.

$$
\begin{aligned}
A_1 &= a + b \\
A_2 &= a - c \\
A_3 &= a - d \\
&\ldots\ldots \\
A_m &= a + k.
\end{aligned}
$$

Замѣчая въ ряду причинъ постоянное присутствіе причины A (зная, что тамъ есть какая-то, неизвѣстная намъ, постоянная причина A), а въ ряду дѣйствій замѣчая постоянно величину a, мы методомъ совпаденія приходимъ къ тому заключенію, что a есть дѣйствіе постоянной причины и, не будь случайныхъ причинъ, величина каждой семьи были бы равны a. Какъ же мы можемъ опредѣлить это a, т. е., какъ мы можемъ исключить дѣйствія случайныхъ причинъ?

Извѣстно: 1) что случайныя причины могутъ влiять на дѣйствіе неслучайной и въ положительномъ, и отрицательномъ направленіи,—и увеличивать и уменьшать дѣйствіе нашей постоянной причины A; при этомъ 2) незначительныя уклоненія, производимыя ими въ ту и другую сторону, бываютъ чаще, чѣмъ значительныя, равныя же, абсолютно, уклоненія—равновѣроятны и встрѣчаются, потому, при большомъ числѣ наблюденій приблизительно въ одинаковомъ количествѣ (законъ большихъ чиселъ). Поэтому, если мы сложимъ большое число полученныхъ наблюденій, то полученную сумму можемъ разбить на слѣдующія три части (логически различныя):

$$A_1 + A_2 + \ldots. + A_m = \Sigma\Delta_1 + m\ a - \Sigma\Delta_2,$$

разумѣя подъ $\Sigma\Delta_1$ сумму положительныхъ уклоненій отъ дѣйствія постоянныхъ причинъ, подъ $m\ a$—сумму дѣйствій только постоянной причины и подъ $\Sigma\Delta_2$—сумму абсолютныхъ значеній (безъ отношенія къ знаку) отрицательныхъ уклоненій. Такъ какъ $\Sigma\Delta_1$ и $\Sigma\Delta_2$ при большомъ числѣ наблюденій заключаютъ въ себѣ равныя слагаемыя въ одинаковомъ числѣ (законъ большихъ чиселъ), то $\Sigma\Delta_1 - \Sigma\Delta_2 =$ приблизительно 0 и сумма

$$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots. + A_m = am,$$

откуда $a = \frac{A_1 + A_2 + \ldots. + A_m}{m}$. Такимъ образомъ для опредѣленія изъ данныхъ наблюденія дѣйствія постоянной неслучайной причины нужно сложить полученные результаты и сумму раздѣлить на число наблюденныхъ случаевъ; тогда получимъ:

$$\frac{A_1 + A_2 + A_3 + \ldots}{m} = \frac{ma + (b - c - d + \ldots..)}{m} = a + \frac{b - c - d + \ldots..}{m};$$

второй членъ этой суммы, непрерывно уменьшаясь съ увеличеніемъ m (числа наблюденныхъ случаевъ), при $m = \infty$ (въ предѣлѣ) дѣлается равнымъ нулю [45]). И такъ при безконечномъ числѣ наблюденій, взявши среднее ариѳметическое результатовъ этихъ наблюденій, мы *окончательно* исключили бы дѣйствіе случайныхъ причинъ; но безконечнаго числа наблюденій произвести нельзя, m можетъ быть только *очѐнь* большимъ и, слѣдовательно, членъ $\frac{b - c - d + \ldots}{m}$ можетъ быть только *очень* малымъ, но не равнымъ нулю [46]);—необходимо опредѣлить предѣлы возможной ошибки,

---

[45]) Теорія вѣроятностей говоритъ: „вѣроятность предположенія, что среднее ариѳметическое изъ погрѣшностей (дѣйствій случайныхъ силъ) m результатовъ измѣреній (наблюденій) весьма мало, при большомъ m близка къ достовѣрности и стремится къ ней при возрастаніи m до ∞". Лекціи Теор. Вѣроят. Проф. *Некрасова* за 1887 г., стр. 91.

[46]) Если при какомъ-нибудь наблюденіи были получены данныя слишкомъ уклоняющіяся отъ средняго ариѳметическаго, то такъ какъ слишкомъ большія уклоненія мало вѣроятны, т. е. очень рѣдки и потому очень мало шансовъ за то, что при дальнѣйшихъ новыхъ наблюденіяхъ встрѣтятся уклоненія подобныхъ же размѣровъ, но обратныя по знаку и компенсируютъ наблюденныя большія уклоненія, такія наблюденія лучше оставить и выводить среднее изъ остальныхъ.

которую мы дѣлаемъ, допуская, что онъ $= 0$ и что среднее ариѳметическое *точно* выражаетъ дѣйствіе постоянной неслучайной причины. (Замѣтимъ, что ошибка въ опытѣ есть дѣйствіе случайной причины и всё, что можно сказать о ней, можно говорить и о дѣйствіи всякой случайной причины: формулы теоріи вѣроятностей главнымъ образомъ выведены для опредѣленія ошибокъ, но ихъ можно прилагать и къ разсужденію о дѣйствіи случайныхъ причинъ вообще). Такъ-же какъ и при опредѣленіи возможной разницы между приближенной вѣроятностью и истинной (стран. 15), находимъ, что вѣроятность i того, что дѣйствіе постоянной причины заключается между предѣлами [47] $\frac{\Sigma A}{m} \pm \alpha$, будетъ равна нѣкоторому выраженію, въ которое входитъ τ [обозначимъ его черезъ $\varphi(\tau)$]; τ здѣсь будетъ равно [48])

$$\tau = \alpha \, . \, \frac{1}{\sqrt{2} \, . \, \sqrt{\frac{\Sigma\Delta^2}{m}}} \, . \, \sqrt{m}$$

$$\text{откуда } \alpha = \frac{\tau}{\sqrt{m}} \, . \, \sqrt{2} \, . \, \sqrt{\frac{\Sigma\Delta^2}{m}}$$

1) τ опредѣляется изъ уравненія $i = \varphi(\tau)$, которое, на томъ же основаніи, какъ и раньше (стр. 15), приметъ видъ $\frac{199}{200} = \varphi(\tau)$. Таблица въ Теоріи Вѣроятностей *Буняковскаго* стр. 473—474 или *Маіевскаго* «Способъ наименьшихъ квадратовъ» стр. 110—111 даетъ намъ тотъ же результатъ [49]) $\tau = 1{,}9849226$;

$$\text{тогда } \alpha = \frac{1{,}9849226}{\sqrt{m}} \, . \, \sqrt{2} \, . \, \sqrt{\frac{\Sigma\Delta^2}{m}} = \frac{2{,}80709}{\sqrt{m}} \, . \, \sqrt{\frac{\Sigma\Delta^2}{m}} \, .$$

2) $\Sigma\Delta^2 = \Sigma(\xi - A)^2 = (\xi - A_1)^2 + (\xi - A_2)^2 + \ldots + (\xi - A_m)^2$, гдѣ $A_1 = a + b$, $A_2 = a - c$, $A_3 = a - d$ и т. д., т. е. представляютъ числовыя данныя *каждаго* наблюденія, а ξ—среднее ариѳметическое изъ всѣхъ m наблюденій A_1, A_2, $A_m \ldots$, т. е. $\xi = \frac{A_1 + A_2 + \ldots + A_m}{m}$; m—опредѣленное число статистическихъ данныхъ, среднее ариѳметическое которыхъ опредѣляется.

Вычислять α по этой формулѣ непосредственно удобно только въ случаяхъ, подобныхъ взятому проф. *Янсономъ* на 473 стр. его Теоріи Статистики, т. е. когда одни и тѣже числа при наблюденіи повторяются много разъ, а *различныхъ* результатовъ немного;

---

47) $\Sigma A = A_1 + A_2 + \ldots + A_m =$ суммѣ единичныхъ наблюденій. $i = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int^{\tau} e^{-t^2} dt.$

48) Лекціи Теор. Вѣроят. проф. *Некрасова* 1887 г., стр. 103, стр. 106. ур. (12) и стр. 102 ур. (6), Маіевскій „Способъ наим. квадр.“ стр. 82.

49) Если положить $i = 0{,}5$, то $\tau = 0{,}4769462$.

тогда, сдѣлавши разъ вычитанія, возвышаемъ разности въ квадратъ, помножаемъ ихъ на соотвѣтствующее число повтореній даннаго числа и результатъ, записавши, откладываемъ на счетахъ. Для облегченія вычисленій удобно пользоваться таблицами квадратовъ (онѣ есть: у *Маіевскаго* «Способъ наименьшихъ квадратовъ» въ концѣ; въ таблицахъ пятизначныхъ логариѳмовъ *G. Gauss*; у *de-Bruno* въ «*Traité élémentaire du calcul des erreurs*»; онѣ приведены и въ концѣ нашей статьи). Опредѣливши непосредственнымъ вычитаніемъ разности

$$\begin{array}{l} \xi - A_1 = \zeta' \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \zeta_1 \\ \xi - A_2 = \zeta'' \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \zeta_2 \\ .\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ \xi - A_m = \zeta^{(m)} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \zeta_m \end{array}$$

должно написать ихъ столбцомъ (какъ онѣ написаны здѣсь) и затѣмъ въ таблицѣ квадратовъ подыскать соотвѣтствующіе квадраты $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_m$ величинъ $\zeta', \zeta'' \ldots \zeta^{(m)}$, которые (записавъ какъ указано здѣсь), можно удобно сложить помощью счетъ (записываніе нужно дѣлать для провѣрки). Но дѣло въ томъ, что таблицы квадратовъ вычислены для сравнительно небольшихъ величинъ (до 10—12, если ограничиваться двумя десятичными знаками), такъ что въ нихъ не для всякаго уклоненія можно найти соотвѣтствующій квадратъ; впрочемъ, отбросивши слишкомъ большія ошибки (стр. 23), мы найдемъ въ нихъ почти всѣ нужные квадраты. Составляются таблицы квадратовъ или совершенно такъ же, какъ таблицы логариѳмовъ, только вмѣсто логариѳмовъ чиселъ въ нихъ находятся квадраты ихъ до четвертаго десятичнаго знака; или такъ, какъ составлены таблицы приложенныя въ концѣ нашей статьи: одинъ столбецъ (N) указываетъ числа, другой, стоящій съ нимъ рядомъ вправо (N^2) — соотвѣтствующіе квадраты и т. под., поэтому я описывать ихъ не буду, а просто сдѣлаю три примѣра, пользуясь ими.

1) Опредѣлить квадратъ числа $1,_{77}$? Въ нашей таблицѣ противъ числа 177 находимъ его квадратъ 31329, отдѣляя 4 знака находимъ что квадратъ 1,77 равенъ 3,1329; у *Маіевскаго* на стр. 264, въ лѣвомъ крайнемъ столбцѣ, обозначенномъ сверху буквой N (число), находимъ число $1,_{77}$, въ столбцѣ таблицы обозначенномъ вверху 0, въ одной строкѣ съ $1,_{77}$, находимъ квадратъ его $3,_{1329}$.

2) Отыскать квадратъ $17,_7$? Въ нашей таблицѣ находимъ, что квадратъ 177 равенъ 31329, слѣдовательно квадратъ $17,_7$ равенъ $313,_{29}$; у Маіевскаго на стр. 264 находимъ, что квадратъ $1,_{77}$ равенъ $3,_{1329}$; число $17,_7$ больше $1,_{77}$ въ 10 разъ, слѣдовательно его квадратъ будетъ въ 100 разъ больше квадрата послѣдняго, т. е. равенъ $313,_{29}$.

3) Опредѣлить квадратъ $1,_{775}$? На той же страницѣ у Маіевскаго въ столбцѣ таблицы, обозначенной вверху цифрой 5, противъ $1,_{77}$ находимъ квадратъ его съ приближеніемъ до 4 десятичнаго знака $3,_{1506}$.

Таблицы P_p, помѣщенныя у Маіевскаго въ правомъ крайнемъ столбцѣ имѣютъ совершенно тоже значеніе какъ и въ логариѳмическихъ таблицахъ.

Но иногда по вышеприведенной формулѣ вычислять α крайне неудобно, тогда можно пользоваться одной изъ слѣдующихъ видовъ той же формулы.

$$\text{I.}\quad \Sigma\Delta^2 = (\xi - A_1)^2 + (\xi - A_2)^2 + .. + (\xi - A_m)^2 =$$

$$\begin{array}{l} \xi^2 - 2A_1\,\xi + A_1{}^2 + \\ + \xi^2 - 2A_2\,\xi + A_2{}^2 + \\ + \,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. + \\ + \xi^2 - 2A_m\,\xi + A_m{}^2 \\ \hline m\,\xi^2 - 2\xi\,(A_1 + A_2 + \ldots + A_m) + \Sigma A^2, \end{array}$$

но $A_1 + A_2 + .. + A_m = m\,.\,\xi$, т. е. вмѣсто послѣдняго выраженія получимъ:

$$m\,\xi^2 - 2\xi\,.\,m\xi + \Sigma A^2 = \Sigma A^2 + m\xi^2 - 2m\xi^2 = \Sigma A^2 - m\xi^2,$$

почему

$$\alpha = \frac{2{,}80704}{\sqrt{m}}\,.\,\sqrt{\frac{\Sigma A^2}{m} - \xi^2}\,.$$

Эта формула очень удобна когда A (различные результаты наблюденій)—цѣлыя числа и невелики: возвысивъ въ квадратъ каждое изъ нихъ, въ умѣ или по таблицѣ квадратовъ, можно легко помощью счетъ ихъ сложить, тогда какъ ξ при этихъ условіяхъ можетъ быть дробью и возвышать въ квадратъ разности между наблюденіями и ξ, т. е. дробныя величины, было бы затруднительнѣе.

II. Менѣе точная, но за то годная (по удобству) для всѣхъ случаевъ формула можетъ быть написана такъ.

Беремъ самый большій результатъ наблюденій A_k и самый меньшій A_l, составляемъ изъ нихъ выраженія $(\xi - A_k)^2$ и $(\xi - A_l)^2$, сравниваемъ ихъ между собою и, замѣтивши, положимъ, что $(\xi - A_l)^2$ изъ нихъ больше, приходимъ къ тому заключенію, что это есть самое большее слагаемое суммы $\Sigma(\xi - A)^2$; поэтому произведеніе $m\,.\,(\xi - A_l)^2 > \Sigma(\xi - A)^2$. Слѣдовательно, если въ формулѣ, опредѣляющей α, мы замѣнимъ $\Sigma(\xi - A)^2$ произведеніемъ $m\,.\,(\xi - A_l)^2$, то получимъ, что $\alpha' = \frac{2{\cdot}80704}{\sqrt{m}}\,.\,\sqrt{\frac{m.(\xi - A_l)^2}{m}} = \frac{2{,}80704}{\sqrt{m}}\,.\,(\xi - A_l)$ будетъ больше $\alpha = \frac{2{\cdot}80704}{\sqrt{m}}\,.\,\sqrt{\frac{\Sigma(\xi - A)^2}{m}}$; а извѣстно, что расширяя предѣлы возможной ошибки, мы увеличиваемъ вѣроятность, что ошибка лежитъ въ этихъ предѣлахъ [50]). Такимъ образомъ шансовъ за то, что истинная разница лежитъ между предѣлами $\pm\,\alpha'$, больше даже, чѣмъ за то, что она лежитъ между $\pm\,\alpha$, но за то послѣдняя (α) указываетъ болѣе узкіе предѣлы; хотя должно

---

[50]) Это прямо видно изъ I-ой таблицы у *Буняковскаго* Мат. Осн. Теор. Вѣр. стр. 473—474: съ увеличеніемъ τ увеличивается и i (вѣроятность); а какъ видно изъ формулы для α на стр. 24 (нашей статьи) съ увеличеніемъ τ увеличивается и α.

замѣтить, что при большомъ m разница между α и α' будетъ мала; напримѣръ для случая, взятаго *Янсономъ* на 473 стр. она меньше 0.187. Поэтому нашей формулой:

$$\alpha' = \frac{2{\cdot}80704}{\sqrt{m}} \cdot (\xi - A_l)$$

можно пользоваться съ большимъ удобствомъ.

III. При большомъ m (большомъ числѣ наблюденій) можно также пользоваться для вычисленія средней квадратической ошибки $\left(\sqrt{\frac{\Sigma\Delta^2}{m}}\right)$ слѣдующимъ приближеннымъ выраженіемъ [51]):

$$\sqrt{\frac{\Sigma\Delta^2}{m}} = 1{,}_{2543} \cdot \frac{\Sigma\Delta}{m},$$

здѣсь $\Sigma\Delta^2 = (\xi - A_1)^2 + (\xi - A_2)^2 + \ldots + (\xi - A_m)^2$ (стр. 24), а $\Sigma\Delta$ = суммѣ уклоненій каждаго изъ наблюденій отъ средняго ариѳметическаго ξ, взятыхъ съ положительными знаками (Если напримѣръ имѣемъ наблюденія 5, 6, 8, 9, то $\xi = \frac{5+6+8+9}{4} = 7$ и

$$\left.\begin{aligned} \xi - A_1 &= 7 - 5 = 2 \\ \xi - A_2 &= 7 - 6 = 1 \\ \xi - A_3 &= 7 - 8 = -1 \\ \xi - A_4 &= 7 - 9 = -1 \end{aligned}\right\}; \quad \begin{aligned} &\text{сумма же } \Sigma\Delta = \\ &= 2 + 1 + 1 + 2 = 6). \end{aligned}$$

Тогда формула для опредѣленія вѣроятной ошибки α будетъ такова.

$$\alpha = \frac{2{,}_{80704}}{\sqrt{m}} \cdot \sqrt{\frac{\Sigma\Delta^2}{m}} = \frac{2{,}_{80704}}{\sqrt{m}} \cdot 1{:}_{2543} \cdot \frac{\Sigma\Delta}{m} = \frac{3{,}_{5209}}{(m)^{3/2}} \cdot \Sigma\Delta.$$

Среднія ариѳметическія тѣмъ точнѣе, т. е. даютъ результаты тѣмъ болѣе свободные отъ дѣйствій случайности, чѣмъ меньше предѣлы вѣроятныхъ ошибокъ. Какъ видно изъ приведенныхъ формулъ, предѣлы вѣроятныхъ ошибокъ уменьшаются пропорціонально корню квадратному изъ числа наблюденій и, очевидно, при $m\ \infty$, т. е. въ предѣлѣ, всѣ будутъ равны нулю: среднія ариѳметическія будутъ давать *абсолютно точный* результатъ, будутъ выражать дѣйствія постоянныхъ неслучайныхъ причинъ, *вполнѣ свободныя отъ вліянія случайныхъ причинъ*.

Ошибка, которая вѣроятна для единичнаго испытанія, всегда въ $\sqrt{m}$ разъ больше, чѣмъ ошибка вѣроятная для средняго ариѳметическаго изъ m испытаній, поэтому для выраженія ошибки отдѣльнаго наблюденія могутъ служить формулы:

1) $A = 2{,}_{80704} \cdot \sqrt{\frac{\Sigma\Delta^2}{m}}$ (согласно формулѣ стр. 24).

2) $A = 2{,}_{80704} \cdot \sqrt{\frac{\Sigma A^2}{m} - \xi^2}$ (согласно форм. стр. 26 § I).

и 3) $A = 3{,}_{5209} \cdot \frac{\Sigma\Delta}{m} \ldots$ (согласно форм. стр. 27 § III).

---

51) *Маіевскій*, „Способъ наименьшихъ квадратовъ", стр. 88.

Формула, приведенная на стр. 27 § II, не годится для опредѣленія предѣла ошибки отдѣльнаго испытанія, такъ какъ допущенное въ ней упрощеніе дѣлаетъ ее достаточно точной только благодаря тому, что въ знаменателѣ есть большое число $\sqrt{m}$.

Слѣдовательно, если различныя среднія, имѣющія въ виду опредѣлить дѣйствіе *однѣхъ и тѣхъ же* постоянныхъ причинъ, разнятся на величину, лежащую въ предѣлахъ, опредѣленныхъ помощью формулъ данныхъ на стр. 24, 26 и 27, то мы можемъ сказать, что имѣемъ много за то, что эти среднія дѣйствительно результаты *однѣхъ и тѣхъ же* причинъ; если же разность выходитъ за предѣлы, опредѣляемыя нашими формулими, то очень мало статочностей будетъ благопріятствовать тому предположенію, что наша средняя опредѣляетъ дѣйствіе однѣхъ и тѣхъ же постоянныхъ причинъ (предположеніе, что явленіе выходя въ своемъ уклоненіи за предѣлы, указанныя нашими формулами, зависитъ отъ тѣхъ же постоянныхъ причинъ, имѣетъ за себя вѣроятность $1 - \frac{199}{200} = \frac{1}{200}$). Тоже самое должно сказать относительно единичныхъ наблюденій, если они отличаются отъ средней и между собою на величины, большія опредѣленныхъ помощью формулъ на стр. 27.—Убѣдившись, что среднія достаточно точны, мы должны стараться, путемъ анализа предшествующихъ обстоятельствъ обнаружить постоянныя причины явленія, (которыя часто бываютъ намъ неизвѣстны); но это далеко не всегда удается сдѣлать, и статистикамъ приходится просто указать среднее, какъ характеристику явленія, не говоря объ отдѣльныхъ причинахъ его. Какъ относительно среднихъ, такъ и относительно единичныхъ наблюденій должно держаться того правила, что разъ они выходятъ за указанные предѣлы, необходимо тщательно изслѣдовать, не будетъ ли это уклоненіе указывать на присутствіе среди причинъ *новой* постоянной причины.

Математическимъ формуламъ, въ особенности съ такимъ богатымъ содержаніемъ, какъ формулы, даваемыя Теоріей Вѣроятностей, необходимо приписывать опредѣленное, точное значеніе и никоимъ образомъ не относиться къ нимъ формально, какъ это часто дѣлаютъ въ статистикѣ. Нужно всегда имѣть въ виду ту цѣль, ради которой производится извѣстный рядъ математическихъ дѣйствій: иногда путемъ *однихъ и тѣхъ же* дѣйствій мы достигаемъ совершенно *различныхъ* разультатовъ: содержаніе умозаключенія зависитъ отъ содержанія посылокъ, а не формы его. Ариѳметическому среднему, какъ очень часто употребляемому выраженію, повидимому, чаще другихъ придаютъ невѣрное толкованіе, поэтому я позволю себѣ еще нѣсколько остановиться на его значеніи. Не всякая сумма, раздѣленная на число слагаемыхъ, даетъ намъ результатъ логическаго метода совпаденія, а только такая, въ которой всѣ слагаемыя подчинены дѣйствію однѣхъ и тѣхъ же неслучайныхъ постоянныхъ причинъ. Этотъ результатъ часто смѣшиваютъ съ такъ называемымъ «фиктивнымъ среднимъ» [52]).

---

[52]) О немъ очень хорошо сказано у *С. Джевонса* „Основы Науки", стр. 338—343.

Послѣднее не есть результатъ индуктивнаго метода совпаденія, а представляетъ собою нѣкоторую величину, въ дѣйствительности ничему не соотвѣтствующую, но которою можно замѣнить другую величину (или цѣлый рядъ ихъ), при рѣшеніи *нѣкоторыхъ* вопросовъ относительно послѣдней. Это—фикція, «признаніе за извѣстнымъ событіемъ (явленіемъ) такого содержанія, котораго оно въ дѣйствительности не имѣетъ», какъ говорятъ юристы, но съ сохраненіемъ однако извѣстныхъ чертъ, согласныхъ съ дѣйствительностью, именно тѣхъ, которыя подлежатъ изслѣдованію. Хорошимъ примѣромъ фикціи можетъ служить слѣдующее. Въ разсужденіяхъ о силѣ тяжести совокупное дѣйствіе всѣхъ частицъ земнаго шара мы замѣняемъ фиктивнымъ дѣйствіемъ одной точки, находящейся въ центрѣ земли и сосредочивающей въ себѣ всю массу земли. Предположеніе это не соотвѣтствуетъ дѣйствительности, однако оно для *нашей цѣли*, вполнѣ *замѣняетъ* собою дѣйствительно существующее притяженіе земли, «оно позволяетъ намъ сдѣлать гипотетическое упрощеніе задачи и избѣжать сложности не дѣлая ошибки» [53]) говоритъ *Джевонсъ*. Говоря, что извѣстное государство затрачиваетъ на народное образованіе *столько-то на каждаго жителя*, мы вовсе не хотимъ утверждать, что государство *на каждое лицо* дѣйствительно столько затрачиваетъ или, что затрачиваемая имъ *на каждое лицо* сумма на самомъ дѣлѣ стремится къ такому размѣру и была бы ей равна, если бы не было дѣйствія случая; мы просто этой цифрой измѣряемъ заботы государства о народномъ просвѣщеніи и въ такой удобной формѣ можемъ легко произвести сравненіе положенія этого дѣла въ различныхъ государствахъ.

Всё изложенное подъ названіемъ «методъ совпаденія» или методъ среднихъ относится только къ тѣмъ явленіямъ, которыхъ постоянныя, неслучайныя причины—однѣ и тѣ же и въ которыхъ всѣ различія мы имѣемъ полное основаніе отнести къ дѣйствію случайныхъ причинъ; вся цѣль этого пріема—выключить дѣйствіе случайныхъ причинъ; и если бы случайныхъ причинъ не было, мы *дѣйствительно* получали бы при наблюденіи числа, равныя среднимъ ариѳметическимъ, къ нимъ явленія *дѣйствительно* стремятся. Въ сказанномъ и заключается всё различіе между среднимъ, какъ результатомъ индукціи, и фиктивнымъ среднимъ, которое не выражаетъ ничего въ дѣйствительности существующаго, а только есть удобная замѣна дѣйствительности гипотетическимъ случаемъ.—Нужно точно различать эти два вида среднихъ, для чего необходимо всегда имѣть въ виду ту цѣль, ради которой дѣлается сложеніе и дѣленіе суммы на число слагаемыхъ.

Но съ другой стороны и дѣйствительному среднему придаютъ сплошь и рядомъ такое значеніе какъ будто оно должно въ точности выражать дѣйствительно, *конкретно наблюдаемыя* величины: между тѣмъ какъ среднее ариѳметическое можетъ только съ большей

---

[53]) *С. Джевонсъ*. „Основы Науки“, Стр. 341.

или меньшей степенью точности выражать тотъ случай, который мы наблюдали бы, *если бы случайности были устранены.* Зная напримѣръ, что *средняя* стоимость единицы какого-либо товара равна 5 руб., мы отнюдь не можемъ утверждать, что семья, потребляющая 100 единицъ его, затрачиваетъ на это *именно* 500 р.

В. Косвенный методъ разницы.

Приложенiе метода разницы непосредственно къ изслѣдованiю общественныхъ явленiй, какъ сказано выше (стр. 2), невозможно, такъ какъ невозможны та опредѣленность и изолированность фактовъ въ этой области, какихъ требуетъ этотъ методъ. Но вотъ методъ совпаденiя (методъ среднихъ въ статистикѣ) даетъ намъ возможность достигнуть (въ большей или меньшей степени) этой опредѣленности и изолированности постоянныхъ причинъ и ихъ дѣйствiй, и потому методъ разницы можно приложить къ даннымъ, предварительно обработаннымъ методомъ совпаденiя. «Если два случая наступленiя явленiя, или болѣе, представляютъ лишь одно общее обстоятельство,—говоритъ *Д. С. Милль* [54])—между тѣмъ какъ два, или болѣе, случая ненаступленiя явленiя не представляютъ ничего общаго, кромѣ отсутствiя этого обстоятельства, — то обстоятельство это, въ которомъ только и разнятся два ряда случаевъ, есть дѣйствiе или причина явленiя, или необходимая часть его причины».

Слѣдовательно, разсматриваемый методъ, въ своемъ конечномъ дѣйствiи (гдѣ собственно и примѣняется методъ разницы), не говоритъ уже о случайныхъ причинахъ, такъ какъ всѣ случайныя причины исключены предшествовавшимъ методомъ совпаденiя; онъ имѣетъ дѣло только съ неслучайными постоянными причинами и цѣль его состоитъ въ обнаруженiи дѣйствiя отдѣльной причины (*постоянной*), или—причины извѣстнаго дѣйствiя, а не въ исключенiи случайныхъ причинъ. Поэтому мы должны при подборѣ матерiала, который хотѣли бы подвергнуть обработкѣ путемъ косвеннаго метода разницы, заботиться о томъ, чтобы въ одной изъ двухъ среднихъ величинъ выражалось дѣйствiе совокупности причинъ *А*, *В* и *С*, въ другой совокупности причинъ *В*, *С*. Для этого необходимо, чтобы каждое изъ слагаемыхъ одного ряда было свободно отъ дѣйствiя обстоятельства, предполагаемаго причиной, и подвергнуто дѣйствiю всѣхъ остальныхъ обстоятельствъ, а слагаемыя другого ряда подвергнуты дѣйствiю всѣхъ обстоятельствъ, какъ это сдѣлано напримѣръ у *Кетлэ* при изслѣдованiи вопроса о влiянiи законныхъ и незаконныхъ рожденiй на отношенiе мужскаго и женскаго пола въ числѣ родившихся [55]). «*Кетлэ* приводитъ слѣдующую таблицу, въ которой показано сколько мальчиковъ рождается *среднимъ числомъ* на 100 дѣвочекъ:

---

[54]) *Д. С. Милль*, Сост. Логик., Т. I, стр. 453.

[55]) Курсъ лекцiй Статистики профессора *А. И. Чупрова,* (1888 г.), стр. 419—421.

	Среди всѣхъ родившихся.	Среди незаконнорожден.	Среди законнорожден.
Франція	$106,_5$	$104,_8$	$106,_7$
Австрія	$106,_1$	$104,_3$	$106,_2$
Пруссія	$105,_9$	$120,_3$	$106,_2$
Вюртембергъ	$105,_7$	$103,_5$	106
Швеція	$104,_6$	103	106

Первый столбецъ заключаетъ въ себѣ совмѣстныя дѣйствія слѣдующихъ причинъ:

A — законнорожденность,

B — незаконнорожденность,

второй:

B — незаконнорожденность,

третій:

A — законнорожденность.

Изъ сравненія напримѣръ для Франціи, данныхъ перваго и второго столбца ($106,_5$ и $104,_8$), заключаемъ, что законнорожденность (причина *A*) увеличиваетъ шансы за рожденіе мальчика.

Во взятомъ примѣрѣ возможно при наблюденіи (регистраціи) исключить изъ подъ дѣйствія причины «законнорожденность» каждое наблюдаемое явленіе; большое же количество наблюденій даетъ намъ возможность думать, что *только* эта причина и вліяетъ на различіе величинъ среднихъ (та изолированность дѣйствія опредѣленной причины, которой требуетъ методъ разницы). Но должно имѣть въ виду, что «косвенный методъ разницы» возможно прилагать только къ такимъ случаямъ, гдѣ неслучайныя причины, о которыхъ здѣсь говорится, въ предѣлахъ опыта не измѣняются или по крайней мѣрѣ измѣняются такъ незначительно, что этимъ измѣненіемъ можно пренебречь, иначе невозможно было бы примѣненіе метода совпаденія.

Конечно, всё сказанное о методѣ совпаденія имѣетъ силу и для косвеннаго метода разницы. Методъ разницы является такъ сказать, продолженіемъ метода совпаденія: когда обнаружено дѣйствіе постоянныхъ неслучайныхъ причинъ въ совокупности, естественно заняться вопросомъ о характерѣ дѣйствія каждой изъ входящихъ въ эту совокупность причинъ.

C. Методъ сопутствующихъ измѣненій.

До сихъ поръ мы говорили только о причинахъ постоянныхъ, т. е. такихъ, которыя не измѣняются въ предѣлахъ опыта: и законъ большихъ чиселъ, и методъ совпаденія и косвенный методъ разницы—всё это предполагало, что неслучайныя причины неизмѣнны, постоянны. Но въ дѣйствительности причины общественныхъ явленій постоянно, непрерывно измѣняются во времени и пространствѣ: въ теченіе мало-мальски значительнаго промежутка времени, на болѣе или менѣе значительной площади земной поверхности считать причины общественныхъ явленій постоянными, неизмѣнными нельзя. Съ измѣненіемъ причинъ (вообще) измѣняются и ихъ дѣйствія, сообразно этому измѣненію, и вотъ по этимъ-то соизмѣненіямъ и возможно съ большей или меньшей достовѣрностью обнаружить причинную связь явлений; мало того, открывши неизмѣнную причинную связь (для чего можно пользоваться дедукціей и любымъ методомъ индукціи), возможно опредѣлить качество этой связи именно показать: какое измѣненіе въ дѣйствіи соотвѣтствуетъ извѣстному измѣненію въ причинѣ и наоборотъ. «Всякое явленіе—говоритъ *Д. С. Милль* [56])—измѣняющееся какимъ-либо образомъ всякій разъ, когда другое явленіе измѣняется особеннымъ образомъ, есть или причина, или дѣйствіе этого явленія, или соединено съ нимъ какимъ-либо фактомъ связи причины со слѣдствіемъ». Но нужно имѣть въ виду, что [57]) «хотя большею частью справедливо, что за измѣненіемъ причины слѣдуетъ измѣненіе дѣйствія, однако методъ сопутствующихъ измѣненій не предполагаетъ этого, какъ аксіому. Онъ требуетъ только обратнаго предложенія: что всякій фактъ, за измѣненіемъ котораго непремѣнно слѣдуютъ измѣненія дѣйствія, долженъ быть причиною (или связанъ съ причиною) этого дѣйствія». Затѣмъ «когда [58]) сначала (какимъ бы то ни было образомъ) обнаружено, что извѣстный предметъ производитъ извѣстное дѣйствіе, то можно съ пользою прибѣгнуть къ методу сопутствующихъ измѣненій, для опредѣленія того, сообразно какому закону количества или различныя отношенія дѣйствія слѣдуютъ за количествами или различными отношеніями причины».

Такимъ образомъ методъ сопутствующихъ измѣненій служитъ двоякой цѣли: во 1-хъ—обнаруженію причинной связи, прямой или косвенной, во 2-хъ—опредѣленію того «сообразно какому закону количества или разнообразныя отношенія дѣйствія слѣдуютъ за количествами или различными отношеніями причины». Сообразно этому и мы раздѣлимъ наше разсужденіе на двѣ части: въ первой мы разсмотримъ способы обнаруженія существованія причинной зависимости, которые практикуются въ статистикѣ [59]), во второй разсмотримъ методы опредѣленія закона измѣненія дѣйствія при измѣненіи причины.

I.

Все приложеніе метода сопутствующихъ измѣненій, дѣлаемое обыкновенно статистиками, состоитъ въ сравненіи двухъ рядовъ чиселъ, изъ которыхъ одинъ характеризуетъ причину, другой—слѣдствіе, съ цѣлью подмѣтить наглядное совпаденіе ихъ. „Сравненіе рядовъ есть необходимое внѣшнее средство приложенія метода сопутствующихъ измѣненій“ говоритъ проф. *Янсонъ* [60]).

---

[56]) Система Логики. Т. I, стр. 459.

[57]) ibid. стр. 461.

[58]) *Милль*. Система Логики. Т I, стр. 461.

[59]) Обстоятельное изложеніе этого отдѣла можно найти въ извѣстномъ сочиненіи проф. *Янсона* „Теорія Статистики“ (1887 г.), стр. 490—500.

[60]) Теорія Статист. стр. 490.

Для этого нужно: во 1-хъ, „преобразовать (ряды), т. е. привести (ихъ) къ одному основанію; во 2-хъ, ознакомиться съ ихъ свойствами и въ 3-хъ найти въ сравниваемыхъ рядахъ такіе признаки, совпаденіе которыхъ опредѣляло бы степень совпаденія ихъ."—Разсмотримъ каждый изъ этихъ трехъ пунктовъ въ отдѣльности.

1) «Приведеніе рядовъ къ одному общему основанію—говорится въ Теоріи Статистики [61]), —необходимо потому, что безъ этого невозможно измѣреніе колебаній или уклоненій величинъ ряда, тогда какъ такое измѣреніе есть одно изъ требованій метода сопутствующихъ измѣненій. Приведеніе рядовъ къ одному основанію можетъ быть дѣлаемо троякимъ способомъ: или по суммѣ членовъ ряда, или по одной изъ величинъ ряда (лучше всего наибольшей), или наконецъ по средней величинѣ. Величина, взятая за единицу измѣренія колебаній ряда, принимается за 100, 1000 или болѣе, смотря по надобности,—для того, чтобы по крайней мѣрѣ первая или двѣ первыя цифры преобразованныхъ величинъ были числами цѣлыми—и затѣмъ посредствомъ простыхъ пропорцій вычисляется отношеніе каждаго члена ряда къ взятому основанію. Въ сравниваемыхъ рядахъ, само собою разумѣется, основаніе должно быть взято одно и тоже». Если, напримѣръ, мы имѣемъ рядъ чиселъ, выражающихъ цѣну ржи въ маркахъ за 50 кил. въ разные годы (для Пруссіи) [62]), при чемъ средняя величина чиселъ ряда будетъ $= 8_{,28}$, а сами числа будутъ $10_{,40}$, $11_{,45}$, $10_{,64}$ и т. д., то соотвѣтственныя числа редуцированнаго (преобразованнаго) ряда опредѣлятся изъ пропорцій:

$$x : 1000 = 10_{,40} : 8_{,28}\,; \qquad x = 10_{,40} \cdot \frac{1000}{8_{,28}} = 1255$$

откуда:

$$x : 1000 = 11_{,45} : 8_{,28}\,; \qquad x = 11_{,45} \cdot \frac{1000}{8_{,28}} = 1382$$

$$x : 1000 = 10_{,64} : 8_{,28}\,; \qquad x = 10_{,64} \cdot \frac{1000}{8_{,28}} = 1284$$

и т. д. и т. д.

Вотъ что разумѣютъ статистики подъ словомъ «приведеніе къ одному основанію», которое они считаютъ необходимымъ, «потому, что безъ этого невозможно измѣреніе колебаній или уклоненій величинъ ряда».

Мнѣ кажется, что подобнаго значенія придавать этому преобразованію нельзя. На самомъ дѣлѣ, что представляютъ собою числа 1255, 1382, 1284 и т. д. сравнительно съ $10_{,40}$, $11_{,45}$, $10_{,64}$ и т. д.?—Это—тѣ же самыя числа ($10_{,40}$; $11_{,45}$; $10_{,64}$ и т. д.) помноженныя на одно и тоже значительное число $\frac{1000}{8_{,28}}$; такое помноженіе дѣлается исключительно съ цѣлью сдѣлать замѣтнѣе для глаза разность послѣдовательныхъ членовъ ряда, ничего дру-

[61]) Теорія Статистики *Янсона*, стр. 491.
[62]) ibid.

гого этимъ мы не достигаемъ: увеличивая въ нѣсколько разъ числа, мы тѣмъ самымъ *увеличиваемъ* въ то-же число разъ и разности между ними. Правда эти числа указываютъ, что цифры, наблюденныя въ данныхъ конкретныхъ случаяхъ, больше средняго ариѳметическаго *въ* $1_{,255}$; $1_{,382}$; $1_{,284}$ и т. д. *разъ* $\left(\frac{1255}{1000}\right.$ и т. д.); но это обстоятельство не даетъ особой логической силы нашему пріему: судить о характерѣ измѣненій ряда (возростаетъ ли онъ или убываетъ), мы можемъ только по увеличенію или уменьшенію чиселъ $1_{,255}$, $1_{,382}$ и т. д., чтӧ можемъ сдѣлать, очевидно, съ такимъ же удобствомъ пользуясь числами непосредственныхъ наблюденій; а при такомъ примитивномъ способѣ обнаруженія характера измѣненій членовъ ряда мы только и можемъ сказать, что рядъ или *возрастаетъ* или *убываетъ*; надѣяться же опредѣлить съ помощью его точный *численный законъ* измѣненій чиселъ ряда, мы, конечно, не можемъ: этотъ законъ вообще и не выражался бы черезъ среднее ариѳметическое, или наибольшій членъ ряда: они не имѣютъ къ нему никакого логическаго отношенія. Такимъ образомъ очевидно, что возьмемъ ли мы за основаніе редукціи самый большій членъ ряда, или среднее ариѳметическое, или сумму членовъ ряда, или, наконецъ, даже любое число, мы будемъ имѣть положительно одинаковыя средства обнаружить (путемъ редуцированныхъ рядовъ) характеръ измѣненія явленія. Тѣмъ болѣе непонятенъ подобный взглядъ статистиковъ на это преобразованіе, что сами они въ немъ видятъ только одну цѣль: сдѣлать болѣе замѣтными *для глаза* различія, незамѣтныя въ небольшихъ числахъ, полученныхъ путемъ непосредственнаго наблюденія. «Даже поверхностное сравненіе (рядовъ) въ первоначальной и редуцированной формѣ—говоритъ проф. *Янсонъ* [63])—убѣждаетъ въ преимуществахъ послѣдней въ *дѣлѣ сравненія рядовъ.*»—«Послѣдніе [64]) два столбца цифръ (редуцированные ряды) показываютъ съ *большей ясностью*, чѣмъ первые два, зависимость между разсматриваемыми явленіями. Въ теченіе первыхъ 19 лѣтъ, до 1872 г. включительно, колебанія хлѣбныхъ цѣнъ *сопровождаются прямо пропорціональными* колебаніями относительнаго числа кражъ (рѣчь идетъ о зависимости числа кражъ отъ дороговизны хлѣба)». Изъ приведенныхъ словъ видно, что приведеніемъ имѣлось въ виду сдѣлать только болѣе ясными не такъ бросающіяся въ глаза однохарактерныя измѣненія (одновременное увеличеніе и уменьшеніе) членовъ двухъ рядовъ. Намъ кажется, что было бы удобнѣе, не говоря объ «основаніяхъ», просто помножить ряды на круглыя цифры 100, 1000 и затѣмъ производить сравненіе ихъ; отъ этого ариѳметическія дѣйствія значительно упростились бы, а съ логической стороны наше сравненіе ничего бы не потеряло, такъ какъ единственная цѣль, которую можно здѣсь преслѣдовать, это сдѣлать *замѣтнѣе* мало замѣтныя раньше измѣненія. «Весьма различные законы измѣненія могутъ

---

63) Теорія Статистики Стр. 491.
64) ibid, стр. 492.

давать численные результаты, которые *въ тѣсныхъ предѣлахъ*, лишь мало различаются одинъ отъ другого» говоритъ *Д. С. Милль* [65]); «Наше знаніе въ лучшемъ случаѣ только приблизительно и не принимаетъ въ соображеніе *незначительныхъ тенденцій*.—Но обыкновенно случается, что тенденціи незначительныя въ предѣлахъ нашего наблюденія становятся замѣтными или большими при крайнихъ обстоятельствахъ» говоритъ *Джевонсъ* [66]).—Тамъ гдѣ рѣчь идетъ о подмѣчаніи увеличенія или уменьшенія послѣдовательныхъ чиселъ, тамъ въ значительной степени эти несовершенства нашего знанія (поскольку оно достигается пріемомъ, нами здѣсь излагаемымъ) устраняются помноженіемъ всѣхъ членовъ рядовъ на большія круглыя числа. Мы не думаемъ даже чтобы было необходимо множить оба ряда на одно и тоже число: одинъ рядъ можно умножить на 100, другой на 10000 и больше, пока мы не увидимъ, что различія послѣдовательныхъ членовъ ряда легко подмѣчаются *глазомъ* т. е. что, „*незначительныя тенденціи*" сдѣлались замѣтными—а намъ только это и нужно.

2) Крайне рисковано было бы предпринимать работу сравненія рядовъ не имѣя какихъ-либо основаній предполагать, что между явленіями, ими изображаемыми, существуетъ прямая или косвенная причинная связь: способъ нагляднаго (замѣтнаго для глаза) сравненія рядовъ настолько примитивенъ, неточенъ, а общественныя явленія такъ сложны, что основываясь *только* на немъ, мы въ крайне рѣдкихъ случаяхъ могли бы съ увѣренностью заключить о причинной связи явленіи. Этотъ методъ служитъ скорѣе для провѣрки, подтвержденія апріорныхъ заключеній, указанія *степени зависимости*, можетъ навести на мысль о существованіи зависимости между явленіями, но, повторяю, основанное *только на немъ* заключеніе о причинной зависимости двухъ *общественныхъ явленій* было бы мало обоснованнымъ заключеніемъ. Поэтому-то крайне важно, прежде нежели приступить къ сравненію двухъ рядовъ съ цѣлью вывести изъ нихъ законъ, изслѣдовать: есть ли основаніе считать явленія, ими изображаемыя, стоящими въ прямой или косвенной причинной зависимости или нѣтъ. Для этихъ изслѣдованій статистикъ долженъ пользоваться положеніями, выработанными не только статистикой, но и другими науками какъ изъ области естествознанія, такъ и изъ психологіи, политической экономіи и т. д.

Напримѣръ, сопоставленіе ряда хлѣбныхъ цѣнъ съ рядомъ смертности имѣетъ за себя то апріорное основаніе, что пониженіе удовлетворенія необходимыхъ потребностей влечетъ за собою истощеніе организма, уменьшаетъ способность его къ противодѣйствію всякимъ неблагопріятнымъ для здоровья вліяніямъ, а это, въ свою очередь, влечетъ за собою увеличеніе числа заболѣваній и смертей (положеніе физіологіи).

---

[65]) Сост. Логик. Т. I, стр. 464.
[66]) Основы Науки, стр. 466—467.

Въ статистикѣ предлагаютъ изслѣдовать ряды, прежде ихъ сравненія, еще со стороны ихъ способности къ измѣненію, съ цѣлью обнаружить способность ихъ отражать на себѣ вліянія тѣхъ или другихъ причинъ; для этого предлагаютъ пользоваться формулами, предложенными нами на стр. 27, опредѣляющими уклоненія наблюденій отъ средняго ариѳметическаго. Намъ кажется, что эту способность можно всегда въ значительной степени увеличить путемъ умноженія всѣхъ членовъ ряда на одно и тоже значительное число (какъ сказано въ предыдущемъ пунктѣ); приложеніе же формулъ, опредѣляющихъ вѣроятные предѣлы уклоненій отъ средняго ариѳметическаго, во 1-хъ очень сложно сравнительно съ даваемыми имъ результатами, во 2-хъ не всегда возможно, такъ какъ эти формулы приложимы только къ дѣйствію постоянныхъ причинъ, что вовсе не необходимо для рядовъ. Поэтому изслѣдованіе съ этой стороны, по крайней мѣрѣ путемъ предлагаемыхъ формулъ, можно оставить, и ограничиться очевидною неустойчивостью ряда или очевиднымъ же постоянствомъ его измѣненія въ ту или другую сторону.

3) Перейдемъ теперь къ изложенію тѣхъ признаковъ, совпаденіе которыхъ достаточно указывало бы на совпаденіе самыхъ рядовъ, т. е. на существованіе причинной связи между явленіями, ими изображаемыми.

По самому опредѣленію пріема, нами здѣсь излагаемаго, мы можемъ только говорить о совпаденіи или противоположеніи рядовъ въ томъ смыслѣ, что или оба ряда измѣняются однообразно (увеличиваются или уменьшаются одновременно), или измѣняются противоположно (въ то время какъ одинъ рядъ увеличивается, другой уменьшается); опредѣлить же точный количественный законъ измѣненій этимъ способомъ мы не въ состояніи. Прежде чѣмъ приступать къ сравненію двухъ рядовъ, располагаемъ оба ряда въ одинаковой системѣ отъ maximum'а или minimum'а внизъ, если ожидаемъ положительнаго совпаденія; или одинъ—отъ maximum'а къ minimum'у, а другой—отъ minimum'а къ maximum'у, если ожидаемъ отрицательнаго совпаденія; затѣмъ члены ряда *причинъ* обозначаемъ (въ порядкѣ величинъ) №№ 1, 2, 3...., сохраняя за *соотвѣтствующими* членами ряда слѣдствій эту же нумерацію (подъ соотвѣтствующимъ членомъ ряда слѣдствій мы разумѣемъ тотъ членъ, который былъ наблюденъ за причиной опредѣленнаго №; напр., если за причиной № 10 былъ наблюденъ 20-й членъ ряда слѣдствія, если расположить его отъ maximum'а къ minimum'у,—то этотъ членъ мы тоже будемъ обозначать № 10). Эти №№ мы помѣщаемъ на мѣста чиселъ въ расположенные въ вышеуказанную систему ряды и по совпаденію №№ судимъ о совпаденіи рядовъ. Конечно, можно судить о совпаденіи рядовъ и не по №№, а по наглядному совпаденію наблюденныхъ чиселъ; только это будетъ уже нѣсколько труднѣе.

При сравненіи рядовъ можно ожидать или совершеннаго совпаденія рядовъ, когда каждому измѣненію причины находимъ всегда соотвѣтственное измѣненіе въ дѣйствіи, или—несовершеннаго совпаденія. Совершенное совпаденіе, въ особенности если при этомъ наблюдаются вполнѣ точныя количественныя соизмѣненія, дало бы возможность сдѣлать почти достовѣрное заключеніе о существованіи причинной зависимости; но оно наблюдается болѣе или менѣе точно только въ области естественныхъ явленій, въ явленіяхъ же общественной жизни едва ли и можетъ быть наблюдено: уже благодаря одному тому, что при наблюденіяхъ надъ общественной жизнью явленія предполагаются связанными причинной связью или потому, что они одновременны или потому что наблюдаются въ одномъ и томъ-же мѣстѣ, и сообразно этому предположенію создаются самыя системы наблюденій, — уже благодаря этому нельзя ожидать полнаго совпаденія: одинъ разъ извѣстная причина дѣйствуетъ скорѣе, другой разъ—медленнѣе, поэтому то явленіе, которое мы считаемъ дѣйствіемъ причины A, можетъ оказаться на самомъ дѣлѣ дѣйствіемъ причины B, происшедшей годомъ раньше (подъ причинами A и B, также какъ раньше подъ причинами различныхъ №№, мы разумѣемъ одну и ту же измѣняющуюся причину въ различныхъ состояніяхъ). Да и независимо отъ неточностей наблюденія, подобныхъ только что указаннымъ, мы не можемъ ожидать такого совпаденія, потому что вліяніе случая въ этой области явленій огромно: подъ дѣйствіемъ случая наблюденное число можетъ значительно уклониться отъ того, какимъ оно было бы, если бы на него дѣйствовали исключительно причины, отмѣченныя въ причинномъ ряду. Поэтому мы оставимъ совершенное совпаденіе рядовъ [67]) и перейдемъ къ несовершенному совпаденію. Предлагаютъ нѣсколько системъ признаковъ, по совпаденію которыхъ можно было бы судить о совпаденіи рядовъ; разсмотримъ каждую изъ нихъ въ отдѣльности.

Такъ какъ полнаго почленнаго совпаденія рядовъ мы ожидать не можемъ, то естественно разбить ряды на части и по совпаденію этихъ частей судить о совпаденіи рядовъ; это правило обще для всѣхъ пріемовъ, изложеніемъ которыхъ мы сейчасъ займемся; все различіе между ними заключается только въ способахъ дѣленія рядовъ на части.

а) Первый способъ состоитъ въ томъ, что расположивши ряды въ описанную выше систему, мы дѣлимъ ихъ на 2, на 3, на 4 и т. д. части по числу членовъ и стараемся подмѣтить совпаденіе этихъ частей. Возьмемъ примѣръ, предложенный Проф. *Янсономъ* на стр. 491 — 492 «Теоріи Статистики», ограничиваясь данными за 1857 — 1872 года (дѣло идетъ о зависимости числа кражъ отъ дороговизны хлѣба) и продѣлаемъ подробно всѣ дѣйствія. Мы будемъ имѣть:

---

[67]) О немъ хорошо сказано у *Д. С, Милля* „Система Логики“ Т. I, стр. 455—465 и у *Джевонса* „Основы Науки“, стр. 454—471.

Ряды основные:			Ряды преобразованные:		Сопоставленіе рядовъ:				
Для годовъ.	Цѣна ржи въ маркахъ на 50 кил.	Число кражъ на 10,000 жителей.	Цѣна ржи помноженная на 100.	Число кражъ помноженное на 10.	Года.	Цѣна × 100 расположен. отъ maxim. къ minim.	Соотвѣтственное число кражъ × 10.	№№	Ряд. краж. × 10 располож. отъ maxim. къ minim. по №№
столб. 1	столб. 2	столб. 3	столб. 4	столб. 5	столб. 6	столб. 7	столб. 8	столб. 9	столб. 10
1854	10,40	33,4	1040	334	1855	1145	355	1	2
1855	11,45	35,5	1145	355	1856	1064	386	2	1
1856	10,64	38,6	1064	386	1854	1040	334	3	3
1857	6,87	24,6	687	246	1867	987	265	4	5
1858	6,38	21,2	638	212	**1868**	**984**	**292**	**5**	**4**
1859	6,79	21,8	679	218	1871	860	222	6	14
1860	7,65	22,3	765	223	1872	840	236	7	7
1861	7,71	22,9	771	229	1869	808	211	8	9
1862	7,97	23,1	797	231	1862	797	231	9	18
1863	6,78	20,5	678	205	**1870**	**778**	**213**	**10**	**11**
1864	5,69	20,5	569	205	1861	771	229	11	13
1865	6,24	23,0	624	230	1860	765	223	12	12
1866	7,30	22,5	730	225	1866	730	225	13	6
1867	9,87	26,5	987	265	1857	687	246	14	16
1868	9,84	29,2	984	292	**1863**	**678**	**205**	**15**	**10**
1869	8,08	21,1	808	211	1859	679	218	16	17
1870	7,78	21,3	778	213	1858	638	212	17	8
1871	8,60	22,2	860	222	1865	624	230	18	15
1872	8,40	23,6	840	236	**1864**	**569**	**205**	**19**	**19**

Второй и третій столбцы представляютъ собою данныя наблюденій для годовъ, отмѣченныхъ въ первомъ столбцѣ; 4-й и 5-й представляютъ собою ряды, преобразованные помощью умноженія на круглыя цифры 100 и 10 (числа разныя), что соотвѣтствуетъ «приведенію» у проф. *Янсона*; столбцы 7 и 8 представляютъ собою преобразованные ряды, расположенные въ слѣдующую систему: столбецъ 7 представляетъ преобразованный рядъ причинъ, расположенный отъ maximum'а къ minimum'у; столбецъ 8—рядъ дѣйствій, расположенный по «соотвѣтствующимъ» членамъ, въ 6-мъ столбцѣ указаны соотвѣтствующіе годы; 9 и 10 столбцы представляютъ собою ряды причинъ и слѣдствій, выраженныхъ не въ числахъ, а №№; оба ряда расположены здѣсь отъ maximum'а къ minimum'у [68]). Всё число членовъ (19) мы раздѣлимъ на 4 части (какъ сдѣлано въ столбцахъ 6, 7, 8, 9 и 10) и сравнимъ два послѣднихъ столбца нашей таблицы. Приводимъ слова самого проф. *Янсона* [69]), сказанныя имъ по этому поводу. «Изъ сличенія двухъ послѣднихъ столбцовъ этой таблицы видно, что первые пять членовъ въ обоихъ рядахъ остаются въ предѣлахъ той же части ряда: самыя высокія цѣны на хлѣбъ сопровождаются самымъ большимъ относительнымъ числомъ кражъ; низкія цѣны на хлѣбъ не столько рѣзко вліяютъ на уменьшеніе числа кражъ (слѣдовательно это число уже зависитъ въ незначительной степени отъ цѣнъ на хлѣбъ, а опредѣляется другими причинами), хотя и тутъ вліяніе ихъ почти несомнѣнно: изъ послѣднихъ четырехъ членовъ ряда два остаются въ предѣлахъ нижней его части, а одинъ (16) перемѣщается (черезъ одно) мѣсто; вообще въ предѣлахъ частей перваго ряда остаются изъ 19 членовъ втораго 11 членовъ и только 8 вышли за эти предѣлы; но изъ этихъ 8 членовъ только два (18 и 8) перемѣстились далѣе, чѣмъ сосѣднюю часть перваго ряда, (шесть) переставились въ ближайшія части. Изъ 19 членовъ обоихъ рядовъ: 4 или 21% удержали свои мѣста (совпали), 7 или 37% перемѣстились на одно мѣсто, 3 или 16% перемѣстились не болѣе чѣмъ на три мѣста и 5 или 26% перемѣстились на 5—9 мѣстъ». Изъ этого изслѣдованія мы можемъ заключить, что два ряда, выражающіе цѣну хлѣба и число кражъ, *совпадаютъ положительно* и указываютъ на причинную связь этихъ двухъ явленій; если присоединимъ къ этому извѣстныя разсужденія о несовершенствахъ существующаго распредѣленія богатства, то причинная связь между уровнемъ цѣнъ на хлѣбъ и числомъ кражъ сдѣлается достовѣрной.

Когда ряды такъ расположены, какъ указано въ столбцахъ 7 и 8, т. е. рядъ причинъ расположенъ отъ maximum'а къ mi-

---

68) Легко видѣть изъ 6, 7 и 8 рядовъ, что результаты, полученные нами, совершенно однородны съ результатами, полученными проф. *Янсономъ* на стр. 496 Теоріи Статистики; что указываетъ на правильность нашихъ разсужденій относительно редукціи рядовъ. Разница между результатами 9 и 10 столбцовъ у насъ и 5 и 6 столбцовъ 496 стр. Теоріи Статистики происходитъ отъ того, что въ послѣдней въ 6-мъ столбцѣ сдѣлана ошибка въ нумераціи.

69) Теорія Статистики, стр. 496.

nimum'у, а рядъ слѣдствій выражаетъ дѣйствія, соотвѣтствующія этому расположенію причинъ, то совпаденіе ихъ можетъ быть, по нашему мнѣнію, обнаружено еще путемъ фиктивнаго средняго. Дѣйствительно, если рядъ 8 убываетъ (а въ нашемъ примѣрѣ, въ случаѣ положительнаго совпаденія, котораго мы ожидаемъ, это должно быть такъ), то и суммы членовъ частей его, дѣленныя на числа слагаемыхъ, должны убывать; это обстоятельство даетъ намъ возможность *замѣнить* совпаденіе частей рядовъ болѣе удобнымъ совпаденіемъ этихъ фиктивныхъ среднихъ. Производя въ нашемъ примѣрѣ указанныя дѣйствія, мы дѣйствительно и получимъ убывающій рядъ. Раздѣлимъ всѣ 19 членовъ ряда 8 на шесть частей (1—3, 4—6, 7—9, 10—12, 13—15, 16—19) и опредѣлимъ среднія ариѳметическія этихъ частей; получимъ такой рядъ: 358, 261, 226, 221, 225, 216,—рядъ этотъ, очевидно, убываетъ, откуда заключаемъ, что и весь 8 рядъ въ общемъ убываетъ, т. е. совпадаетъ съ 7 рядомъ положительно.

b) Въ теоріи статистики предлагается еще дѣленіе рядовъ на части при помощи средней квадратической ошибки средней, которая, какъ показываютъ таблицы, данныя на стр. 110—111, «способа наименьшихъ квадратовъ» *Магевскаго*, будетъ предѣломъ вѣроятной ошибки средней съ вѣроятностью$=0_{,68268}$ (въ упоминавшихся выше предѣлахъ эта послѣдняя у насъ равнялась $0_{,995}$). Дѣленіе производится такимъ образомъ: ряды располагаются въ подходящую систему (стр. 26), опредѣляются среднія ариѳметическія ихъ членовъ, придаются и вычитаются изъ среднихъ соотвѣтствующія среднія квадратическія ошибки; полученныя числа будутъ предѣлами средней части рядовъ. Эти числа затѣмъ вычитаютъ изъ крайнихъ чиселъ рядовъ и разности дѣлятъ пополамъ. Эти послѣднія числа будутъ дѣлить двѣ наружныя части рядовъ еще на двѣ каждую, такъ что всего получается 5 частей, по совпаденію которыхъ судятъ о совпаденіи рядовъ.

Относительно этого способа дѣленія на части можно сдѣлать слѣдующія замѣчанія.

1) Какъ сказано у насъ выше, среднее ариѳметическое (нефиктивное) имѣетъ полную логическую состоятельность только тогда, когда неслучайныя причины постоянны и всѣ измѣненія дѣйствія мы относимъ на счетъ случайныхъ причинъ; тогда дѣйствительно среднее ариѳметическое причиннаго ряда, какъ результатъ постоянныхъ неслучайныхъ причинъ, должно совпадать со среднимъ ариѳметическимъ ряда слѣдствій, опредѣляемаго *тѣми же* условіями. Средняя квадратическая ошибка средняго $\left(\sqrt{\frac{\Sigma\Delta^2}{m}} \cdot \frac{1}{\sqrt{m}}\right)$, указывая то число, за которое (съ вѣроятностью $0_{,68268}$) не перейдетъ уклоненіе *средняго ариѳметическаго* отъ точнаго дѣйствія постоянныхъ причинъ, также должна давать совпадающіе предѣлы и въ рядѣ причинъ и въ рядѣ слѣдствій, такъ какъ эти предѣлы обусловливаются *одинаковымъ* дѣйствіемъ (вѣроятность одна и таже) однѣхъ и тѣхъ же постоянныхъ причинъ,

вызывающихъ эти уклоненія [70]); причины же будутъ однѣ и тѣ же, ибо предполагается (по самому существу метода сопутствующихъ измѣненій), что всѣ причины, за исключеніемъ охарактеризованныхъ причиннымъ рядомъ, въ предѣлахъ опыта не измѣняются и, слѣдовательно, случайныя причины (имѣющія своимъ результатомъ ошибку), отмѣчены *всѣ* въ причинномъ рядѣ. Но только за предѣлы частей слѣдуетъ брать не среднюю квадратическую ошибку *средней*, т. е. не $\sqrt{\frac{\Sigma\Delta^2}{m}} \cdot \frac{1}{\sqrt{m}}$, а среднюю квадратическую ошибку *единичнаго наблюденія*, т. е. $\sqrt{\frac{\Sigma\Delta^2}{m}}$, такъ какъ мы хотимъ разбить на части различныя *наблюденія*, а не *среднія ариѳметическія* ихъ. Таковы логическія основанія выдѣленія средней части и при такихъ условіяхъ (постоянствѣ причинъ) оно возможно. Но постоянство причинъ, не есть условіе необходимое въ рядахъ, и потому этотъ способъ дѣленія на части далеко не всеобщъ, какъ это можно было бы подумать, читая изложенія его въ теоріи статистики: онъ приложимъ только къ случаю постоянныхъ причинъ, когда соизмѣненіе рядовъ вызывается дѣйствіемъ случайныхъ причинъ на рядъ причинный.

2) Относительно дѣленія каждой изъ двухъ крайнихъ частей рядовъ еще на двѣ полуразностью крайнихъ членовъ и предѣловъ средней части, мы должны сказать, что не можемъ указать какихъ-либо основаній для подобнаго дѣленія и потому считаемъ его вполнѣ произвольнымъ.

Итакъ дѣленіе помощью средней ариѳметической приложимо только къ случаю приблизительно постоянныхъ причинъ. Почему бы намъ (при наличности этого условія) не продолжать дѣлить и остальныя части ряда тѣмъ же путемъ—путемъ опредѣленія вѣроятныхъ предѣловъ уклоненія *отдѣльныхъ наблюденій* отъ средняго ариѳметическаго? Средняя квадратическая ошибка $\left(\sqrt{\frac{\Sigma\Delta^2}{m}}\right)$ есть, какъ мы замѣтили, предѣлъ, за который, съ вѣроятностью $0_{,68268}$, не перейдетъ уклоненіе единичнаго наблюденія отъ средняго ариѳметическаго (приближенно выражающаго точное дѣйствіе постоянныхъ неслучайныхъ причинъ); двойная средняя квадратическая ошибка $\left(2 \cdot \sqrt{\frac{\Sigma\Delta^2}{m}}\right)$ будетъ предѣломъ, за который съ вѣроятностью $0_{,95385}$ не перейдетъ уклоненіе единичнаго наблюденія; полтора раза взятая средняя квадратическая ошибка будетъ представлять собою такой-же предѣлъ съ вѣроятностью

[70]) Только такое значеніе, мнѣ кажется, и возможно придавать средней квадратической ошибкѣ; относительно постоянныхъ причинъ, опредѣляющихъ размѣръ предѣла ошибокъ, я скажу въ концѣ статьи.

$0_{,86614}$ и т. д. [71]). Въ пользу этого дѣленія можно было бы привести вышеуказанную аргументацію, и совпаденіе ихъ указывало бы дѣйствительно на совпаденіе рядовъ. Только вычисленіе средней квадратической ошибки $\sqrt{\frac{\Sigma\Delta^2}{m}}$ — гдѣ $\Sigma\Delta^2 = (\xi - A_1)^2 + (\xi - A_2)^2 + \ldots$ (суммѣ квадратовъ разностей между средней ариѳметической и единичными наблюденіями), а m число слагаемыхъ—довольно затруднительно, хотя и облегчается значительно приложенной въ концѣ этой статьи таблицей квадратовъ. Но, повторяю, этотъ пріемъ вполнѣ состоятеленъ логически только въ томъ случаѣ, когда неслучайныя причины—постоянны или очень мало измѣняются въ предѣлахъ опыта.

c) Предлагается еще одинъ способъ дѣленія рядовъ на части, именно на 5 частей. Онъ состоитъ въ томъ, что изъ самаго большого члена ряда вычитаютъ самый меньшій и разность дѣлятъ на 5 частей; затѣмъ изъ самаго большаго члена вычитаютъ послѣдовательно $^1/_5$ разности $^2/_5$, $^3/_5$, $^4/_5$ и полученныя числа считаютъ предѣлами частей ряда; подобное дѣленіе производится и въ рядѣ причинъ и въ рядѣ дѣйствій. Какое соотношеніе, какая логическая связь существуетъ между соотвѣтствующими частями двухъ рядовъ, полученными этимъ путемъ, мы не умѣемъ указать. Подобное дѣленіе кажется намъ неподкрѣпленными никакими логическими основаніями и потому совершенно произвольнымъ.

Мы не будемъ излагать здѣсь способъ *Герри*, такъ какъ самъ проф. *Янсонъ* говоритъ [72]) относительно его, что: «Никто изъ ученыхъ, сколько извѣстно, не пользовался пріемами *Герри*, и это обстоятельство должно быть отчасти приписано тому, что онъ не выяснилъ вовсе главнѣйшей части аналитическаго способа, имъ предлагаемаго, но отчасти и тому, что система признаковъ, имъ выработанная, слишкомъ сложна и *неподкрѣплена никакими теоретическими основаніями, ни математическими, ни логическими*». Дѣйствительно нельзя не согласиться съ тѣмъ, что признаки, которыми *Герри* дѣлитъ свой рядъ, буквально ничѣмъ не обоснованы; исключеніе представляютъ только среднія ариѳметическія, которыя однако примѣнимы, какъ сказано выше, далеко не вездѣ: они требуютъ приблизительнаго постоянства неслучайныхъ причинъ, остальные же шесть признаковъ (ихъ всего девять) окончательно произвольны.

Какъ видно изъ только что сдѣланнаго изложенія, лишь два первыхъ способа дѣленія рядовъ на части вполнѣ состоя-

---

71) Можно было бы брать $^3/_4, 1^1/_8, 1^1/_4$ и т. д. средней квадратической ошибки; всѣ онѣ выражали бы тоже самое. Если бы мы захотѣли опредѣлить вѣроятность этихъ предѣловъ, то нужно было бы раздѣлить $^3/_4$, $1^1/_8$, $1^1/_4$ и т. д. на $\sqrt{2}$, это частное представило бы собою величину α въ таблицахъ *Маіевскаго* (Способъ наименьшихъ квадратовъ, стр. 110—111); а зная α, по этимъ же таблицамъ, можно опредѣлить $\varphi(\alpha)$, которая и будетъ искомой вѣроятностью.

72) Теорія Статистики стр. 500; самый способъ *Герри* изложенъ тамъ же на стр. 498—500.

тельны логически. Первый изъ нихъ годенъ для всѣхъ случаевъ; въ немъ вопросъ поставленъ прямо и просто: если одинъ рядъ (рядъ причинъ напр.) расположенъ отъ maximum'a къ minimum'y, то рядъ слѣдствій, расположенный по соотвѣтственнымъ членамъ, будетъ имѣть также тенденцію къ убыванію или возрастанію; правда это не можетъ быть наблюдено съ полною точностью относительно каждаго члена ряда слѣдствій, но за то въ общемъ, когда, напримѣръ, рядъ раздѣленъ на нѣсколько частей и эти части сравниваются между собою или съ помощью фиктивнаго средняго, или съ помощью спеціальнаго анализа, такая тенденція должна быть подмѣчена; редукція, въ видѣ помноженія членовъ ряда на 10, 100, 1000 и т. д., дѣлаетъ ее еще болѣе замѣтною. Этотъ способъ мнѣ кажется вполнѣ удовлетворяющимъ цѣли, поставленной въ этой части; что особенно важно, онъ простъ и ясенъ, а это самое драгоцѣнное тамъ, гдѣ главное доказательство заключается въ очевидности. Второй способъ разрѣшаетъ вопросъ о совпаденіи рядовъ, измѣняющихся только подъ вліяніемъ случая; онъ не годенъ тогда, когда неслучайныя причины мѣняются въ предѣлахъ наблюденія. Но, при наличности этого условія, онъ вполнѣ удовлетворяетъ цѣли; хотя и первый способъ здѣсь такъ же сослужилъ бы свою службу удачно. Оба эти пріема, конечно, могутъ быть примѣнены и къ рядамъ основнымъ и къ рядамъ редуцированнымъ.

Чтобы не разрывать изложенія теоріи нагляднаго совпаденія рядовъ, скажу еще здѣсь, что этотъ способъ не только можетъ обнаружить существованіе прямой или косвенной причинной связи между двумя явленіями, но онъ можетъ также указать и качество связи, т. е. опредѣлить какъ измѣняется дѣйствіе при извѣстномъ измѣненіи причины; конечно, это можетъ быть сдѣлано только въ самой общей формѣ, напримѣръ, этимъ путемъ мы узнаемъ, что при *увеличеніи* цѣны на хлѣбъ *увеличивается* число кражъ.

Но слѣдуетъ быть очень осторожнымъ при выводѣ заключеній изъ совпаденія двухъ рядовъ; дѣло въ томъ, что методъ сопутствующихъ измѣненій въ строгомъ смыслѣ слова требуетъ, чтобы измѣнялась *одна* только причина, всѣ же остальныя причины оставались бы безъ перемѣны въ предѣлахъ наблюденія; иначе фактъ сопутствія будетъ сомнителенъ. «Пока который либо изъ предшествующихъ фактовъ,—говоритъ *Д. С. Милль* [73])—подвергается требуемому ряду измѣненій, мы должны стараться удержать неизмѣнными всѣ другіе предшествующіе факты; другими словами, чтобы имѣть право изъ сопутствія измѣненій заключить о связи причины со слѣдствіемъ, самое сопутствіе должно доказать методомъ различія». Между тѣмъ «каждое качество общественнаго тѣла [74]) подчинено вліянію безчисленныхъ причинъ; и таково взаимное дѣйствіе сосуществующихъ элементовъ общества, что

[73]) Система Логики. Т. I, стр. 469. О томъ же см. *Джевонсъ* „Основы Науки", стр. 416.

[74]) *Д. С. Милль* Сист. Логик. Т. II, стр. 433.

всё, влiяющее на который либо изъ наиболѣе важныхъ элементовъ, уже тѣмъ самымъ, если не дѣйствуетъ на нихъ прямо, дѣйствуетъ косвенно» (consensus). Поэтому-то только тогда, когда данная причина *измѣняется слишкомъ значительно* сравнительно со всѣми остальными, такъ что можно считать послѣднiя (сравнительно) почти неизмѣнившимися, и, сообразно тому, значительно измѣняется дѣйствiе, тогда только, не смотря на то, что «слѣдствiя различныхъ влiянiй не различаются по качеству, а количество ихъ есть смѣшанный результатъ всѣхъ влiянiй» [74]), мы съ большой вѣроятностью можемъ отнести это соизмѣненiе на счетъ причинной связи прямой или косвенной. «Даже когда мы не имѣемъ средствъ точно измѣрять измѣняющiяся количества— говоритъ *С. Джевонсъ* [75])—мы всё-таки можемъ убѣдиться въ ихъ связи, *если одно изъ нихъ замѣтно измѣняется одновременно съ другимъ*. Усталость увеличивается по мѣрѣ работы, а голодъ по мѣрѣ воздержанiя отъ пищи; желанiе и степень полезности уменьшается пропорцiонально количеству потребленнаго товара. Мы знаемъ, что нагрѣвающая сила солнца зависитъ отъ его высоты надъ горизонтомъ; что температура воздуха понижается по мѣрѣ того, какъ мы поднимаемся на гору; что земная кора становится замѣтно теплѣе, по мѣрѣ того какъ мы спускаемся въ глубокую шахту; мы умозаключаемъ о направленiи въ какомъ идетъ къ намъ звукъ, по измѣненiю силы его, когда мы приближаемся или удаляемся. *Легкость, съ какою мы можемъ время отъ времени наблюдать увеличенiе или уменьшенiе одного количества вмѣстѣ съ другимъ, достаточно доказываетъ связь между ними, хотя мы и не въ состоянiи указать какой-нибудь точный законъ отношенiя*».

Значительную помощь въ дѣлѣ нагляднаго представленiя зависимости двухъ явленiй, представленныхъ рядами, можетъ оказать графическое изображенiе ихъ; но такъ какъ я имѣю въ виду главнымъ образомъ теоретическую (логическую), а не техническую сторону научной разработки статистическихъ данныхъ, то говорить о немъ не буду. Желающiе ознакомиться съ этимъ способомъ найдутъ самое обстоятельное изложенiе его въ «Теорiи Статистики» проф. *Янсона* (1887 г.), стр. 503—537.

II.

Перейдемъ теперь ко второй половинѣ нашего изложенiя метода сопутствующихъ измѣненiй,—къ изложенiю способовъ вывода *закона* соизмѣненiя причины и слѣдствiя, когда существованiе причинной зависимости между двумя явленiями уже доказано. Здѣсь будетъ удобно разсмотрѣть эти прiемы отдѣльно въ приложенiи къ вопросамъ социальной статики и отдѣльно въ приложенiи къ вопросамъ социальной динамики [76]).

---

[75]) Основы Науки, стр. 456—457.

[76]) Связь между общественными явленiями всецѣло исчерпывается ихъ сосуществованiемъ и послѣдовательностью. Съ этихъ двухъ точекъ зрѣнiя и надлежитъ ихъ изучать. Вопросы, которые при этомъ должны быть разрѣшены изслѣдователемъ, всецѣло обнимаются понятiями социальной статики и социаль-

α. Соціальная статика есть «теорія [77]) взаимодѣйствій и реакцій единовременныхъ соціальныхъ явленій «причемъ (слова *Конта*) до времени, на сколько возможно, дѣлается отвлеченіе, ради научныхъ цѣлей, отъ того фундаментальнаго движенія, которое всегда постоянно видоизмѣняетъ всю совокупность явленій». «Состоянія обществъ подобны различнымъ сложеніямъ или возрастамъ человѣческаго тѣла [78]); они суть состоянія не одного или нѣсколькихъ органовъ или отправленій, а цѣлаго организма. Найдено, что если одна черта общества находится въ извѣстномъ состояніи, то съ нею всегда и обыкновенно сосуществуетъ болѣе или менѣе точно опредѣленное состояніе многихъ другихъ сторонъ». Вотъ этимъ-то сосуществованіемъ и занимается соціальная статика. Въ статистикѣ, гдѣ всѣ данныя — числовыя, задачи соціальной статики будутъ состоять въ томъ, чтобы одни общественные элементы выразить въ функціи другихъ; замѣчая, напримѣръ, что съ увеличеніемъ цѣнъ на хлѣбъ увеличивается число смертей на 10,000, соціальная статика должна дать намъ формулу, выражающую смертность въ цѣнности хлѣба [79]). Изучая вліяніе распредѣленія земли въ данномъ обществѣ на благосостояніе его членовъ, мы могли бы выразить послѣднее въ первомъ формулою, по возможности свободной отъ дѣйствія случайности.—Всё это вопросы соціальной статики. Хотя въ математикѣ и есть довольно простые пріемы вычисленія такихъ формулъ, но благодаря господству въ общественныхъ явленіяхъ множественности причинъ и случайности, наблюденія не могутъ быть точно отнесены къ извѣстной опредѣленной причинѣ, и потому результаты вычисленій будутъ крайне сомнительной точности; поэтому приходится ограничиваться только указаніемъ стремленія причины производить измѣненія въ дѣйствіи въ сторону плюса или минуса, въ родѣ вышеуказаннаго примѣра (стр. 37—40) цѣны на хлѣбъ съ одной стороны, числа кражъ—съ другой. Мы можемъ сказать только, что при высокой цѣнѣ на хлѣбъ—высока смертность; точной же количественной связи указать не можемъ. Но если бы мы, напримѣръ, могли быть увѣрены въ томъ,

---

ной динамики, какъ ихъ опредѣляли *Д. С. Милль* и *Ог. Контъ*; поэтому я позволяю себѣ пользоваться этими названіями, подразумѣвая однако подъ ними различныя точки зрѣнія на явленіе, а не двѣ самостоятельныя науки, которыхъ не существуетъ.

[77]) ***Милль***. Сист. Логик. Т. II, стр. 469

[78]) *Д. С. **Милль***. Сист. Лог. Т. II, стр. 464.

[79]) Производя, напримѣръ, наблюденія надъ цѣною хлѣба и смертностью въ теченіи 10—12 лѣтъ въ мѣстности, гдѣ условія жизни сравнительно мало измѣнились за это время, а цѣны на хлѣбъ колебались значительно (нѣкоторыя мѣста Сибири), мы могли бы помощью интерполированія по способу наименьшихъ квадратовъ опредѣлить (для этой мѣстности и времени) зависимость смертности отъ цѣны хлѣба, почти свободную отъ дѣйствія случайности. Интерполированіе есть опредѣленіе вида формулы, выражающей зависимость между причиной и дѣйствіемъ, когда извѣстно нѣсколько соотвѣтствующихъ значеній и первой и второго; интерполированіе по способу наименьшихъ квадратовъ есть опредѣленіе вида такой формулы въ томъ случаѣ, когда извѣстныя намъ значенія причины и слѣдствія подвержены вліянію случая; примѣненіе способа наименьшихъ квадратовъ имѣетъ цѣлью освободить нашу формулу отъ этого вліянія.

что въ Пруссiи за время [80]) 1854—1872 г., всѣ общественныя факторы, кромѣ цѣнъ на хлѣбъ, оставались почти постоянными (чего на самомъ дѣлѣ не было), то помощью интерполированiя по способу наименьшихъ квадратовъ было бы возможно выразить довольно точно зависимость (за это время) между цѣною хлѣба и числомъ кражъ, почти свободную отъ случайности. Не думаемъ (въ виду вышеизложенныхъ обстоятельствъ) чтобы статистика могла извлечь болѣе или менѣе значительную пользу изъ этихъ формулъ, поэтому мы оставимъ ихъ и перейдемъ къ приложенiю метода сопутствующихъ измѣненiй въ социальной динамикѣ.

β. «Разсмотрѣнiе послѣдовательнаго порядка (различныхъ состоянiй общества) есть главный предметъ въ изученiи социальной динамики, цѣль которой составляетъ наблюденiе и объясненiе послѣдовательностей общественныхъ состоянiй [81])». Состоянiемъ обществъ называется «единовременное состоянiе всѣхъ большихъ социальныхъ фактовъ или явленiй [82])». Но при томъ должно помнить, что въ социальной динамикѣ, благодаря consensus'у, нельзя ограничиваться при выводѣ закона наблюденiемъ перемѣнъ, которыя обнаруживаются въ отдѣльныхъ элементахъ общества; «необходимо, говоритъ *Миллъ* [83]), соединить статическое разсмотрѣнiе социальныхъ явленiй съ динамическимъ и брать во вниманiе не только прогрессивныя измѣненiя различныхъ элементовъ, но и единовременное состоянiе каждаго изъ нихъ и такимъ образомъ эмпирически получить законъ соотвѣтствiя не только между единовременными состоянiями, но и между единовременными измѣненiями этихъ элементовъ». — Таково понятiе социальной динамики и таковы ея задачи. Думается намъ, что приложенiе интерполированiя по способу наименьшихъ квадратовъ къ разрѣшенiю этихъ задачъ будетъ имѣть и полное логическое основанiе и принесетъ извѣстную пользу. Выше мы сказали, что невозможно (благодаря множественности причинъ) приложенiе интерполяцiонныхъ формулъ къ случаю двухъ сосуществующихъ явленiй, изъ которыхъ одно есть основанiе считать причиною другого; здѣсь же, какъ намъ кажется, возможно избѣжать этой множественности причинъ, и вотъ какимъ путемъ. Если мы разсматриваемъ послѣдовательное измѣненiе извѣстнаго общественнаго явленiя, т. е. различныя состоянiя одного и того же явленiя, то должны причиной этихъ состоянiй считать всѣ предшествующiя состоянiя *общества*, подобно тому какъ при изслѣдованiи движенiя какого либо тѣла мы должны каждое данное положенiе тѣла въ пространствѣ считать дѣйствiемъ предыдущихъ послѣдовательныхъ положенiй его; а эти предыдущiя послѣдовательныя состоянiя, какъ въ первомъ, такъ и во второмъ случаѣ, могутъ быть опредѣлены временемъ, т. е. сведены къ единой причинѣ. На са-

---

80) *Янсонъ*. Теорiя Статистики, стр. 491—492.
81) *Д. С. Миллъ*. Сист. Лог. Т. II, стр. 477.
82) ibid., стр. 463.
83) ibid., стр. 476.

момъ дѣлѣ, что такое время? Какъ показываетъ психологія, время есть идея послѣдовательной смѣны явленій, такой смѣны, которая in concreto не можетъ быть повторена: рядъ явленій слѣдуетъ одинъ за другимъ, смѣняя другъ друга; въ этой цѣпи явленій могутъ встрѣчаться факты подобные между собою, но они различны между собою въ томъ отношеніи, что прежнее явленіе было, прошло, было смѣнено другими, а данное, смѣнивши другія явленія, прямо—передъ нашими глазами; прошедшее явленіе тѣмъ отличается отъ настоящаго, что послѣ прошедшаго были еще явленія; оно не можетъ быть повторено потому, что случившаяся послѣдовательность, именно какъ совокупность ряда явленій, уже есть, тогда какъ когда случилось прошлое событіе ея еще не было. Такимъ образомъ понятіе времени обнимаетъ собою и послѣдовательную смѣну событій и извѣстную совокупность событій, другъ съ другомъ не сосуществующихъ. Если при разсмотрѣніи измѣненій, происходящихъ въ извѣстномъ явленіи, мы причиной его измѣненій назовемъ предшествующее время, то этимъ укажемъ только на то, что они опредѣляются всѣми предыдущими послѣдовательными измѣненіями въ общественныхъ состояніяхъ.

Мало того—временемъ мы можемъ измѣрить, опредѣлить неслучайныя причины. Когда мы знаемъ законъ движенія, то въ любое данное мгновеніе можемъ опредѣлить положеніе движущагося тѣла; указавши время, мы тѣмъ самымъ вполнѣ точно опредѣляемъ всю совокупность предшествующихъ послѣдовательныхъ положеній тѣла въ пространствѣ, опредѣляемъ вполнѣ причину даннаго положенія его. Мы знаемъ, что человѣкъ въ различные годы жизни имѣетъ различную возможность умереть и наблюденія показываютъ намъ, что въ данномъ обществѣ умираетъ въ *извѣстномъ возрастѣ* (если нѣтъ особенныхъ возмущающихъ причинъ, напримѣръ, эпидеміи) изъ-года въ годъ приблизительно одно и тоже число лицъ; а смерть есть результатъ тѣхъ послѣдовательныхъ измѣненій въ организмѣ человѣка, которыя происходятъ въ немъ отъ дня его рожденія подъ дѣйствіемъ самыхъ разнообразныхъ вліяній, включая и наслѣдственность,—слѣдовательно и здѣсь мы можемъ говорить о времени какъ выраженіи причинъ: оно опредѣляетъ совокупность этихъ измѣненій. Мы знаемъ, что человѣкъ въ различномъ возрастѣ различно развитъ умственно и нравственно и можемъ говорить о времени какъ выраженіи причинъ этого развитія, какъ указаніи, мѣрѣ тѣхъ послѣдовательныхъ непрерывныхъ состояній развитія, которыя переживаетъ данное лицо, прежде чѣмъ дойдетъ до даннаго состоянія. Здѣсь, какъ и во второмъ примѣрѣ, вліяніе случая огромно, но при большомъ числѣ наблюденій мы можемъ составить себѣ понятіе о нѣкоторой нормѣ развитія въ извѣстные годы; напр. мы говоримъ объ обыкновенномъ развитіи взрослаго человѣка,—и этой, конечно, нормой руководствуется законодатель, когда назначаетъ срокъ совершеннолѣтія. Наконецъ цѣлые народы, какъ оказывается, проходятъ одинаковыя стадіи развитія, и мы можемъ говорить о народѣ молодомъ, о народѣ зрѣломъ, старомъ и этимъ указывать нѣкоторымъ образомъ на уровень культуры, уровень состоянія общества (стр. 46). Только мы не можемъ говорить въ этомъ случаѣ о болѣе или менѣе *опредѣленной* нормѣ культуры, соединенной съ этимъ возрастомъ государства: человѣчеству приходится наблюдать очень мало государствъ для того, чтобы сдѣлать такое заключеніе, и вліяніе случайности здѣсь маскируетъ дѣйствіе неслучайныхъ причинъ; но несомнѣнно, что и здѣсь время можетъ выражать неслучайную причину.

Всѣми этими разсужденіями мы хотѣли показать возможность замѣнить временемъ совокупность причинъ прогрессивныхъ движеній общества, сказать, что при большомъ числѣ наблюденій замѣчается дѣйствіе закона большихъ чиселъ, и потому время можетъ служить мѣрою неслучайной *измѣняющейся* причины. При такомъ взглядѣ на время мы можемъ говорить о немъ, какъ единой причинѣ въ соціальной динамикѣ, и тѣмъ избѣжать множественности причинъ. Это обстоятельство (отсутствіе множественности причинъ) даетъ логическую силу нашей формулѣ, сообщаетъ увѣренность, что она опредѣляетъ намъ связь причины со слѣдствіемъ. Съ другой стороны, выражая отдѣльные общественные элементы въ функціи времени, мы имѣемъ возможность получить, такъ сказать, физіономію общества въ любое данное мгновеніе, т. е. дѣлаемъ возможнымъ соединеніе статическаго разсмотрѣнія съ динамическимъ, чего требуетъ consensus соціальныхъ явленій. Прогрессъ, какъ его разумѣетъ *Д. С. Миллъ* [84]), нѣкоторыхъ общественныхъ элементовъ совершается довольно быстро, такъ что его можно прослѣдить очень удобно; притомъ многіе изъ нихъ (общественныхъ элементовъ) доступны числовой характеристикѣ, такъ что для нихъ возможно интерполированіе по способу наименьшихъ квадратовъ; эти интерполяціонныя формулы могутъ быть въ примѣненіи къ нимъ очень полезны, такъ какъ выражаютъ явленія по возможности свободныя отъ дѣйствія случая; таковы, напримѣръ, прогрессъ цѣнъ, прогрессъ санитарнаго состоянія общества, прогрессъ капиталистическаго производства и т. д.; для многихъ изъ нихъ, или по крайней мѣрѣ для многихъ сторонъ этихъ явленій, могутъ быть выведены интерполяціонныя формулы. По этимъ формуламъ могутъ быть составлены ряды (подобно примѣру въ Теоріи Статистики проф. *Янсона*, стр. 501—503), члены которыхъ будутъ характеризовать одновременныя состоянія различныхъ элементовъ общества, по возможности свободныя отъ вліянія случайностей. Правильно составленные, такіе ряды, думается намъ, могутъ пролить много свѣта на разные вопросы соціальной динамики; поэтому мы попытаемся изложить интерполированіе по способу наименьшихъ квадратовъ настолько полно и популярно, насколько это допускаетъ самый излагаемый предметъ.

---

[84]) Какъ постоянное, непрерывное, происходящее подъ вліяніемъ неслучайныхъ причинъ, измѣненіе въ общественныхъ элементахъ (Сист. Лог. Т. II, стр. 465).

Какой вопросъ должны мы рѣшить, когда беремся опредѣлять законъ соизмѣненія дѣйствія и причины, если и первое и вторая выражены въ числахъ?—мы должны, исходя изъ данныхъ наблюденія, найти формулу, которая при подстановкѣ величинъ причины (у насъ времени), давала бы соотвѣтствующія величины дѣйствія, при томъ такія, которыя были бы по возможности свободны отъ вліянія случайныхъ причинъ. Для этого и существуетъ способъ интерполированія по способу наименьшихъ квадратовъ.

Мы разсматриваемъ теперь измѣняющіяся неслучайныя причины общественныхъ явленій; но въ любое мгновеніе или вообще короткій промежутокъ времени мы можемъ считать ихъ постоянными и въ такомъ случаѣ законъ большихъ чиселъ имѣетъ для нихъ мѣсто (а съ нимъ вмѣстѣ, замѣтимъ кстати, приложимы и методъ совпаденія и косвенный методъ разницы); слѣдовательно всѣ данныя переписей и другія наблюденія, если только они произведены въ сравнительно короткій срокъ, должны подчиняться закону большихъ чиселъ. Мы осмѣлимся надѣяться, что при изложеніи этого послѣдняго закона было ясно указано, что стремленіе постоянныхъ неслучайныхъ причинъ произвести свое дѣйствіе существуетъ и при небольшомъ числѣ наблюденій, т. е., что правъ былъ проф. *Вагнеръ*, когда говорилъ [85]): «Въ индивидуальностяхъ, которыя образуютъ содержаніе ...... малыхъ и потомъ большихъ чиселъ, дѣйствуетъ, очевидно, тотъ-же импульсъ, который выводится вообще изъ законосообразности большихъ чиселъ». Для полнаго совпаденія выводовъ изъ небольшихъ чиселъ наблюденій съ выводами изъ большого числа ихъ необходимо только чтобы первыя были освобождены отъ дѣйствія случайностей. При отысканіи формулы, опредѣляющей зависимость между временемъ (причиною) и извѣстнымъ явленіемъ, зависимость по возможности свободную отъ вліянія случайности, мы, очевидно, должны результаты наблюденій по возможности освободить отъ вліянія случайностей и, освободившись отъ ихъ дѣйствія, обыкновеннымъ способомъ интерполированія опредѣлить искомую формулу.—Какимъ же путемъ мы можемъ освободить наши наблюденія отъ этихъ вліяній? При изложеніи закона большихъ чиселъ было указано, что результатъ согласный съ закономъ большихъ чиселъ будетъ наиболѣе свободенъ отъ случайностей; но онъ будетъ также и наивѣроятнѣйшимъ: вѣроятность этого результата (какъ было сказано) при большомъ числѣ наблюденій стремится къ 1, а, слѣдовательно вѣроятность всѣхъ остальныхъ (результатовъ) стремится къ 0 [86]). А разъ результатъ, согласный съ закономъ большихъ чиселъ, есть наивѣ-

---

[85]) Проф. *Янсонъ* „Теорія Статистики", стр. 31.

[86]) Что значитъ логически наивѣроятнѣйшій результатъ наблюденій, объ этомъ будетъ сказано въ концѣ статьи, теперь же я только напоминаю, что результатъ, согласный съ закономъ большихъ чиселъ, есть наивѣроятнѣйшій. Припомнимъ также, что и среднее ариѳметическое есть наивѣроятнѣйшій результатъ наблюденій (стр. 23) — и понятно, вѣдь онъ, какъ видно изъ его изложенія, есть результатъ согласный съ закономъ большихъ чиселъ.

роятнѣйшій, то и *совокупность* (при наблюденіяхъ въ различное время) результатовъ, *согласныхъ съ закономъ большихъ чиселъ*, будетъ также наивѣрнѣйшей изъ всѣхъ возможныхъ совокупностей, и наша задача сводится къ слѣдующей: «найти формулу, выражающую зависимость между даннымъ явленіемъ и временемъ (его причиной), которая выражала бы (при подстановкѣ различныхъ величинъ времени) наивѣроятнѣйшую совокупность величинъ этого явленія». — Эта формула будетъ выражать искомую зависимость возможно свободно отъ случайностей. Оказывается, что возможно рѣшить этотъ вопросъ тогда, когда число членовъ въ нашей формулѣ (которая будетъ, какъ увидимъ, линейною) будетъ меньше числа наблюденій и чѣмъ на большее число эти послѣднія превышаютъ ихъ, тѣмъ рѣшеніе будетъ точнѣе; а самыя значенія коэффиціентовъ нашей формулы, опредѣляемыя подъ сказаннымъ условіемъ, будутъ соотвѣтствовать тѣмъ значеніямъ явленія, для которыхъ сумма квадратовъ разностей между ними и полученными изъ наблюденія будетъ наименьшей—отсюда и само названіе «способъ наименьшихъ квадратовъ». Изъ этого послѣдняго условія вытекаетъ столько уравненій, сколько неизвѣстныхъ коэффиціентовъ, которые такимъ образомъ и могутъ быть самымъ простымъ способомъ вычислены. Такова основная мысль этого способа. Мы рѣшились изложить ее здѣсь съ цѣлью дать возможность лицамъ не знакомымъ съ математикой сознательно относиться къ получаемымъ при помощи этой формулы результатамъ, видѣть ясно, что они дѣйствительно по возможности освобождены отъ дѣйствія случайностей и выражаютъ для любого даннаго момента времени дѣйствія приблизительно постоянныхъ причинъ, такъ какъ въ основаніи способа наименьшихъ квадратовъ лежитъ тотъ же законъ большихъ чиселъ. Ниже мы будемъ излагать только формулы, которыми нужно пользоваться для полученія интерполяціонной формулы [87]).

«При многихъ практическихъ вопросахъ мы не знаемъ формы функціи U, выражающей зависимость между искомыми незвѣстными, и ее приходится выбирать. Въ этомъ случаѣ, когда функція U не періодическая [88])…. для выраженія ея» можно положить, что она равна такому выраженію:

$$« \; U = a + bx + cx^2 + \ldots\ldots$$

гдѣ коэффиціенты a, b, c…… вычисляются по найденнымъ изъ наблюденій величинамъ U равнымъ u_1, u_2,…. u_n, соотвѣтствующимъ различнымъ значеніямъ x, равнымъ x_1, x_2,…. x_n.

«Если число наблюденій n болѣе числа неизвѣстныхъ коэффиціентовъ a, b, c…., какъ это обыкновенно и бываетъ, то наивѣроятнѣйшія значенія этихъ коэффиціентовъ могутъ быть опредѣлены по способу наименьшихъ квадратовъ.

---

87) Слова, стоящія ниже въ ковычкахъ, принадлежатъ профес. *Маіевскому*. „Изложеніе способа наименьшихъ квадратовъ“ (1881 г.), стр. 218—223.

88) Что имѣетъ мѣсто въ общественныхъ явленіяхъ. *Д. С. Милль* Сист. Лог. Т. II, стр. 465.

«*П. Л. Чебышевъ* далъ формулы интерполированія, по которымъ можно вычислять члены выраженія U, послѣдовательно одинъ за другимъ и вмѣстѣ съ тѣмъ находить суммы квадратовъ ошибокъ: S_0^2, S_1^2, $S_2^2 \ldots S_\alpha^2$, съ которыми рядъ *представляетъ наблюденія*, когда останавливаемся на 1, 2, 3.... α членѣ, для того, чтобы по величинѣ средней квадратической ошибки тотчасъ узнать, на которомъ членѣ можно остановиться». «Въ разсматриваемомъ случаѣ приведенная форма функціи U выбрана произвольно, и мы можемъ только, по быстротѣ, съ которою уменьшаются суммы квадратовъ ошибокъ S_0^2, S_1^2, S_2^2 ..... или среднія квадратическія ошибки $\sqrt{\frac{S_0^2}{n}}$, $\sqrt{\frac{S_1^2}{n}}$, $\sqrt{\frac{S_2^2}{n}}$ ....., съ которыми функція выражаетъ наблюденія, составить себѣ понятіе о пригодности выбранной функціи представить наблюденія».

«Формулы, данныя *П. Л. Чебышевымъ* относятся къ двумъ случаямъ: къ первому, когда извѣстныя величины функціи взяты чрезъ равные промежутки и ко второму, когдя извѣстныя величины функціи соотвѣтствуютъ какимъ либо даннымъ значеніямъ перемѣной». Такъ какъ статистическія наблюденія обыкновенно производятся періодически, черезъ равные промежутки времени, то мы остановимся только на первомъ случаѣ.

«Если требуется найти наивѣроятнѣйшіе коэффиціенты a, b, c.... въ выраженіи U, представленномъ формулою

$$1)\quad U = a + bx + cx^2 + \ldots\ldots,$$

и изъ наблюденій .... найдено что U равно u_1, $u_2 \ldots u_n$, соотвѣтствующимъ равноотстоящимъ величинамъ $x = 1, 2, \ldots n$ (за 1 можетъ быть принято 5, 10 лѣтъ), то можно вычислить члены выраженія U, послѣдовательно одинъ за другимъ помощью ряда

$$2)\quad U = F_0 \cdot \varphi_0 + F_1 \cdot \varphi_1 + F_2\, \varphi_2 + \ldots\ldots$$ [89])

и вмѣстѣ съ тѣмъ находить суммы квадратовъ ошибокъ, съ которыми рядъ представляетъ наблюденія, по слѣдующимъ формуламъ»:

§ I. Формулы для опредѣленія члена $F_0 \cdot \varphi_0$

$$1)\quad F_0 = + \frac{\Sigma u_i}{n}.$$

Здѣсь $\Sigma u_i = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_n$, равно суммѣ всѣхъ результатовъ отдѣльныхъ наблюденій. n = числу наблюденій.

---

89) Если мы хотимъ въ опредѣленіи U форм. (1) ограничится только однимъ членомъ, то должны остановиться на вычисленіи произведенія $F_0 \cdot \varphi_0$; если двухъ, то должны будемъ вычислить еще $F_1 \cdot \varphi_1$ и такъ далѣе до тѣхъ поръ пока S_0^2, S_1^2, $S_2^2 \ldots S_\alpha^2$ не сдѣлаются малы; полученныя произведенія должно сложить.

$$2)\ \varphi_0 = 1$$

$$3)\ S_0^2 = \Sigma u_i^{\,2} - \frac{n}{1} \cdot F_0^{\,2}.$$

Здѣсь $\Sigma u_i^{\,2} = u_1^{\,2} + u_2^{\,2} + u_3^{\,2} + \ldots + u_n^{\,2} =$ суммѣ квадратовъ результатовъ отдѣльныхъ наблюденій. Для вычисленія этой суммы удобно пользоваться приложенною въ концѣ нашей статьи таблицею квадратовъ. $F_0^{\,2}$ есть квадратъ величины, полученной въ формулѣ 1, этого же §.

Опредѣливши F_0 и φ_0, мы вычислимъ произведеніе $F_0 \cdot \varphi_0$,— это и будетъ искомый первый членъ выраженія U. S_0^2 даетъ намъ сумму квадратовъ ошибокъ, съ какими формула выражаетъ наблюденія, т. е. сумму квадратовъ разностей между размѣрами явленія, полученными путемъ наблюденія, и соотвѣтствующими размѣрами его, полученными путемъ вычисленія по нашей формулѣ. Если $\sqrt{\dfrac{S_0^2}{n}}$ [средняя квадратическая ошибка (см. стр. 40—41)] будетъ достаточно мала, то мы можемъ въ вычисленіи формулы U ограничиться однимъ первымъ членомъ (нами теперь опредѣленнымъ); если же этого не будетъ, то мы должны будемъ перейти къ вычисленію второго члена. Вычисленный здѣсь первый членъ $\left[F_0 \cdot \varphi_0 = \dfrac{\Sigma u_i}{n} \cdot 1 = + \dfrac{\Sigma u_i}{n}\right]$, какъ видно, представляетъ собою постоянную величину и есть ни что иное, какъ среднее ариѳметическое изъ всѣхъ результатовъ наблюденій. Такимъ образомъ здѣсь мы инымъ путемъ, чѣмъ раньше (стр. 22—23) приходимъ къ тому-же заключенію, что среднее ариѳметическое изъ (нѣсколькихъ) наблюденій представляетъ (приблизительно) дѣйствіе неслучайныхъ постоянныхъ причинъ,—постоянныхъ, такъ какъ время, если мы остановимся на первомъ членѣ, не входитъ въ формулу U (это значитъ, что явленіе отъ времени не зависитъ, что его причины постоянны).

§ II. Формулы для опредѣленія члена $F_1 \cdot \varphi_1$ [90]), [91])

$$1)\ F_1 = -\frac{3}{n} \cdot \frac{\Sigma C_i^1 \cdot C_{n-i}^1 \cdot \Delta u_i}{C_{n-i}^1} \ldots\ldots$$

[90]) Ниже (§ V) дана общая формула для вычисленія F, очень простая, ею и слѣдуетъ пользоваться при этихъ вычисленіяхъ. Для вычисленія φ_0, φ_1, φ_2, φ_3 удобнѣе пользоваться формулами, приведенными въ §§ I,II, III и IV, такъ какъ общая формула, приведенная въ § V (сама по себѣ довольно простая), можетъ нѣкоторымъ показаться сложной; къ тому же едва ли на практикѣ можетъ встрѣтиться нужда идти въ вычисленіи формулы дальше четвертаго члена, такъ что затрудняющіеся въ математическихъ выраженіяхъ могутъ даже вовсе опустить общее выраженіе φ. При вычисленіяхъ S^2 нужно помнить, что это есть символъ, а не квадратъ,—это тоже, что и раньше употреблявшееся у насъ $\Sigma\Delta^2$. Спѣшу далѣе предупредить читателя, что для вычисленія произведеній, стоящихъ подъ знаками Σ ниже будутъ даны самые простые (чисто *механическіе)* способы; для вычисленія Δ, Δ^2, Δ^3 и т. д. будутъ тоже указаны самые простые, самые легкіе пріемы.

[91]) C_α^β есть знакъ изъ теоріи соединеній, онъ обозначаетъ число со-

Здѣсь $\Sigma C^1_i \cdot C^1_{n-i} \cdot \Delta u_i = C^1_1 \cdot C^1_{n-1} \cdot \Delta u_1 + C^1_2 \cdot C^1_{n-2} \Delta u_2 + C^1_3 C^1_{n-3} \Delta u_3 + \ldots + C^1_{n-1} \cdot C^1_1 \cdot \Delta u_{n-1}$. Значенія C^1_1, C^1_2, C^1_3 и т. д. и C^1_{n-1}, C^1_{n-2}, C^1_{n-3} ..... и т. д. можно непосредственно найти въ приложенной ниже таблицѣ. Δu_1, Δu_2, Δu_3... (такъ называемыя конечныя разности перваго порядка) суть разности между результатами двухъ наблюденій, произведенныхъ черезъ единицу времени; при этомъ *предыдущій* результатъ вычитается *изъ послѣдующаго*, то есть $\Delta u_1 = u_2 - u_1$, $\Delta u_2 = u_3 - u_2$, $\Delta u_3 = u_4 - u_3$ и т. д.

$$2)\ \varphi_1 = 1 + (1,1) \,.\, x;$$

символъ $(1,1) = -\dfrac{2}{n+1}$

$$3)\ S^2_1 = S^2_0 - \frac{n}{3} \cdot \frac{n-1}{n+1} \,.\, F^2_1 \,.$$

S^2_0 и F^2_1 опредѣлены уже изъ формулъ § I, ихъ нужно только подставить сюда. Опредѣливши F_1 и φ_1, мы вычислимъ произведеніе $F_1 \,.\, \varphi_1$ и этотъ послѣдній результатъ должны будемъ прибавить къ результату $F_0 \,.\, \varphi_0$, уже раньше вычисленному, чтобы получить U.

S^2_1 есть сумма квадратовъ ошибокъ, съ какими формула выражаетъ наблюденія, если мы остановимся на второмъ членѣ ея. Если средняя квадратическая ошибка $\sqrt{\dfrac{S^2_1}{n}}$ достаточно мала, то мы можемъ остановиться на этомъ членѣ, если же нѣтъ, то должны продолжать вычисленіе. Очевидно, что S^2_1 меньше S^2_0, такъ какъ выраженіе $\dfrac{n}{3} \cdot \dfrac{n-1}{n+1} \cdot F_1{}^2$ будетъ всегда положительно, ибо n, $n-1$, $n+1$—всегда положительны, а $F_1{}^2$ взято въ квадратѣ.

§ III. Формулы для опредѣленія члена $F_2 \,.\, \varphi_2$.

$$1)\ F_2 = + \frac{5}{n} \cdot \frac{\Sigma C^2_{i+1} \cdot C^2_{n-i} \cdot \Delta^2 u_i}{C^2_{n-1}}$$

Величины $\Delta^2 u_i = \Delta u_{i+1} - \Delta u_i$, т. е. $\Delta^2 u_1 = \Delta u_2 - \Delta u_1$, $\Delta^2 u_2 = \Delta u_3 - \Delta u_2$, и т. д.,—это такъ называемыя конечныя разности второго порядка. Величины C съ разными индексами (значками) можно найти

четаній (combinaison) изъ α элементовъ по β. Число сочетаній опредѣляется по формулѣ:

$$C^\beta_\alpha = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots\ldots(\alpha-\beta+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots\ldots\beta}.$$

[„Начальная Алгебра“ *Давидова* стр. 262 (изд. 1875 г.)]. Ниже у насъ предложена табличка, въ которой можно прямо найти числа сочетаній, не производя указанныхъ здѣсь дѣйствій.

въ помѣщенной ниже таблицѣ «треугольникѣ Паскаля». Знакъ Σ обозначаетъ сумму, какъ и въ §§ I и II;

2) φ_2 такъ выражается черезъ символы:

$$\varphi_2 = 1 + (1,2) \cdot x + (2,2) \cdot x^2,$$

сами же символы имѣютъ такія значенія:

$$(1,2) = -\frac{6}{n+2}, \quad (2,2) = +\frac{6}{(n+1) \cdot (n+2)}$$

$$3) \quad S_2^2 = S_1^2 - \frac{n}{5} \cdot \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{n-2}{n+2} \cdot F_2^2$$

Опредѣливши F_2 и φ_2, мы вычислимъ произведеніе $F_2 \cdot \varphi_2$; оно будетъ третьимъ членомъ выраженія U, который, поэтому, и должно прибавить къ вычисленной уже въ § II суммѣ $F_0 \cdot \varphi_0 + F_1 \cdot \varphi_1$.

S_2^2 выразить сумму квадратовъ ошибокъ, съ которыми формула U выражаетъ наблюденія, если мы остановимся на третьемъ членѣ ея. S_2^2 будетъ очевидно меньше S_1^2. Если $\sqrt{\frac{S_2^2}{n}}$ будетъ достаточно мала, то мы можемъ ограничиться вычисленіемъ только трехъ членовъ, если нѣтъ—должны опредѣлить четвертый членъ $F_3 \cdot \varphi_3$ и прибавить его къ уже полученному результату, чтобы получить U.

§ IV. Формулы для опредѣленія члена $F_3 \cdot \varphi_3$

$$1) \quad F_3 = -\frac{7}{n} \cdot \frac{\Sigma\, C^3_{i+2} \cdot C^3_{n-i} \cdot \Delta^3 u_i}{C^3_{n-1}}.$$

Здѣсь $\Delta^3 u_i = \Delta^2 u_{i+1} - \Delta^2 u_i$, т. е. $\Delta^3 u_1 = \Delta^2 u_2 - \Delta^2 u_1$, $\Delta^3 u_2 = \Delta^2 u_3 - \Delta^2 u_2$, $\Delta^3 u_3 = \Delta^2 u_4 - \Delta^2 u_3$ и т. д. $C^3{}_{i+2}$, $C^3{}_{n-i}$, $C^3{}_{n-1}$ суть числа сочетаній по три элемента изъ $i+2$, $n-i$ и $n-1$ элементовъ (величины ихъ найдемъ въ таблицѣ). Знакъ Σ имѣетъ прежнее значеніе.

2) φ_3, выраженное черезъ символы, будетъ таково:

$$\varphi_3(x) = 1 + (1,3) \cdot x + (2,3)\, x^2 + (3,3)\, x^3,$$

а сами символы вычислятся по формуламъ:

$$(1,3) = -\frac{2\,(6n^2 + 15n + 11)}{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}; \quad (2,3) = \frac{30}{(n+2)\,(n+3)};$$

$$(3,3) = -\frac{20}{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}.$$

$$3) \quad S_3^2 = S_2^2 - \frac{n}{7} \cdot \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{n-2}{n+2} \cdot \frac{n-3}{n+3} \cdot F_3^2$$

Произведеніе $F_3 \cdot \varphi_3$ опредѣлитъ четвертый членъ формулы U; S_3^2 охарактеризуетъ степень точности ея.

§ V. Общія формулы для опредѣленія любаго члена $F_\lambda \cdot \varphi_\lambda$.

1) Для опредѣленія F_0, F_1, $F_2 \ldots\ldots F_\lambda \ldots\ldots F_m$ имѣемъ общее выраженіе:

$$F_\lambda = (-1)^\lambda \cdot \frac{2\lambda+1}{n} \cdot \frac{\Sigma C^\lambda_{i+\lambda-1} \cdot C^\lambda_{n-i} \cdot \Delta^\lambda_{u_i}}{C^\lambda_{n-1}}.$$

Подставляя на мѣсто λ числа 0,1,2,3 и т. д., на мѣсто n—число наблюденій и, зная что $\Delta^0 u_i = u_i$, мы получимъ F_0, F_1, F_2, F_3 и т. д. Величины C съ различными индексами представляютъ числа сочетаній изъ $i+\lambda-1$, $n-i$, $n-1$ элементовъ по λ. *Значенія ихъ для различныхъ индексовъ находимъ непосредственно въ таблицѣ*, называемой «треугольникомъ Паскаля», которою мы сейчасъ займемся. Величины $\Delta^\lambda u_i$ (такъ называемыя, конечныя разности λ-аго порядка) имѣютъ слѣдующее значеніе:

$$\Delta^\lambda u_i = \Delta^{\lambda-1}_{u_{i+1}} - \Delta^\lambda u_i\,,\ \text{т. е. } \Delta^\lambda u_1 = \Delta^{\lambda-1}_{u_2} - \Delta^{\lambda-1}_{u_1},$$

$$\Delta^\lambda u_2 = \Delta^{\lambda-1}_{u_3} - \Delta^{\lambda-1}_{u_2} \text{ и т. д.}$$

вычисленіе ихъ, очень простое, дается таблицей, которую мы помѣстимъ тотчасъ послѣ «треугольника Паскаля».

2) Для опредѣленія φ_0, $\varphi_1 \ldots\ldots \varphi_\lambda \ldots\ldots \varphi_m$ имѣемъ слѣдующее общее выраженіе (въ него входятъ, какъ и въ предыдущихъ §§, нѣкоторые символы):

$$\varphi_\lambda = 1 + (1,\lambda) \cdot x + (2,\lambda) \cdot x^2 + (3,\lambda)\, x^3 + \ldots\ldots + (\lambda,\lambda)\, x^\lambda.$$

Подставляя на мѣсто λ числа 0,1,2,3 и т. д. получимъ значенія φ_0, φ_1, φ_2, φ_3 и т. д. Входящіе сюда символы:

$$\begin{array}{rrl} (1,1), & (1,2), & (1,3)\ldots\ldots\ldots(1,m) \\ & (2,2), & (2,3)\ldots\ldots\ldots(2,m) \\ & & (3,3)\ldots\ldots\ldots(3,m) \\ & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & & \text{и т. д.} \end{array}$$

выводятся одни изъ другихъ съ помощью равенства:

$$(\mu,\lambda+1) = \frac{2\lambda+1}{\lambda+1} \cdot \frac{n+1}{n+\lambda+1} \left[(\mu,\lambda) - \frac{2}{(n+1)}\,(\mu-1,\lambda)\right] -$$

$\frac{\lambda}{\lambda+1} \cdot \frac{n-\lambda}{n+\lambda+1} \cdot (\mu,\lambda-1)$. Подставляя въ эту формулу на мѣста μ и λ числа: 0,1,2,3..... и т. д., получимъ всѣ значенія символовъ; при этомъ нужно имѣть въ виду, что всѣ символы вида: (0,0), (0,1), (0,2), (0,3)........(0,m) равны единицѣ (1) а, символы (μ,λ), въ которыхъ μ больше λ, будутъ равны нулю (0). Для примѣра покажемъ какъ вычисляются коэффиціенты выраженія φ_4. Подставляя вмѣсто λ число 3, получимъ:

$$(\mu,4) = \frac{7}{4} \cdot \frac{n+1}{n+4} \cdot \left[(\mu,3) - \frac{2}{n+1} \cdot (\mu-1,3)\right] - \frac{3}{4} \cdot \frac{n-3}{n+4} \cdot (\mu,2).$$

Для вычисленія коэффиціента при x вмѣсто μ ставимъ 1; получаемъ $(1{,}4)=\frac{7}{4}\cdot\frac{n+1}{n+4}\left[(1{,}3)-\frac{2}{(n+1)}(0{,}3)\right]-\frac{3}{4}\cdot\frac{n-3}{n+4}(1{,}2)$.

Но мы знаемъ, что:

символъ $(1{,}3)=-\frac{2(6n^2+15n+11)}{(n+1)(n+2)(n+3)}\ldots$ § (IV);

символъ (0,3), по сдѣланному раньше замѣчанію, равенъ 1;

символъ $(1{,}2)=-\frac{6}{n+2}\ldots$ § III;

слѣдовательно, символъ $(1{,}4)=-\frac{10(2n^2+7n+10)}{(n+2)(n+3)(n+4)}$. Для вычисленія коэффиціентовъ при x^2, x^3, x^4, вмѣсто μ ставимъ 2, 3, 4 и дѣлаемъ только подстановки раньше полученныхъ значеній символовъ. Очевидно, если мы подставимъ вмѣсто μ число 5, то получимъ, что $(5{,}4)=0$, такъ какъ всѣ символы правой стороны равенства обратятся въ нули.

3) Для опредѣленія суммы квадратовъ ошибокъ, съ которыми формула выражаетъ наблюденія, если мы остановимся на второмъ, третьемъ и т. д. членахъ формулы, т. е. для опредѣленія S_1^2, S_2^2, S_3^2 и т. д. имѣемъ такое общее выраженіе:

$$S_\lambda^2=S_{\lambda-1}^2-\frac{n}{2\lambda+1}\cdot\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{n-2}{n+2}\cdot\frac{n-3}{n+3}\cdots\frac{n-\lambda}{n+\lambda}\cdot F_\lambda^2.$$

Подставляя послѣдовательно различныя значенія λ, именно 1, 2, 3....., мы выразимъ послѣдовательно S_1^2 черезъ S_0^2 и F_1^2; S_2^2 —черезъ S_1^2 и F_2^2; S_3^2—черезъ S_2^2 и F_3^2 и т. д., т. е. для опредѣленія неизвѣстнаго S_λ^2 нужно будетъ только подставлять уже раньше вычисленные S_0^2, S_1^2 и т. д.

Второй членъ правой части равенства, очевидно, положителенъ; слѣдовательно S_λ^2 меньше $S_{\lambda-1}^2$, т. е. сумма квадратовъ ошибокъ съ возростаніемъ λ уменьшается.

Укажемъ теперь способы вычисленія величинъ, стоящихъ въ вышеприведенныхъ формулахъ подъ знаками Δ и Σ.

Ниже написанная табличка, извѣстная подъ именемъ «ариѳметическаго треугольника *Паскаля*», составлена такимъ образомъ, что каждое число *столбца* равно суммѣ двухъ чиселъ предыдущей *строки*, изъ которыхъ одно стоитъ въ томъ же столбцѣ, а другое— въ сосѣднемъ *лѣвомъ*[93]). Такъ напримѣръ, число 120 стоящее, на пересѣченіи 10-й строки и 3-го столбца, равно суммѣ $36+84=120$; число 210, стоящее въ 4 столбцѣ той же строки, $=84+126=210$ и т. д.

---

[93]) Треугольникъ *Паскаля* обыкновенно составляется иначе—по строкамъ; но намъ удобнѣе смотрѣть на эту таблицу такъ, какъ мы только что сказали: тогда мы будемъ имѣть возможность составлять ее по столбцамъ.

АРИѲМЕТИЧЕСКІЙ ТРЕУГОЛЬНИКЪ ПАСКАЛЯ.

(*Маіевскій* „Способъ наим. квадр." стр. 222; *Джевонсъ* „Основы науки" 1881 г. стр. 177—183; *Давидовъ* „Начальн. Алгебра" 1875 г. стр. 264).

	0-й столб.	1-й столб.	2-й столб.	3-й столб.	4-й столб.	5-й столб.
0-я стр.	1					
1-я „	1	1				
2-я „	1	2	1			
3-я „	1	3	3	1		
4-я „	1	4	6	4	1	
5-я „	1	5	10	10	5	1
6-я „	1	6	15	20	15	6
7-я „	1	7	21	35	35	21
8-я „	1	8	28	56	70	56
9-я „	1	9	36	84	126	126
10-я „	1	10	45	120	210	252
11-я „	1	11	55	165	330	462
12-я „	1	12	66	220	495	792
13-я „	1	13	78	286	715	1287
14-я „	1	14	91	364	1001	2002
15-я „	1	15	105	455	1365	3003
16-я „	1	16	120	560	1820	4368
17-я „	1	17	136	680	2380	6188
18-я „	1	18	153	816	3060	8568
19-я „	1	19	171	969	3876	11628
Сочетан.	:	по 1	по 2	по 3	по 4	по 5

Эта таблица даетъ намъ числа сочетаній (combinaison) *изъ* числа элементовъ, указаннаго N-омъ *строки*, *по* числу элементовъ, указанному N-омъ *столбца*. Такъ что для отысканія числа сочетаній изъ 15 элементовъ по 5—что обозначается въ теоріи соединеній знакомъ C_{15}^{5}—мы беремъ *строку* № 15 и *столбецъ* № 5, въ пересѣченіи ихъ найдемъ число 3003, оно и опредѣляетъ намъ искомое число сочетаній. Эта табличка очень упрощаетъ вычисленія F_1, F_2 ... F_λ ... F_m. Дѣло въ томъ, что

$$F_\lambda = (-1)^\lambda \cdot \frac{2\lambda+1}{n} \cdot \frac{\Sigma C^\lambda_{i+\lambda-1} \cdot C^\lambda_{n-i} \cdot \Delta^\lambda_{u_i}}{C^\lambda_{n-1}},$$

гдѣ всѣ C со значками выражаютъ числа сочетаній *изъ* чиселъ элементовъ указанныхъ *нижними* индексами (значками), *по* числамъ элементовъ, указаннымъ *верхними* индексами, поэтому для опредѣленія $C^\lambda_{i+\lambda-1}$ мы должны взять *строку* № $i+\lambda-1$ (*нижній* индексъ) и столбецъ № λ (*верхній* индексъ); въ пересѣченіи столбца и строки получимъ искомое число. Точно такъ же поступаемъ и съ C^λ_{n-i} и C^λ_{n-1}. Повторяемъ: *для опредѣленія C^β_α по ариѳметическому треугольнику Паскаля нужно взять строку N нижняго индекса* (α) *и столбецъ N верхняго индекса* (β); *въ пересѣченіи ихъ получимъ искомое число.*

Укажемъ теперь способъ опредѣленія конечныхъ разностей различныхъ порядковъ. Онѣ вычисляются крайне просто послѣдовательнымъ вычитаніемъ въ слѣдующей таблицѣ:

u_1			
u_2	$\Delta u_1 = u_2 - u_1$		
u_3	$\Delta u_2 = u_3 - u_2$	$\Delta^2 u_1 = \Delta u_2 - \Delta u_1$	
u_4	$\Delta u_3 = u_4 - u_3$	$\Delta^2 u_2 = \Delta u_3 - \Delta u_2$	$\Delta^3 u_1 = \Delta^2 u_2 - \Delta^2 u_1$
. . . . .	. . . . .	$\Delta^2 u_3 = \Delta u_4 - \Delta u_3$	$\Delta^3 u_2 = \Delta^2 u_3 - \Delta^2 u_2$
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
u_{n-1}		$\Delta_2 u_{n-2} = \Delta u_{n-1} - \Delta u_{n-2}$	$\Delta^3 u_{n-3} = \Delta^2 u_{n-2} - \Delta^1 u_{n-3}$
u_n	$\Delta u_{n-1} = u_n - u_{n-1}$		

и т. д.

Посредствомъ послѣдовательнаго вычитанія *предыдущихъ* результатовъ наблюденій изъ *послѣдующихъ* получаемъ конечныя разности перваго порядка (для удобства помѣщаемъ ихъ справа между u_i и u_{i+1}, какъ указано въ таблицѣ); послѣдовательнымъ вычитаніемъ разностей перваго порядка (результъ записываемъ такимъ же образомъ какъ и первыя разности) получаемъ конечныя разности втораго порядка и т. д.

Пояснимъ наши разсужденія примѣромъ. Предположимъ, что рядъ, данный проф. *Янсономъ* на стр. 502 его «Теоріи Статистики» выражаетъ собою данныя нѣкоторыхъ наблюденій надъ какимъ либо общественнымъ явленіемъ, сдѣланныхъ періодически (напримѣръ черезъ годъ). Этотъ рядъ таковъ:

$$u_1 = 72$$
$$u_2 = 60$$
$$u_3 = 88$$
$$u_4 = 90$$
$$u_5 = 94$$
$$u_6 = 101$$
$$u_7 = 103$$
$$u_8 = 91$$
$$u_9 = 111$$
$$u_{10} = 84$$

Вычислимъ каковъ былъ бы этотъ рядъ, если бы на него не дѣйствовали случайныя причины? Для этого выразимъ членъ ряда въ функціи его мѣста въ ряду (въ функціи времени по нашему предположенію) [94]) помощью интерполированія по способу наименьшихъ квадратовъ. Будемъ вычислять послѣдовательно члены въ выраженіи

$$U = F_0 \cdot \varphi_0 + F_1 \cdot \varphi_1 + F_2 \cdot \varphi_2 + \ldots\ldots$$

I. Для опредѣленія выраженія $F_0\,\varphi_0$ имѣемъ:

$$1)\; F_0 = + \frac{\Sigma u_i}{n} = \frac{72+60+88+90+94+101+103+91+111+84}{10} = 89{,}_4.$$

$$2)\; \varphi_0 = 1$$

Произведеніе $F_0 \cdot \varphi_0 = 89{,}_4 \cdot 1 = 89{,}_4$

3) Для характеристики степени точности формулы имѣемъ:

$$S_0^2 = \Sigma u_i^2 - \frac{n}{1} F_0^2 = 72^2+60^2+88^2+90^2+94^2+101^2+103^2+91^2+111^2+84^2 -$$
$$- (89{,}_4)^2 \cdot 10.$$

При помощи таблицы квадратовъ находимъ (см. конецъ нашей статьи и сочиненіе проф. *Маіевскаго* «способъ наименьшихъ квадратовъ» стр. 216):

$$\begin{array}{rrcr}
 & 72^2 & = & 5184 \\
 & 60^2 & = & 3600 \\
 & 88^2 & = & 7744 \\
 & 90^2 & = & 8100 \\
 & 94^2 & = & 8836 \\
+ & 101^2 & = & 10201 \\
 & 103^2 & = & 10609 \\
 & 91^2 & = & 8281 \\
 & 111^2 & = & 12321 \\
 & 84^2 & = & 7056 \\
\hline
 & \Sigma u_i^2 & = & 81932
\end{array}$$

[94]) Время удобнѣе всего считать, начиная съ перваго наблюденія.

$$S_0^2 = \Sigma u_i{}^2 - \frac{n}{1} \cdot F_0{}^2 = 81932 - \frac{10}{1} \cdot (89,_4)^2 = 81932 - 10 \cdot 7992,_{36} =$$

$= 2008,_4$; средняя квадратическая ошибка $\sqrt{\dfrac{S_0^2}{n}} =$

$= \sqrt{200,_{84}} = 14,_{172}$;

ошибка эта оказывается настолько значительной, что ограничиваться однимъ членомъ въ выраженіи U нельзя; поэтому перейдемъ къ опредѣленію члена $F_1 \cdot \varphi_1$.

II. Для опредѣленія члена $F_1 \cdot \varphi_1$ имѣемъ слѣдующія формулы:

$$1)\ F_1 = -\frac{3}{n} \cdot \frac{\Sigma\, C_i^1 \cdot C_{n-i}^1 \cdot \Delta u_i}{C_{n-1}^1} \cdots (\S\ II),$$

а такъ какъ $n = 10$, то

$$F_1 = -\frac{3}{10} \cdot \frac{\Sigma\, C_i^1 \cdot C_{10-i}^1 \cdot \Delta u_i}{C_9^1}.$$

Всѣ величины C мы находимъ въ *Паскалевомъ* ариѳметическомъ треугольникѣ; Δu_i придется вычислять послѣдовательнымъ вычитаніемъ предыдущихъ наблюденій изъ послѣдующнхъ (u_i изъ u_{i+1}). Вычислимъ указаннымъ выше способомъ не только первыя разности, но и разности высшихъ порядковъ, такъ какъ ими придется пользоваться впослѣдствіи.

Эти вычисленія производятся такимъ образомъ:

	Столб. № 1	Столб. № 2	Столб. № 3	....
$u_1 = 72$	$\Delta u_1 = -12$	$\Delta^2 u_1 = 40$	$\Delta^3 u_2 = -66$	
$u_2 = 60$	$\Delta u_2 = 28$	$\Delta^2 u_2 = -26$	$\Delta^3 u_3 = +28$	
$u_3 = 88$	$\Delta u_3 = 2$	$\Delta^2 u_3 = 2$	$\Delta^3 u_4 = 1$	
$u_4 = 90$	$\Delta u_4 = 4$	$\Delta^2 u_4 = 3$	$\Delta^3 u_5 = -8$	
$n_5 = 94$	$\Delta u_5 = 7$	$\Delta^2 u_5 = -5$	$\Delta^3 u_6 = -9$	
$u_6 = 101$	$\Delta u_6 = 2$	$\Delta^2 u_6 = -14$	$\Delta^3 u_7 = 46$	
$u_7 = 103$	$\Delta u_7 = -12$	$\Delta^2 u_7 = +32$	$\Delta^4 u_1 = -79$	
$u_8 = 91$	$\Delta u_8 = 20$	$\Delta^2 u_8 = -47$		
$u_9 = 111$	$\Delta u_9 = -27$			
$u_{10} = 84$				

И т. д. Путемъ послѣдовательнаго вычитанія предыдущей величины изъ послѣдующей получимъ остальные столбцы.

Помощью этой таблицы и ариѳметическаго треугольника *Паскаля* находимъ (пользуясь въ обѣихъ таблицахъ столбцами №. 1):

	C^1_i	C^1_{10-i}	Δu_i	
при $i=1$	1	9	-12	$=-108$
» $i=2$	2	8	28	$=+448$
» $i=3$	3	7	2	$=+42$
» $i=4$	4	6	4	$=+96$
» $i=5$	5	5	7	$=+175$
» $i=6$	6	4	2	$=+48$
» $i=7$	7	3	-12	$=-252$
» $i=8$	8	2	20	$=+320$
» $i=9$	9	1	-27	$=-243$
$\Sigma\, C^1_{i+1}$		C^1_{10-i}	$\Delta u_i=$	463

Стоящее въ знаменателѣ C^1_9 изъ треугольника *Паскаля* находимъ равнымъ 9, и всё наше выраженіе обращается въ:

$$F_1 = -\frac{3}{10}\cdot\frac{463}{9} = -\frac{463}{30} = -15\frac{13}{30}\,.$$

2) Для опредѣленія φ_1 имѣемъ:

$$\varphi_1 = 1 + (1{,}1)\;.\;x.....(\S\ \text{II}),\ \text{гдѣ}\ (1{,}1) = -\frac{2}{n+1} = -\frac{2}{11}\,,$$

т. е. $\varphi_1 = 1 - \frac{2x}{11}\,.$

Произведеніе $F_1\,.\,\varphi_1$ будетъ такимъ образомъ имѣть слѣдующее значеніе:

$$F_1\,.\,\varphi_1 = -\frac{463}{30}\left(1-\frac{2x}{11}\right) = -\frac{463}{30} + \frac{463}{165}\,.\,x = -15{,}_{43} + 2{,}_{8}\,.\,x.$$

3) Для характеристики формулы—насколько точно она выражаетъ наблюденія, если мы остановимся на второмъ членѣ — имѣемъ такое выраженіе:

$$S_1^2 = S_0^2 - \frac{n}{3}\cdot\frac{n-1}{n+3}\,.\,F_1^2.....\ (\S\ \text{II}).$$

Отсюда получаемъ (подставляя вычисленныя уже нами: $S_0^2 = 2008{,}_4$ и $F_1 = -\frac{463}{30}$), что

$$S_1^2 = 2008{,}_4 - \frac{30}{11}\cdot\left(\frac{463}{30}\right)^2 = 2008{,}_4 - 649{,}_6 = 1358{,}_8.$$

Слѣдовательно, средняя квадратическая ошибка будетъ:

$\sqrt{\dfrac{S_1^2}{10}} = \sqrt{135{,}_{88}} = 11{,}_{675}$. Эта ошибка хотя нѣсколько и меньше $\sqrt{\dfrac{S_0^2}{n}}$, но все еще очень велика; поэтому перейдемъ къ опредѣленію третьяго члена формулы U, $F_2\,.\,\varphi_2$.

III. Для опредѣленія члена $F_2\,\varphi_2$ имѣемъ:

$$1)\ F_2 = \frac{5}{n} \cdot \frac{\Sigma\, C^2_{i+1} \cdot C^2_{n-i} \cdot \Delta^2 u_i}{C^2_{n-1}} = \frac{5}{10} \cdot \frac{\Sigma\, C^2_{i+1} \cdot C^2_{10-i} \cdot \Delta^2 u_i}{C^2_9} \ldots.. (\S\ III).$$

Изъ треугольника *Паскаля* и приведенной выше таблицы для опредѣленія Δ различныхъ порядковъ находимъ (пользуясь въ обѣихъ таблицахъ вторыми столбцами), что при различныхъ i произведенія $C^2{}_{i+i} \cdot C^2{}_{10-i} \cdot \Delta^2 u_i$ имѣютъ слѣдующія значенія:

	$C^2{}_{i+1}$	$C^2{}_{10-i}$	$\Delta^2 u_i$	
при $i = 1$	1	36	40	$= 1440$
» $i = 2$	3	28	-26	$= -2184$
» $i = 3$	6	21	2	$= 252$
» $i = 4$	10	15	3	$= 450$
» $i = 5$	15	10	-5	$= -750$
» $i = 6$	21	6	-14	$= -1764$
» $i = 7$	28	3	32	$= 2688$
» $i = 8$	36	1	-47	$= -1692$
» $i = 9$	45	0	0	$= 0$
» $i = 10$	55	0	0	$= 0$

$$\Sigma\, C^2{}_{i+1} \cdot C^2{}_{10-i} \cdot \Delta^2 u_i = -1560$$

Стоящее въ знаменателѣ $C^2{}_9$ изъ треугольника *Паскаля* находимъ равнымъ 36; поэтому все выраженіе F_2 будетъ

$$F_2 = \frac{5}{10} \cdot -\frac{1560}{36} = -\frac{65}{3} = -21^2/_3 = -21,_{67}$$

2) Для опредѣленія φ_2 имѣемъ:

$$\varphi_2 = 1 + (1,2) \cdot x + (2,2)\, x^2 \ldots. (\S\ III)$$

а символы:
$$\left.\begin{aligned} (1,2) &= -\frac{6}{n+2} = -\frac{6}{12} = -0,5 \text{ и} \\ (2,2) &= \frac{6}{(n+1)\,(n+2)} = \frac{6}{11 \cdot 12} = 0,045 \end{aligned}\right\}\ \text{ibid.}$$

Откуда: $\varphi_2 = 1 - 0,5 \cdot x + 0,045 \cdot x^2$;

искомый же членъ $F_2 \cdot \varphi_2$ приметъ такое значеніе:

$$F_2 \cdot \varphi_2 = -21,_{67} + 10,_{835}\, x - 0,_{97515} \cdot x^2$$

Для характеристики точности, съ какою формула будетъ выражать наблюденія, если мы остановимся на этомъ третьемъ членѣ, имѣемъ:

$$S^2_2 = S^2_1 - \frac{n}{5} \cdot \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{n-2}{n+2} \cdot F^2_2 \ldots. (\S\ III).$$

Если подставимъ вычисленныя уже нами значенія

$$S^2_1 = 1358,_8 \text{ и } F_2 = -\frac{65}{3}$$

и замѣнимъ n числомъ 10, то получимъ

$$S_2^2 = 1358{,}_8 - \frac{10}{5} \cdot \frac{9}{11} \cdot \frac{8}{12} \cdot \left(\frac{65}{3}\right)^2 = 1358{,}_8 - 512{,}_{12} = 845{,}_{68}\ .$$

Средняя же квадратическая ошибка, съ которою формула выражаетъ наблюденія, будетъ равна:

$$\sqrt{\frac{S_2^2}{n}} = \sqrt{84{,}_{568}} = 9{,}_{1963}\ .$$

Конечно, и эта ошибка «недопустительна», какъ выражается проф. *Маіевскій* [она для самаго меньшаго члена ряда (60) составляетъ больше 15% и для самаго большаго (III)—больше 8%]; но намъ кажется, что способъ послѣдовательнаго вычисленія членовъ формулы

$$U = a + bx + cx^2 + dx^3 \ldots . ,$$

представленной въ видѣ

$$U = F_0 \cdot \varphi_0 + F_1 \cdot \varphi_1 + F_2 \cdot \varphi_2 \cdot + \ldots .$$

достаточно выясненъ (что только и имѣлось нами въ виду); поэтому дальнѣйшее вычисленіе ихъ мы прекратимъ. Да къ тому же отъ нашего примѣра и нельзя ожидать особенной точности, такъ какъ рядъ взятъ нами совершенно произвольно; числа составляющія его члены не получены наблюденіемъ какого-нибудь дѣйствительнаго явленія (тогда мы могли бы не сомнѣваясь говорить о существованіи неслучайныхъ причинъ), поэтому послѣдовательность ихъ въ ряду случайна; взятый рядъ служитъ намъ только примѣромъ способовъ *вычисленія*,—не больше: вѣдь въ этой части мы разсматриваемъ способы *вычисленія* соизмѣненія причины и слѣдствія, когда существованіе причинной зависимости такъ или иначе уже доказано. Но даже если бы мы имѣли дѣло и съ не случайно составленнымъ рядомъ, число членовъ, которое мы здѣсь имѣемъ (ихъ всего 10), слишкомъ незначительно для того, чтобы можно было въ болѣе или менѣе значительной степени исключить случайность.

Чтобы получить формулу U нужно сложить найденныя значенія членовъ $F_0 \cdot \varphi_0$, $F_1 \cdot \varphi_1$, $F_2 \cdot \varphi_2$ .....; сдѣлаемъ это:

$$\begin{aligned}
F_0 \cdot \varphi_0 &= \quad 89{,}_4 \\
F_1 \cdot \varphi_1 &= -15{,}_{43} + 2{,}_8 \cdot x \\
F_2 \cdot \varphi_2 &= -21{,}_{67} + 10{,}_{835} \cdot x - 0{,}_{97515} \cdot x^2 .
\end{aligned}$$

$$\text{т. е. } U = 52{,}_3 + 13{,}_{635} \cdot x - 0{,}_{97515} \cdot x^2 ,$$

или, ограничиваясь двумя десятичными знаками, получимъ, что

$$U = 52{,}_3 + 13{,}_{63}\, x - 0{,}_{98} \cdot x^2 .$$

Такова формула, выражающая величину членовъ нашего ряда въ зависимости отъ мѣста нахожденія ихъ въ ряду (времени), настолько свободно отъ случайности, на сколько это дозволяютъ наблюденія (со среднею квадратическою ошибкою равною $9,_{1963}$). Вычислимъ эти члены, подставляя различныя значенія времени (x), т. е. давая ему значенія 1,2,3...10. Находимъ, что

при $x = 1 \ldots\ldots U = 64,_{95}$
» $x = 2 \ldots\ldots U = 75,_{64}$
» $x = 3 \ldots\ldots U = 84,_{37}$
» $x = 4 \ldots\ldots U = 91,_{14}$
» $x = 5 \ldots\ldots U = 95,_{95}$
» $x = 6 \ldots\ldots U = 98,_{80}$
» $x = 7 \ldots\ldots U = 99,_{69}$
» $x = 8 \ldots\ldots U = 98,_{62}$
» $x = 9 \ldots\ldots U = 95,_{59}$
» $x = 10 \ldots\ldots U = 90,_{6}$.

Рядъ, здѣсь написанный, долженъ быть уже болѣе свободнымъ отъ дѣйствія случайныхъ причинъ, чѣмъ рядъ, взятый нами вначалѣ примѣра. Законъ измѣненія явленія со временемъ выражается формулой:

$$U = 52,_{3} + 13,_{63} \cdot x - 0,_{98}\, x^{2}.$$

Такимъ образомъ сначала съ увеличеніемъ x (со временемъ) рядъ возрастаетъ; при $x = 6,_{954}$ онъ дастигаетъ maximum'a (при $x = 6,_{954}$, $U = 101,_{825}$); при дальнѣйшемъ возростаніи x U убываетъ. (95)

Вычисливши такіе ряды для различныхъ общественныхъ элементовъ, мы можемъ сопоставить ихъ между собою способомъ, указаннымъ въ первой части «метода сопутствующихъ измѣненій»,

---

95) Вычисленіе рядовъ, предложенное проф. *Янсономъ* въ его „Теоріи Статистики“ (стр. 500—503), есть также интерполированіе по способу наименьшихъ квадратовъ, тамъ также разрѣшается вопросъ объ опредѣленіи зависимости величины членовъ рядѣ отъ ихъ мѣста нахожденія въ ряду, возможно свободной отъ случайности. Только тамъ предложены нѣсколько иные пріемы, болѣе сложные, чѣмъ у проф. *Маіевскаго* (Способъ наименьшихъ квадратовъ стр. 218—223), которыхъ мы придерживались въ своемъ изложеніи того-же вопроса; при этомъ въ Теоріи Статистики не указанъ способъ опредѣлять мѣру точности формулы. Разница между рядамъ, вычисленнымъ проф. *Янсономъ* (стр. 503) и вычисленнымъ здѣсь нами происходитъ отъ слѣдующихъ причинъ. 1) У проф. *Янсона* и у насъ положены въ основаніе различныя формулы, что при приближенныхъ вычисленіяхъ должно давать нѣсколько различные результаты. 2) Проф. *Янсонъ* совершенно произвольно предположилъ, что постоянный членъ формулы равенъ 72 (первому члену ряда); указать какія-либо основанія въ пользу такого предположенія, думается намъ, нельзя. Правда почтенный авторъ говоритъ, что 72 взято имъ за основаніе преобразованія (приведенія) ряда,—но что въ данномъ случаѣ значитъ (логически) „*основаніе приведенія*“?

Можетъ показаться, что рядъ нашъ отличается отъ ряда проф. *Янсона* еще тѣмъ, что сначала онъ возрастаетъ до извѣстнаго предѣла, а затѣмъ убываетъ,—такого различія между ними нѣтъ, такъ какъ послѣдній тоже достигаетъ своего maximum'a между девятымъ и десятымъ членами, послѣ чего начинаетъ убывать (при $x = 8,_{5853}$, $y = 102,_{22}$).

и, думается намъ, отъ этого рода сопоставленій нужно ожидать значительныхъ результатовъ. Стоитъ только немного вдуматься, чтобы оцѣнить огромное преимущество этихъ рядовъ передъ рядами, полученными непосредственно изъ наблюденія: *они значительно свободны отъ вліянія случая*, который ставитъ почти непреодолимыя преграды ко всякаго рода заключеніямъ относительно общественныхъ явленій, основаннымъ на данныхъ наблюденія. Если мы относимся съ большимъ довѣріемъ къ среднимъ ариѳметическимъ изъ большого числа наблюденій и даже нѣкоторыя заключенія основываемъ *единственно* на ихъ показаніи (какъ въ вышеприведенномъ примѣрѣ о вліяніи законности и незаконности порожденія на полъ новорожденнаго), то дѣлаемъ это только потому, что среднее ариѳметическое изъ большаго числа наблюденій въ значительной степени свободно отъ вліянія случая. — Такимъ же точно свойствомъ отличаются и результаты, полученные помощью нашей формулы: въ основаніи предлагаемаго здѣсь метода (способа наименьшихъ квадратовъ) и въ основаніи метода среднихъ ариѳметическихъ лежитъ *одинъ и тотъ-же* принципъ—*законъ большихъ чиселъ*. Сопоставляя составленные такимъ образомъ ряды, мы уже съ большей увѣренностью можемъ утверждать, что совпаденіе ихъ указываетъ на существованіе причинной зависимости (прямой или косвенной) между явленіями, ими изображаемыми. Но этого мало, эти ряды даютъ намъ средства къ разрѣшенію различныхъ вопросовъ динамики общественныхъ явленій: сопоставляя измѣненія во времени различныхъ общественныхъ явленій, измѣненія въ значительной степени свободныя отъ случайности, мы можемъ указать какія силы дѣйствуютъ въ этихъ *неслучайныхъ* измѣненіяхъ общественныхъ явленій, — можемъ открыть законы прогрессивныхъ движеній общества...

Прежде чѣмъ окончитъ эту статью мы должны сдѣлать еще одно замѣчаніе, чтобы нѣкоторыя мѣста въ ней не вызвали недоразумѣній. Мы сказали, что вѣроятность есть характеристика связи даннаго явленія съ его неслучайными постоянными причинами; но мы говорили также, что отношеніе числа повтореній даннаго событія къ числу произведенныхъ наблюденій (при большомъ числѣ наблюденій) есть *найвѣроятнѣйшее* значеніе вѣроятности этого событія; что среднее ариѳметическое и рѣшенія, полученныя по способу наименьшихъ квадратовъ, суть *наивѣроятнѣйшія* значенія размѣровъ событія.—Какъ понимать эти выраженія? т. е. о какой причинной связи мы здѣсь говорили, упоминая о вѣроятности, и что (логически) значатъ эти найвѣроятнѣйшіе результаты?

Результатъ рѣшенія вопроса есть дѣйствіе, слѣдствіе пріема рѣшенія, степени точности, съ какою произведены наблюденія, необходимыя для рѣшенія вопроса, числа этихъ наблюденій,—все это неслучайныя постоянныя причины результата рѣшенія. Вотъ о какой причинной связи мы говоримъ здѣсь, и, конечно, можемъ говорить о вѣроятности, какъ характеристикѣ этой связи. Что-же значитъ наивѣроятнѣйшее рѣшеніе?

Дѣло въ томъ, что всѣ рѣшенія теоріи вѣроятностей *въ предѣлѣ* (при безконечномъ числѣ наблюденій) *достовѣрны*; напримѣръ, среднее ариѳметическое при *безконечномъ* числѣ наблюденій *достовѣрно* представитъ размѣръ явленія, какой оно имѣло-бы, если-бы на него дѣйствовали исключительно неслучайныя и постоянныя причины. Но безконечность есть только *предѣлъ*, произвести безконечнаго числа наблюденій мы не можемъ, за то мы знаемъ, что съ увеличеніемъ числа наблюденій мы *приближаемся* къ достовѣрнымъ рѣшеніямъ (которыя должны быть и вполнѣ точными рѣшеніями), *стремимся* къ нимъ; по этому, опредѣляя тѣ значенія, которыя *болѣе всего вѣроятны*, мы всего болѣе (насколько позволяютъ наши средства, полученныя наблюденіемъ) подходимъ къ этимъ вполнѣ точнымъ рѣшеніямъ. Слѣдовательно, наивѣроятнѣйшіе результаты рѣшеній суть рѣшенія съ приближеніемъ въ самомъ обыкновенномъ смыслѣ слова; степень ихъ приближенія характеризуется вѣроятными предѣлами ошибокъ.—Такъ должно смотрѣть на вѣроятность, опредѣленную изъ массы наблюденій (a posteriori), на среднее ариѳметическое и на ряды, вычисленыя съ помощью вышеуказанной формулы (интерполированія по способу наименьшихъ квадратовъ): всѣ они, по возможности (насколько то позволяютъ данныя), близко подходятъ къ достовѣрнымъ результатамъ, которые совершенно свободны отъ дѣйствія случайныхъ причинъ.

Но какъ понимать выраженіе: „вѣроятная ошибка"?—вѣдь ошибка есть дѣйствіе случайной причины, а вѣроятность—характеристика причинной связи вѣроятнаго явленія съ неслучайной и постоянной его причиной?—Вотъ какъ характеризуетъ случайную ошибку проф. *Маіевскій*: [96]) „Хотя случайныя ошибки появляются безъ опредѣленнаго порядка, тѣмъ не менѣе въ совокупности своей онѣ подчинены нѣкоторымъ *законамъ* и нѣкоторыя свойства ихъ могутъ быть сейчасъ показаны.

1) Такъ какъ нѣтъ причины, вслѣдствіе которой ошибка скорѣе произошла бы въ одну, чѣмъ въ другую сторону—то положительныя и отрицательныя ошибки, равныя по численной величинѣ, равновѣроятны.

2) При всякомъ родѣ наблюденій всевозможныя ошибки никогда не могутъ превзойти нѣкотораго, хотя не весьма ясно обозначаемаго предѣла" (принципъ непрерывности).

3) Между 0 и этимъ предѣломъ „ошибка можетъ принимать всевозможныя величины. [97])

---

96) Способъ наименьшихъ квадратовъ, стр. 54—55.

97) Для упрощенія при выводѣ формулы, опредѣляющей вѣрятность (p) ошибки $\left(p = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{\tau} e^{-t^2} dt\right)$, предѣлы ошибки расширяютъ; именно: предполагаютъ, что они равны 0 и $\pm\infty$. Это расширеніе предѣловъ при

4) Такъ какъ предполагаемъ, что наблюденія производятся со всевозможнымъ тщаніемъ, то съ увеличеніемъ ошибки вѣроятность ея уменьшается", съ уменьшеніемъ—увеличивается.

Вездѣ здѣсь идетъ рѣчъ о *постоянныхъ неслучайныхъ причинахъ случайной ошибки*. Упоминавшаяся уже формула, опредѣляющая вѣроятность (p) ошибки наблюденія, выводится непосредственно изъ этихъ свойствъ случайной ошибки. Слѣдовательно, и здѣсь идетъ рѣчь о связи вѣроятнаго событія съ *постоянными*, *неслучайными* причинами; понятно теперь почему можно говорить о *вѣроятной* ошибкѣ. Размѣръ вѣроятной ошибки зависитъ отъ числа наблюденій и степени точности отдѣльнаго наблюденія—это тоже постоянныя неслучайныя причины, опредѣляемыя опытомъ. Не думаемъ, чтобы послѣ оговорки на стр. 24 нужно было говорить о томъ, что сказанное здѣсь объ ошибкѣ приложимо ко всякаго рода дѣйствіямъ случайности.

опредѣленіи вѣроятностей различныхъ ошибокъ не даетъ замѣтныхъ погрѣшностей; но во всякомъ случаѣ должно помнить, что предѣлы ошибки, вычисленные по этой формулѣ для извѣстной вѣроятности, будутъ вообще нѣсколько ширѣ, чѣмъ это есть въ дѣйствительности; поэтому мы съ особеннымъ довѣріемъ можемъ относиться къ предѣламъ ошибки, вычесленными для вѣроятноси $p=\frac{199}{200}$: эти предѣлы въ дѣйствительности соотвѣтствуютъ большей вѣроятности, чѣмъ $\frac{199}{200}$, т. е. еще ближе къ достовѣрнымъ предѣламъ.

ТАБЛИЦА КВАДРАТОВЪ [98]).

N	N²	N	N²	N	N²	N	N²	N	N²	N	N²
1	1	51	2601	101	10201	151	22801	201	40401	251	63001
2	4	52	2704	102	10404	152	23104	202	40804	252	63504
3	9	53	2809	103	10609	153	23409	203	41209	253	64009
4	16	54	2916	104	10816	154	23716	204	41616	254	64516
5	25	**55**	3025	**105**	11025	**155**	24025	**205**	42025	**255**	65025
6	36	56	3136	106	11236	156	24336	206	42436	256	65536
7	49	57	3249	107	11449	157	24649	207	42849	257	66049
8	64	58	3364	108	11664	158	24964	208	43264	258	66564
9	81	59	3481	109	11881	159	25281	209	43681	259	67081
10	100	**60**	3600	**110**	12100	**160**	25600	**210**	44100	**260**	67600
11	121	61	3721	111	12321	161	25921	211	44521	261	68121
12	144	62	3844	112	12544	162	26244	212	44944	262	68644
13	169	63	3969	113	12769	163	26569	213	45369	263	69169
14	196	64	4096	114	12996	164	26896	214	45796	264	69696
15	225	**65**	4225	**115**	13225	**165**	27225	**215**	46225	**265**	70225
16	256	66	4356	116	13456	166	27556	216	46656	266	70756
17	289	67	4489	117	13689	167	27889	217	47089	267	71289
18	324	68	4624	118	13924	168	28224	218	47524	268	71824
19	361	69	4761	119	14161	169	28561	219	47961	269	72361
20	400	**70**	4900	**120**	14400	**170**	28900	**220**	48400	**270**	72900
21	441	71	5041	121	14641	171	29241	221	48841	271	73441
22	484	72	5184	122	14884	172	29584	222	49284	272	73984
23	529	73	5329	123	15129	173	29929	223	49729	273	74529
24	576	74	5476	124	15376	174	30276	224	50176	274	75076
25	625	**75**	5625	**125**	15625	**175**	30625	**225**	50625	**275**	75625
26	676	76	5776	126	15876	176	30976	226	51076	276	76176
27	729	77	5929	127	16129	177	31329	227	51529	277	76729
28	784	78	6084	128	16384	178	31684	228	51984	278	77284
29	841	79	6241	129	16641	179	32041	229	52441	279	77841
30	900	**80**	6400	**130**	16900	**180**	32400	**230**	52900	**280**	78400
31	961	81	6561	131	17161	181	32761	231	53361	281	78961
32	1024	82	6724	132	17424	182	33124	232	53824	282	79524
33	1089	83	6889	133	17689	183	33489	233	54289	283	80089
34	1156	84	7056	134	17956	184	33856	234	54756	284	80656
35	1225	**85**	7225	**135**	18225	**185**	34225	**235**	55225	**285**	81225
36	1296	86	7396	136	18496	186	34596	236	55696	286	81796
37	1369	87	7569	137	18769	187	34969	237	56169	287	82369
38	1444	88	7744	138	19044	188	35344	238	56644	288	82944
39	1521	89	7921	139	19321	189	35721	239	57121	289	83521
40	1600	**90**	8100	**140**	19600	**190**	36100	**240**	57600	**290**	84100
41	1681	91	8281	141	19881	191	36481	241	58081	291	84681
42	1764	92	8464	142	20164	192	36864	242	58564	292	85264
43	1849	93	8649	143	20449	193	37249	243	59049	293	85849
44	1936	94	8836	144	20736	194	37636	244	59536	294	86436
45	2025	**95**	9025	**145**	21025	**195**	38025	**245**	60025	**295**	87025
46	2116	96	9216	146	21316	196	38416	246	60516	296	87616
47	2209	97	9409	147	21609	197	38809	247	61009	297	88209
48	2304	98	9604	148	21904	198	39204	248	61504	298	88804
49	2401	99	9801	149	22201	199	39601	249	62001	299	89401
50	2500	**100**	10000	**150**	22500	**200**	40000	**250**	62500	**300**	90000

98) Предлагаемая таблица представляетъ квадраты чиселъ чрезъ единицу отъ 1 до 1000; такъ что, если мы захотимъ пользоваться ею для чиселъ съ двумя десятичными знаками, то она дастъ намъ квадраты чиселъ черезъ одну сотую до 10 включительно. Составлена таблица такимъ образомъ: въ столбцахъ обозначенныхъ N стоятъ числа, въ сосѣднемъ столбцѣ вправо, обозначенномъ N^2, въ той же строкѣ—ихъ квадраты.

ТАБЛИЦА КВАДРАТОВЪ.

N	N²	N	N²	N	N²	N	N²	N	N²	N	N²
301	90601	351	123201	401	160801	451	203401	501	251001	551	303601
302	91204	352	123904	402	161604	452	204304	502	252004	552	304704
303	91809	353	124609	403	162409	453	205209	503	253009	553	305809
304	92416	354	125316	404	163216	454	206116	504	254016	554	306916
305	93025	**355**	126025	**405**	164025	**455**	207025	**505**	255025	**555**	308025
306	93636	356	126736	406	164836	456	207936	506	256036	556	309136
307	94249	357	127449	407	165649	457	208849	507	257049	557	310249
308	94864	358	128164	408	166464	458	209764	508	258064	558	311364
309	95481	359	128881	409	167281	459	210681	509	259081	559	312481
310	96100	**360**	129600	**410**	168100	**460**	211600	**510**	260100	**560**	313600
311	96721	361	130321	411	168921	461	212521	511	261121	561	314721
312	97344	362	131044	412	169744	462	213444	512	262144	562	315844
313	97969	363	131769	413	170569	463	214369	513	263169	563	316969
314	98596	364	132496	414	171396	464	215296	514	264196	564	318096
315	99225	**365**	133225	**415**	172225	**465**	216225	**515**	265225	**565**	319225
316	99856	366	133956	416	173056	466	217156	516	266256	566	320356
317	100489	367	134689	417	173889	467	218089	517	267289	567	321489
318	101124	368	135424	418	174724	468	219024	518	268324	568	322624
319	101761	369	136161	419	175561	469	219961	519	269361	569	323761
320	102400	**370**	136900	**420**	176400	**470**	220900	**520**	270400	**570**	324900
321	103041	371	137641	421	177241	471	221841	521	271441	571	326041
322	103684	372	138384	422	178084	472	222784	522	272484	572	327184
323	104329	373	139129	423	178929	473	223729	523	273529	573	328329
324	104976	374	139876	424	179776	474	224676	524	274576	574	329476
325	105625	**375**	140625	**425**	180625	**475**	225625	**525**	275625	**575**	330625
326	106276	376	141376	426	181476	476	226576	526	276676	576	331776
327	106929	377	142129	427	182329	477	227529	527	277729	577	332929
328	107584	378	142884	428	183184	478	228484	528	278784	578	334084
329	108241	379	143641	429	184041	479	229441	529	279841	579	335241
330	108900	**380**	144400	**430**	184900	**480**	230400	**530**	280900	**580**	336400
331	109561	381	145161	431	185761	481	231361	531	281961	581	337561
332	110224	382	145924	432	186624	482	232324	532	283024	582	338724
333	110889	383	146689	433	187489	483	233289	533	284089	583	339889
334	111556	384	147456	434	188356	484	234256	534	285156	584	341056
335	112225	**385**	148225	**435**	189225	**485**	235225	**535**	286225	**585**	342225
336	112896	386	148996	436	190096	486	236196	536	287296	586	343396
337	113569	387	149769	437	190969	487	237169	537	288369	587	344569
338	114244	388	150544	438	191844	488	238144	538	289444	588	345744
339	114921	389	151321	439	192721	489	239121	539	290521	589	346921
340	115600	**390**	152100	**440**	193600	**490**	240100	**540**	291600	**590**	348100
341	116281	391	152881	441	194481	491	241081	541	292681	591	349281
342	116964	392	153664	442	195364	492	242064	542	293764	592	350464
343	117649	393	154449	443	196249	493	243049	543	294849	593	351649
344	118336	394	155236	444	197136	494	244036	544	295936	594	352836
345	119025	**395**	156025	**445**	198025	**495**	245025	**545**	297025	**595**	354025
346	119716	396	156816	446	198916	496	246016	546	298116	596	355216
347	120409	397	157609	447	199809	497	247009	547	299209	597	356409
348	121104	398	158404	448	200704	498	248004	548	300304	598	357604
349	121801	399	159201	449	201601	499	249001	549	301401	599	358801
350	122500	**400**	160000	**450**	202500	**500**	250000	**550**	302500	**600**	360000

ТАБЛИЦА КВАДРАТОВЪ.

N	N²	N	N²	N	N²	N	N²	N	N²	N	N²
601	361201	651	423801	701	491401	751	564001	801	641601	851	724201
602	362404	652	425104	702	492804	752	565504	802	643204	852	725904
603	363609	653	426409	703	494209	753	567009	803	644809	853	727609
604	364816	654	427716	704	495616	754	568516	804	646416	854	729316
605	366025	**655**	429025	**705**	497025	**755**	570025	**805**	648025	**855**	731025
606	367236	656	430336	706	498436	756	571536	806	649636	856	732736
607	368449	657	431649	707	499849	757	573049	807	651249	857	734449
608	369664	658	432964	708	501264	758	574564	808	652864	858	736164
609	370881	659	434281	709	502681	759	576081	809	654481	859	737881
610	372100	**660**	435600	**710**	504100	**760**	577600	**810**	656100	**860**	739600
611	373321	661	436921	711	505521	761	579121	811	657721	861	741321
612	374544	662	438244	712	506944	762	580644	812	659344	862	743044
613	375769	663	439569	713	508369	763	582169	813	660969	863	744769
614	376996	664	440896	714	509796	764	583696	814	662596	864	746496
615	378225	**665**	442225	**715**	511225	**765**	585225	**815**	664225	**865**	748225
616	379456	666	443556	716	512656	766	586756	816	665856	866	749956
617	380689	667	444889	717	514089	767	588289	817	667489	867	751689
618	381924	668	446224	718	515524	768	589824	818	669124	868	753424
619	383161	669	447561	719	516961	769	591361	819	670761	869	755161
620	384400	**670**	448900	**720**	518400	**770**	592900	**820**	672400	**870**	756900
621	385641	671	450241	721	519841	771	594441	821	674041	871	758641
622	386884	672	451584	722	521284	772	595984	822	675684	872	760384
623	388129	673	452929	723	522729	773	597529	823	677329	873	762129
624	389376	674	454276	724	524176	774	599076	824	678976	874	763876
625	390625	**675**	455625	**725**	525625	**775**	600625	**825**	680625	**875**	765625
626	391876	676	456976	726	527076	776	602176	826	682276	876	767376
627	393129	677	458329	727	528529	777	603729	827	683929	877	769129
628	394384	678	459684	728	529984	778	605284	828	685584	878	770884
629	395641	679	461041	729	531441	779	606841	829	687241	879	772641
630	396900	**680**	462400	**730**	532900	**780**	608400	**830**	688900	**880**	774400
631	398161	681	463761	731	534361	781	609961	831	690561	881	776161
632	399424	682	465124	732	535824	782	611524	832	692224	882	777924
633	400689	683	466489	733	537289	783	613089	833	693889	883	779689
634	401956	684	467856	734	538756	784	614656	834	695556	884	781456
635	403225	**685**	469225	**735**	540225	**785**	616225	**835**	697225	**885**	783225
636	404496	686	470596	736	541696	786	617796	836	698896	886	784996
637	405769	687	471969	737	543169	787	619369	837	700569	887	786769
638	407044	688	473344	738	544644	788	620944	838	702244	888	788544
639	408321	689	474721	739	546121	789	622521	839	703921	889	790321
640	409600	**690**	476100	**740**	547600	**790**	624100	**840**	705600	**890**	792100
641	410881	691	477481	741	549081	791	625681	841	707281	891	793881
642	412164	692	478864	742	550564	792	627264	842	708964	892	795664
643	413449	693	480249	743	552049	793	628849	843	710649	893	797449
644	414736	694	481636	744	553536	794	630436	844	712336	894	799236
645	416025	**695**	483025	**745**	555025	**795**	632025	**845**	714025	**895**	801025
646	417316	696	484416	746	556516	796	633616	846	715716	896	802816
647	418609	697	485809	747	558009	797	635209	847	717409	897	804609
648	419904	698	487204	748	559504	798	636804	848	719104	898	806404
649	421201	699	488601	749	561001	799	638401	849	720801	899	808201
650	422500	**700**	490000	**750**	562500	**800**	640000	**850**	722500	**900**	810000

ТАБЛИЦА КВАДРАТОВЪ.

N	N²	N	N²	N	N²	N	N²	N	N²	N	N²
901	811801	921	848241	941	885481	956	913936	971	942841	986	972196
902	813604	922	850084	942	887364	957	915849	972	944784	987	974169
903	815409	923	851929	943	889249	958	917764	973	946729	988	976144
904	817216	924	853776	944	891136	959	919681	974	948676	989	978121
905	819025	**925**	855625	**945**	893025	**960**	921600	**975**	950625	**990**	980100
906	820836	926	857476	946	894916	961	923521	976	952576	991	982081
907	822649	927	859329	947	896809	962	925444	977	954529	992	984064
908	824464	928	861184	948	898704	963	927369	978	956484	993	986049
909	826281	929	863041	949	900601	964	929296	979	958441	994	988036
910	828100	**930**	864900	**950**	902500	**965**	931225	**980**	960400	**995**	990025
911	829921	931	866761	951	904401	966	933156	981	962361	996	992016
912	831744	932	868624	952	906304	967	935089	982	964324	997	994009
913	833569	933	870489	953	908209	968	937024	983	966289	998	996004
914	835396	934	872356	954	910116	969	938961	984	968256	999	998001
915	837225	**935**	874225	**955**	912025	**970**	940900	**985**	970225	**1000**	1000000
916	839056	936	876096								
917	840889	937	877969								
918	842724	938	879844								
919	844561	939	881721								
920	846400	**940**	883600								